

CAPITOLO VI

LE LINEE D'INFLUENZA

VI. 1 - Fattori d'influenza. Nella Scienza delle Costruzioni si chiama *linea d'influenza* di una data grandezza il diagramma che ne rappresenta la legge di variazione al variare della posizione del carico che la produce. Mentre dunque un diagramma, ad es., di momenti flettenti indica, per una assegnata condizione di carico, i valori di M in corrispondenza delle varie sezioni, la linea d'influenza di un momento flettente dà la legge con cui varia il momento in una sezione fissa quando il carico che lo genera si sposta; il valore di M in quella sezione viene riportato in corrispondenza del carico. Queste linee sono ordinariamente diagrammi cartesiani la cui ordinata letta sotto il carico dà il valore della grandezza rappresentata riferita al carico stesso: cioè dà un *fattore d'influenza* che, moltiplicato per l'intensità della forza applicata, fornisce la quantità che si considera. Grazie alla sovrapposizione degli effetti che la rappresentazione presuppone, la linea d'influenza permette il calcolo della quantità rappresentata per qualunque configurazione di forze agenti nella direzione prefissata. Se f_i è il coefficiente d'influenza di una reazione R , poniamo, letto in ordinata nella sezione dove agisce il carico F_i , la reazione dovuta all'azione simultanea di un gruppo di forze F_1, \dots, F_n vale

$$R = f_1 F_1 + \dots + f_n F_n \quad [127]$$

Qualora si abbia un carico ripartito con intensità p lungo un tratto PQ della linea d'asse di una trave, la reazione è data da

$$R = \int_P^Q p f dz$$

Dunque per ogni linea d'influenza si deve specificare: la grandezza rappresentata e la sezione a cui essa si riferisce, la direzione del carico inducente e la scala di rappresentazione. I fattori d'influenza hanno la dimensione della gran-

dezza rappresentata divisa per una forza; quindi, per la linea d'influenza di uno spostamento, f ha dimensione lunghezza/forza, per la linea d'influenza di una forza f è adimensionale, per quella di un momento f è una lunghezza.

Ancora in virtù della sovrapposizione degli effetti si possono ottenere dalle linee d'influenza di una generica travatura i diagrammi nel caso di carico indiretto, ossia nel caso in cui i carichi siano trasmessi alla struttura mediante travi intermedie appoggiate alla travatura stessa. Sia PQ una di queste travi secondarie (fig. 93). Se su essa insiste la forza F le due reazioni che la trave intermedia trasmette alla sottostante struttura sono date da

$$R_1 = (Q \angle P)F \quad , \quad R_2 = (P \angle Q)F$$

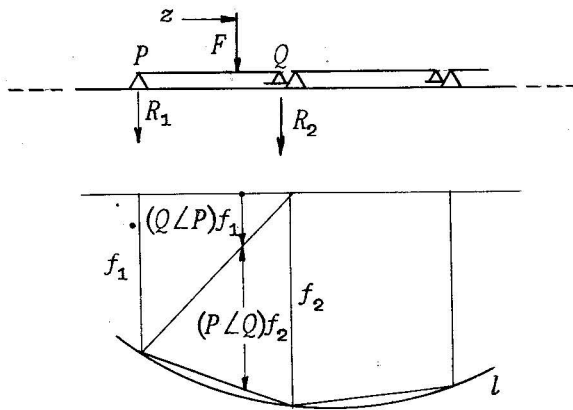


Fig. 93 - Dalla linea d'influenza l della trave a carico diretto si ottiene per il carico indiretto la poligonale iscritta.

Se f_1 e f_2 sono le ordinate della linea d'influenza in P e Q , la quantità rappresentata, poniamo la reazione R , è data da

$$R = (Q \angle P)f_1F + (P \angle Q)f_2F$$

Il fattore d'influenza R/F , finché il carico insiste nel tratto considerato sarà rappresentato dal segmento che unisce le ordinate della linea d'influenza nelle sezioni estreme del tratto. Quindi concludiamo che la linea d'influenza della travatura a carico indiretto è data dal poligono iscritto nella linea d'influenza della travatura a carico diretto.

VI. 2 - Linee d'influenza di spostamenti e rotazioni. Nel tracciamento di tali linee si fa uso del teorema di Betti il quale afferma che, in una struttura elastica, il lavoro che un generico sistema di carichi I fa per gli spostamenti prodotti da un sistema II e' uguale al lavoro che i carichi II fanno negli spostamenti prodotti dal sistema I. La dimostrazione di questo teorema per le strutture a cui ci riferiamo e' immediata. Basta osservare che l'espressione [48] di L_i non muta valore se si permutano i sistemi a e b : d'altra parte il lavoro interno deve essere uguale a quello esterno, poiche' i due sistemi sono insieme equilibrati e congruenti; quindi sussiste l'uguaglianza di lavori sopra enunciata. Sinteticamente la dimostrazione si esprime come segue:

$$L_e(a=I, b=II) = L_i(a=I, b=II) = L_i(a=II, b=I) = L_e(a=II, b=I)$$

La prima eguaglianza sussiste perche' il sistema I e' equilibrato e il II congruente; la seconda, perche' permutando i due sistemi L_i non cambia; la terza perche' il sistema II e' equilibrato, il I congruente. Si ha cosi' in definitiva il teorema di Betti:

$$L_e(a=I, b=II) = L_e(a=II, b=I) \quad [128]$$

Si voglia conoscere lo spostamento η^S del punto S della linea d'asse (fig. 94) in una data direzione (verticale, per precisare) prodotto dalla forza F_h agente in direzione, poniamo, orizzontale, nel generico punto P . Sia ζ^P la componente orizzontale dello spostamento di P quando in S si applichi una forza verticale. Per il teorema di Betti e'

$$U \eta^S = F_h \zeta^P \quad [129]$$

Segue dalle definizioni che ζ^P/U e' il fattore d'influenza cercato: esso e' ottenuto determinando le deformazioni della struttura sotto una forza verticale in S e deducendo le componenti orizzontali di spostamento. In termini generali, i fattori d'influenza per gli spostamenti di un dato punto S in una data direzione d_1 prodotti da carichi in posizione variabile e direzione d_2 sono ottenuti dividendo per U gli spostamenti nella direzione d_2 prodotti da una forza U agente in S nella direzione d_1 .

Si voglia conoscere la rotazione φ^S della sezione S prodotta da carichi verticali F_v in posizione generica: si costruiranno le componenti verticali η degli spostamenti prodotti dall'azione di una coppia U_c in S . Per il teorema di

Betti e'

$$U_C \varphi^S = F_V \eta$$

[130]

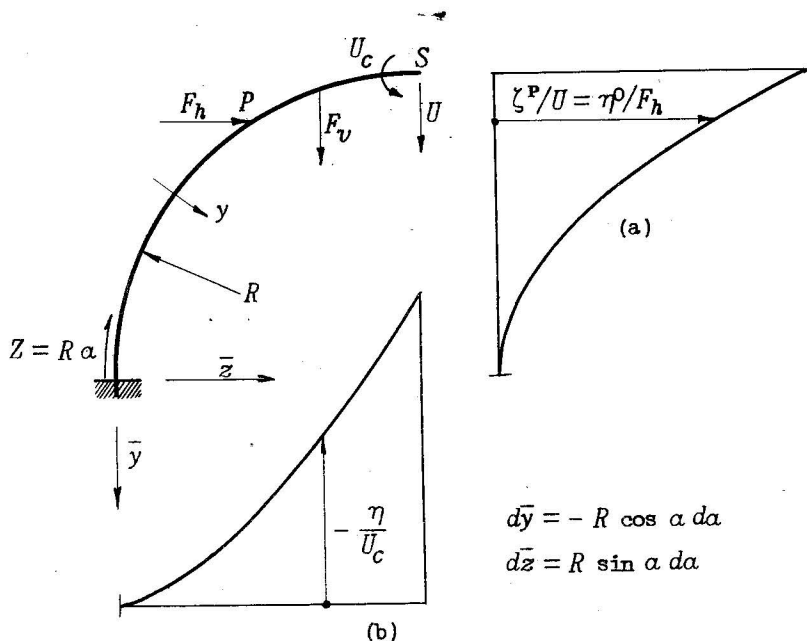


Fig. 94 - Linee d'influenza per un arco incastrato avente per asse un quarto di circonferenza. (a) Spostamenti verticali di S per forze orizzontali. La forza U in S dà per le [72] e [73]

$$M = -UR \cos \alpha, \quad \varphi = -\frac{UR^2}{EJ} \sin \alpha, \quad \zeta = \frac{UR^3}{2EJ} \sin^2 \alpha$$

(b) Rotazioni in S per forze verticali. La coppia U_C dà per le [72] e [73]

$$M = U_C, \quad \varphi = U_C R \alpha / EJ, \quad \eta = -\frac{U_C R^2}{EJ} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

Dunque i rapporti η/U_C rappresentano i fattori d'influenza ricercati. La linea d'influenza delle rotazioni di una data

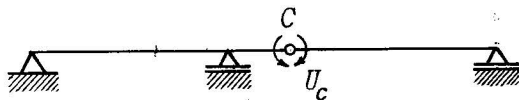


Fig. 95 - La linea elastica della trave Gerber caricata dalle coppie U_C dà la linea d'influenza per carichi verticali della rotazione relativa presso la cerniera C .

sezione S si costruisce dunque in base alla deformata prodotta da una coppia U_c in S , dividendo per U_c le componenti di spostamento nella direzione del carico mobile. Se si vuole la linea d'influenza della rotazione relativa di due sezioni, si applicheranno coppie opposte nelle sezioni stesse e si determineranno le componenti di spostamento nella direzione dei carichi (fig. 95).

VI.3 - Linee d'influenza di reazioni vincolari isostatiche.

Se la reazione di un vincolo è determinabile mediante le equazioni della statica, la soppressione di quel vincolo trasforma la struttura in un *meccanismo*, capace di moti rigidi. Così per la trave Gerber della fig. 96, soppresso l'appoggio B , si

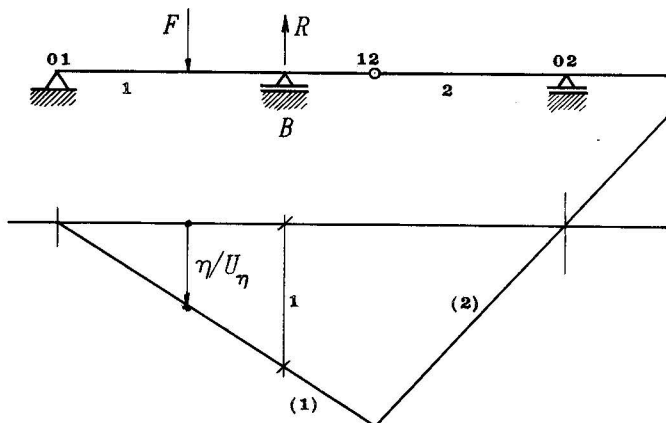


Fig. 96 - Linea d'influenza della reazione in B per carichi verticali.

consideri il moto rigido elementare che la struttura può effettuare compatibilmente con tutti gli altri suoi vincoli. I centri di rotazione ed il diagramma degli spostamenti verticali sono individuati secondo quanto è detto nel § IV.2. Si assumano come spostamenti virtuali quelli di questo moto rigido, definito in grandezza dando lo spostamento verticale U_η di B e si calcoli il lavoro L_e che per questi spostamenti fanno la forza F e le relative reazioni vincolari. Poiché queste forze sono in equilibrio e il moto virtuale è rigido ($L_i = 0$) sarà

$$F\eta - RU_\eta = 0 \quad [131]$$

essendo η l'abbassamento del punto dove F agisce ed essendo R la reazione dell'appoggio in B , la sola reazione che

lavori, tutti gli altri vincoli essendo rispettati dal moto considerato. Dalla [131] appare che i rapporti η/U_η sono i fattori d'influenza per il calcolo di R : il relativo diagramma rappresenta la linea d'influenza della reazione cercata.

Dunque, per tracciare la linea d'influenza di una reazione vincolare, si sopprime anzitutto il vincolo in questione e si considera il moto rigido infinitesimo che la soppressione del vincolo rende possibile: l'entità di questo moto sia definita dallo spostamento relativo (dislocazione) U_η , che si produce dove il vincolo operava. Si determini lo spostamento η del punto di applicazione della forza mobile, proiettato sulla direzione di questa: il rapporto η/U_η e' l'ordinata della linea d'influenza del vincolo in questione. Se lo spostamento U_η e' dato in modo che il corrispondente lavoro della reazione vincolare sia negativo (come nella fig. 96) η/U_η ha il segno del fattore d'influenza cercato.

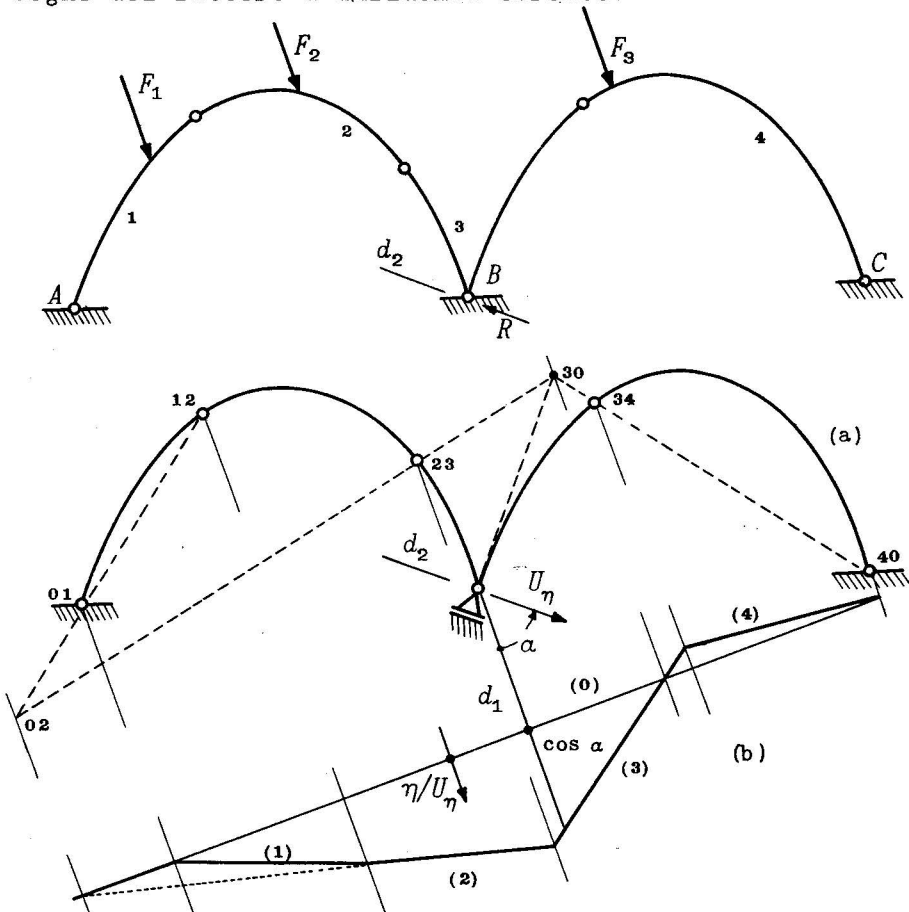


Fig. 97 - Linea d'influenza della componente nella direzione d_2 della reazione B per carichi nella direzione d_1 .

Nella fig.97, per una struttura composta da archi isostatici, e' determinata la linea d'influenza, per carichi agenti in una data direzione d_1 , della componente secondo la direzione d_2 della reazione della cerniera B . Si sopprime anzitutto il vincolo nella direzione d_2 , ossia si trasforma la cerniera in un appoggio con direzione di scorrimento parallela a d_2 (fig.97a). Sulla normale a questa stara' il centro 30 di rotazione del corpo 3. Siccome esso deve essere allineato con 04 e 34, e' cosi' individuato. Il centro 02 e' trovato in base all'allineamento con 01 e 12 nonche' con 23 e 30. Il diagramma delle componenti di spostamento nella direzione d_1 viene costruito partendo dallo spostamento di B , la cui grandezza indichiamo con U_η , la direzione essendo d_2 . Gli spostamenti proiettati nella direzione d_2 e divisi per U_η sono rappresentati da una spezzata che in corrispondenza del punto B ha ordinata $\cos \alpha$ (fig.97b). Si traccia cosi' prima il lato (3), poi i lati (4) e (2), e infine il lato (1) tenendo conto che ciascuno di questi deve tagliare la fondamentale (0) in corrispondenza del centro di rotazione e che in corrispondenza dei centri relativi 12, 34 si intersecano i lati (1), (2) e (3), (4) rispettivamente.

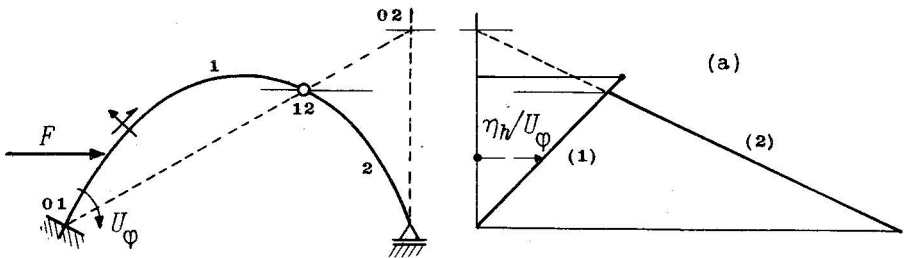


Fig. 98 - Linea d'influenza del momento all'incastro, per forze orizzontali.

Questa spezzata costituisce la linea d'influenza ricercata, in virtú della stessa relazione [131].

Nella fig.98 e' determinata la linea d'influenza, per carichi orizzontali, del momento d'incastro per la struttura isostatica ivi rappresentata. La soppressione del vincolo comporta la trasformazione dell'incastro in una cerniera che diventa il centro di rotazione del corpo 1. Gli spostamenti proiettati orizzontalmente e divisi per la rotazione U_φ impressa al corpo 1 sono rappresentati dalla spezzata della fig.98a; se si usa la stessa scala per ascisse e ordinate, il primo lato risulta inclinato di 45° . Detti η_h gli spostamenti oriz-

zontali e M_i il momento d'incastro l'equazione $L_e = 0$ si scrive

$$F \eta_h - M_i U_\varphi = 0 \quad [132]$$

VI.4 - Caratteristiche di sollecitazione isostatiche. Le caratteristiche di sollecitazione possono essere considerate come reazioni del vincolo esistente fra le due facce di qualunque sezione: pertanto i medesimi concetti che guidano al tracciamento delle linee d'influenza di reazioni vincolari valgono per quelle di M, N o T . Nella determinazione della linea d'influenza del momento flettente in una sezione S , si dovrà disporre in S una cerniera e si imporrà la rotazione piccolissima U_φ relativa fra le due parti (fig.99a): lo spostamento nella direzione del carico mobile del punto d'applicazione del carico stesso, diviso per U_φ dà il fattore d'influenza. Per le linee d'influenza del taglio o dello sforzo normale si disporranno guide prismatiche atte a consentire uno spostamento relativo U_η in direzione tangente alla sezione (fig.99c) o normale (fig.99b), senza rotazione: gli spostamenti nella direzione del carico mobile, riferiti a U_η danno i fattori d'influenza. La giustificazione di queste affermazioni

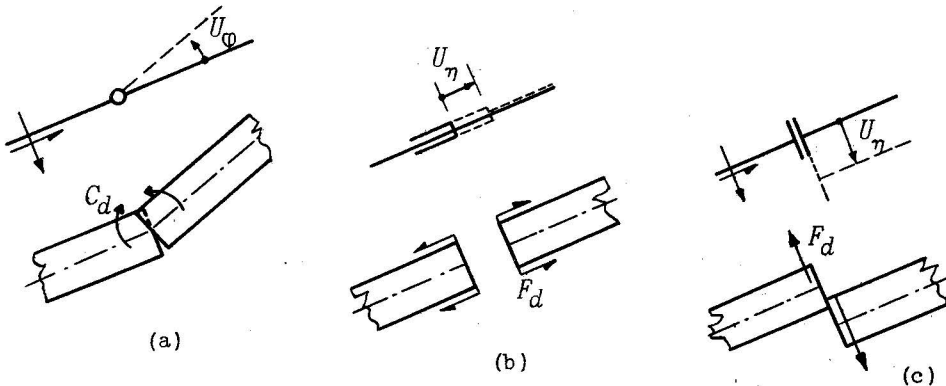


Fig. 99 - Rottura del vincolo e dislocazione locale, relative: (a) al momento flettente, (b) allo sforzo normale, (c) al taglio. C_d, F_d azioni dislocanti presso i vincoli iperstatici.

sta sempre nell'equazione $L_e = 0$ che assume la forma

$$F \eta = M U_\varphi \quad \text{ovvero} \quad = T U_\eta \quad \text{ovvero} \quad = N U_\eta \quad [133]$$

secondo che si tratti dei casi a, c o b della fig.99. Vari esempi sono presentati nelle figg.100 - 103.

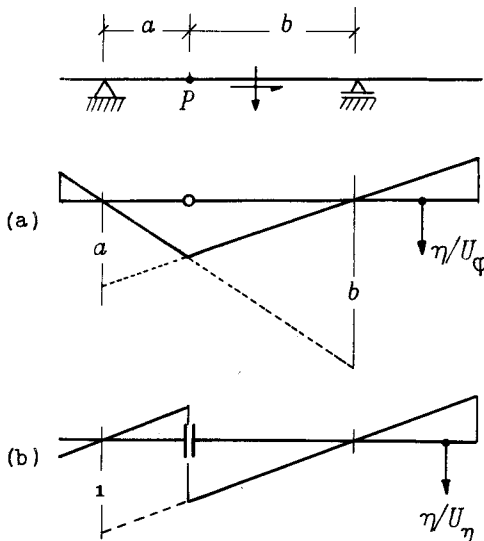


Fig. 100 - Linee d' influenza, per carichi verticali, delle sollecitazioni nella sezione P di una trave appoggiata. (a) Per il momento flettente si pone in P una cerniera e si impone la rotazione relativa U_φ alle due parti. I due lati della spezzata che rappresenta η/U_φ formano un angolo tale che l'intercetto verticale uguaglia la distanza orizzontale. (b) Per il taglio si pone una coppia prismatica e si impone lo spostamento relativo U_η . I due lati della spezzata che rappresenta η/U_η sono paralleli e distanti 1.

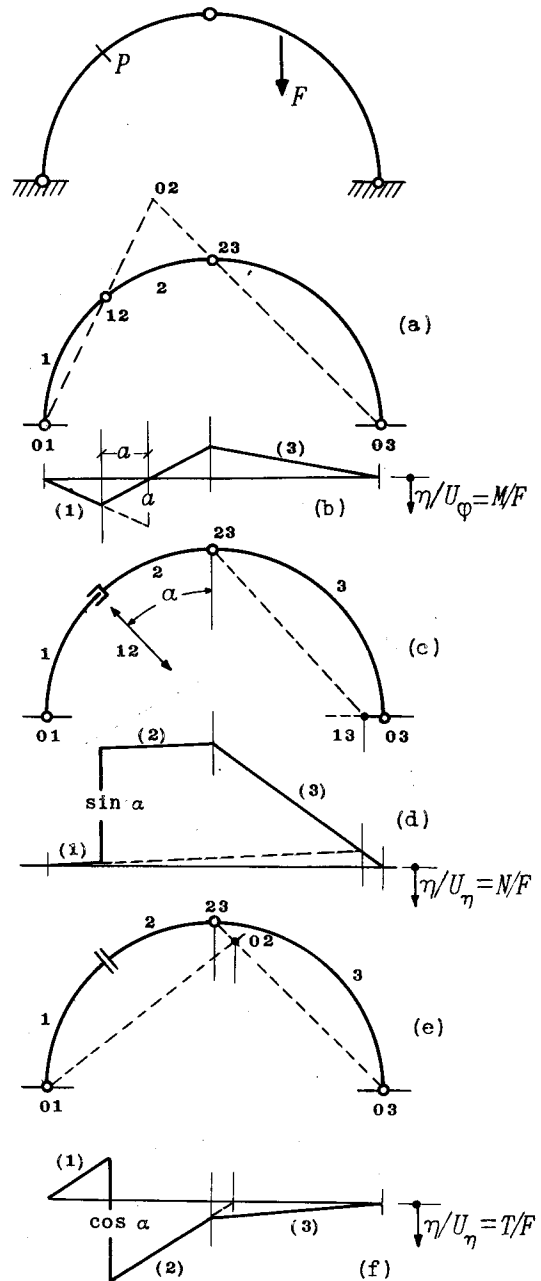


Fig. 101 - Linee d' influenza, per carichi verticali, delle sollecitazioni nella sezione P di un arco a 3 cerniere. (a) Per il momento si pone in P una cerniera e si dà la rotazione U_φ . I lati della spezzata (b) che rappresenta η/U_φ formano in P un angolo come nella figura 100a. (c) Per N si pone in P la coppia prismatica e si dà la traslazione relativa U_η nella direzione tangente all'asse. I lati della spezzata (d) che rappresenta η/U_η presentano in P un salto $\sin \alpha$. Il centro 12 sta all' infinito e 02 cade lontano dalla figura. Si è fatto perciò uso del centro 13. (e) Per T si pone in P la coppia prismatica e si dà la traslazione relativa U_η nella direzione normale all'asse. I lati della spezzata (f) che rappresenta η/U_η presentano in P il salto $\cos \alpha$, essendo α l'angolo che la sezione P fa con la verticale.

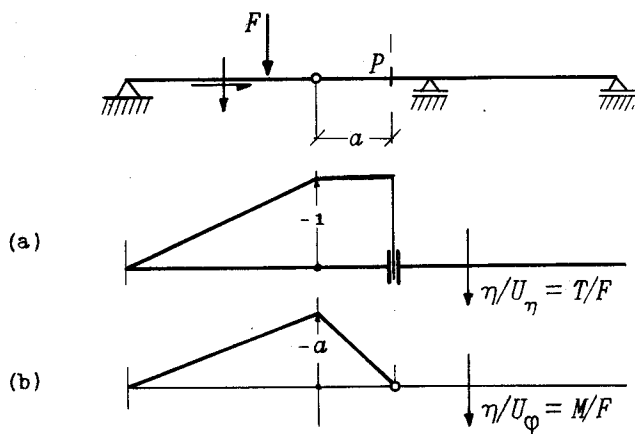


Fig. 102 - Linee d'influenza per carichi verticali delle sollecitazioni nella sezione P di una trave Gerber. (a) Per il taglio. (b) Per il momento flettente.

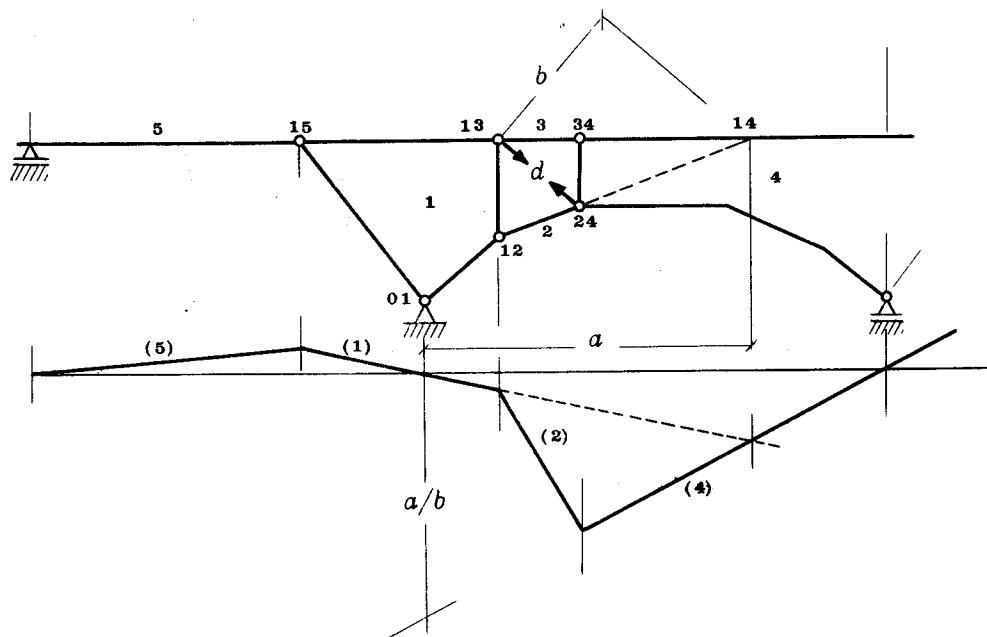


Fig. 103 - Linea d'influenza dello sforzo nella diagonale d . Il centro 14 si trova in allineamento con 12, 24 e con 13, 34. Dal lato (4) della spezzata si ha (1) e quindi (2) e (5). Si noti che il lato (1) riferito a (4) dà gli sforzi in d se si caricasse il corpo 1 vincolandolo solo a 4 con le aste 2, 3 e d .

Si osservi come e' concetto comune alla determinazione delle linee d'influenza di reazioni vincolari o di caratteristiche di sollecitazione la interruzione del vincolo in esame (sia esso esterno o interno) e la creazione di una configurazione di spostamenti corrispondenti ad un moto relativo (dislocazione) piccolissimo delle due parti che il vincolo univa (una delle quali puo' essere il terreno, nel caso di vincolo esterno). In tal senso si puo' intendere come reazione vincolare un momento flettente o un momento d'incastro, uno sforzo di taglio o una reazione d'appoggio.

VI.5 - Linee d'influenza di reazioni iperstatiche. Il concetto su cui si basa la costruzione di una linea d'influenza per un vincolo interno o esterno iperstatico e' ancora quello di creare una dislocazione per la quale solo quella reazione

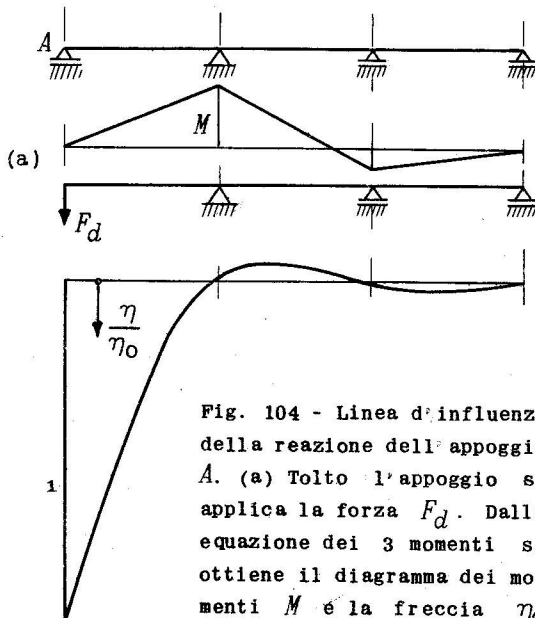


Fig. 104 - Linea d'influenza della reazione dell'appoggio A. (a) Tolto l'appoggio si applica la forza F_d . Dalla equazione dei 3 momenti si ottiene il diagramma dei momenti M e la freccia η_0 nella sezione A. Si determinano quindi le frecce η e i fattori di influenza η/η_0 .

vincolare faccia lavoro. Ora pero', dopo la soppressione del vincolo in esame, la dislocazione non puo' essere prodotta con semplici moti rigidi poiche' la struttura non ha ancora alcun grado di liberta'. Presso il vincolo soppresso bisognera' introdurre azioni "dislocanti" (fig. 99): coppie opposte se s'e' sostituito un incastro con una cerniera, forze opposte se s'e' sostituita una cerniera con un appoggio o un incastro con una guida. Come nel caso staticamente determinato si introdurrà questa configurazione ideale di dislocazione a fianco alla situazione reale, creata

dal carico mobile. Le azioni di dislocazione fanno lavoro nullo nella deformazione reale perche' questa rispetta tutti i vincoli. Quindi per il teorema di Betti deve essere nullo il lavoro compiuto nella dislocazione dalle forze del sistema reale: il carico mobile e le corrispondenti reazioni vincola-

ri. Perciò, come nel caso isostatico sussisteranno le relazioni [131] - [133]. Si deve però notare che mentre nel primo caso esse si fondano sull'equazione dei lavori virtuali e quindi valgono indipendentemente dalle proprietà del materiale che costituisce la struttura, nel caso di reazioni iperstatiche si è dovuto fare appello al teorema di Betti. Di conseguenza, la validità del procedimento per le strutture iperstatiche è legata alle proprietà elastiche del materiale (*).

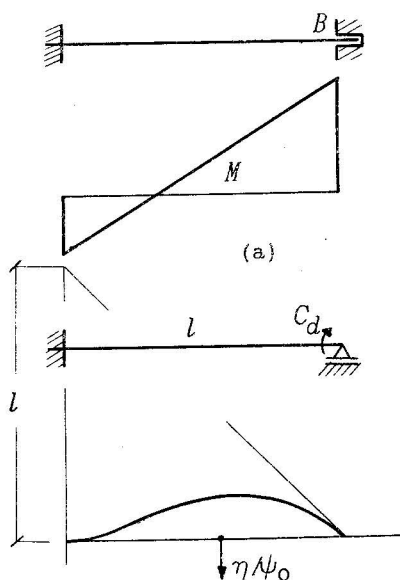


Fig. 105 - Linea d'influenza del momento in B . Si trasforma l'incastro scorrevole in appoggio e si applica la coppia C_d . Dal diagramma di momenti (a) si ottengono le frecce η , la rotazione ψ_0 della sezione B e quindi i fattori d'influenza $\eta\psi_0$.

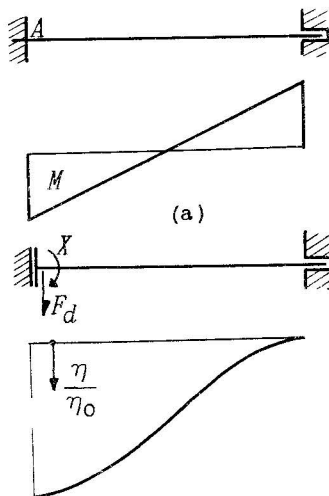


Fig. 106 - Linea d'influenza di T nella sezione $A =$ reazioni d'incastro. Si trasforma l'incastro in coppia prismatica, vi si applica F_d e si determinano i momenti (a). L'iperstatica X è determinata da $\int M dw = 0$. Si calcolano le frecce η (η_0 in A) e i fattori η/η_0 .

(*) Il tracciamento della linea d'influenza di uno spostamento (a) o di una reazione vincolare (b) è ricondotto alla determinazione di una deformazione fittizia (f) per contrapposto alla configurazione reale (r) creata dal carico mobile. Nel caso (a) la configurazione (f) è prodotta da una forza o coppia nel punto a cui lo spostamento si riferisce, nella struttura integra; nel caso (b) si crea una dislocazione o sconnessione al posto del vincolo in esame. Nel caso (a) le [129]--[130] eguagliano il lavoro dell'azione fittizia per lo spostamento reale al lavoro della forza reale per lo spostamento (f); nel caso (b) i due termini

(continua)

Il tracciamento delle linee d'influenza in questione e' dunque ricondotto alla determinazione della deformata per la struttura con un vincolo in meno. In particolare se la struttura e' una volta iperstatica, quella deformazione va determinata su uno schema isostatico. Si noti pero' che l'azione dislocante non e' nota a priori, ma puo' essere assegnata a piacere: le deformazioni ottenute divise per il valore U_φ o U_η della sconnessione creata forniscono il grafico del fattore d'influenza ricercato.

Si voglia avere la linea d'influenza di una reazione di appoggio in una trave continua (fig. 104). Si sopprimera' l'appoggio e si applichera' una forza diretta in senso inverso alla reazione R . La deformata da' la linea d'influenza cercata quando le sue ordinate siano riferite a quella ottenuta per la sezione dell'appoggio. Analogamente si costruiscono le linee d'influenza per i vincoli di una trave incastrata (figg. 105, 106).

VI.6 - Tracciamento indiretto di linee d'influenza di sollecitazioni. Il procedimento medesimo col quale si determinano le linee d'influenza di reazioni vincolari serve per le caratteristiche di sollecitazione in una sezione qualunque, come s'e' visto per la travatura isostatica. Cosi' ad esempio per la linea d'influenza del momento flettente in una sezione P della trave incastrata, vi si pone una cerniera, si applicano le coppie di distorsione e si trovano i momenti flettenti nella struttura (una volta iperstatica) e quindi le frecce. Detta ψ la distorsione, rotazione relativa delle sezioni collegate dalla cerniera, i rapporti η/ψ forniscono i fattori d'influenza cercati (fig. 107a). Per la linea d'influenza del taglio, si pone in P una coppia prismatica e si determinano le frecce prodotte dall'azione di dislocazione F_α : queste, divise per la dislocazione, ossia per freccia relativa η_0 presso la guida trasversale, danno i fattori d'influenza (figura 107b, b').

(segue nota da pagina precedente)

delle [131] - [133] si riferiscono al lavoro delle forze reali nella dislocazione (f). Tale lavoro e' nullo nel caso isostatico perche' si tratta di forze in equilibrio in un moto rigido; nel caso iperstatico perche', per il teorema di Betti, tale lavoro e' uguale a quello delle forze dislocanti nel sistema reale. L'enunciazione e la dimostrazione piu' completa del teorema utilizzato in questo paragrafo e' dovuta al prof. Colonnetti.

Ai medesimi risultati si può arrivare valendosi delle linee d'influenza delle reazioni dei vincoli (fig. 107c). Siano M_1, M_2 i momenti ai due estremi A, B e T_1, T_2 i tagli relativi; sia z_1 la coordinata della sezione P . Finché il carico si trovi compreso fra A e P , sarà in P

$$T = T_2 \quad , \quad M = M_2 - T_2(l - z_1)$$

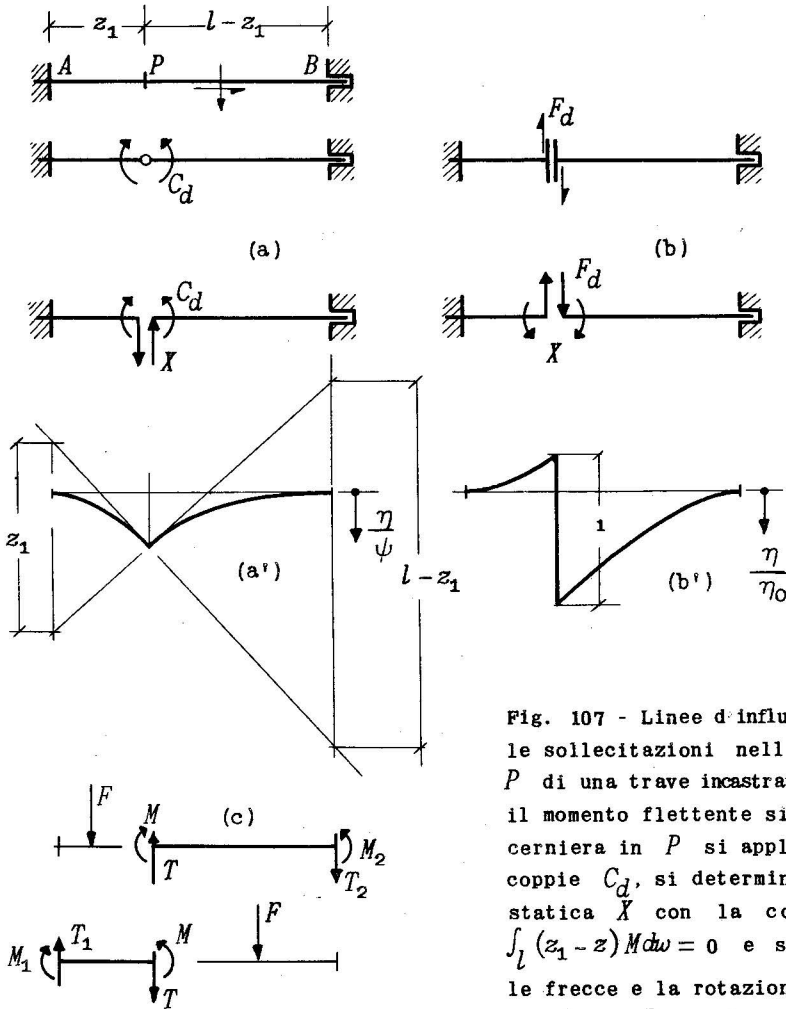


Fig. 107 - Linee d'influenza delle sollecitazioni nella sezione P di una trave incastrata. (a) Per il momento flettente si pone una cerniera in P si applicano le coppie C_d , si determina l'iperstatica X con la condizione $\int_l (z_1 - z) M dw = 0$ e si trovano le frecce e la rotazione relativa ψ in P . I fattori η/ψ sono riportati in (a') in scala raddoppiata rispetto al disegno. (b) Per il taglio si pone in P la coppia prismatica, si applicano le forze F_d , si determina la iperstatica X con la condizione $\int M dw = 0$ e si trovano le frecce e lo spostamento relativo η_0 in P . (c) Schemi per il tracciamento indiretto.

no riportati in (a') in scala raddoppiata rispetto al disegno. (b) Per il taglio si pone in P la coppia prismatica, si applicano le forze F_d , si determina la iperstatica X con la condizione $\int M dw = 0$ e si trovano le frecce e lo spostamento relativo η_0 in P . (c) Schemi per il tracciamento indiretto.

Quindi la linea d'influenza del taglio nel tratto AP coincide con quella di T_2 (che si ottiene sottraendo 1 ai fattori della fig.106); il tratto fra A e P della linea d'influenza di M si ottiene sommando alle ordinate della linea della fig.105 quelle della linea d'influenza di T_2 moltiplicate per $z_1 - l$. Quando il carico si sposta nel tratto BP il momento flettente e il taglio in P sono dati da

$$T = T_1 \quad , \quad M = M_1 + T_1 z_1$$

Quindi nel tratto BP la linea d'influenza di T coincide con quella di T_1 (fig.106) mentre per quella di M si combinano i grafici di M_1 e T_1 .

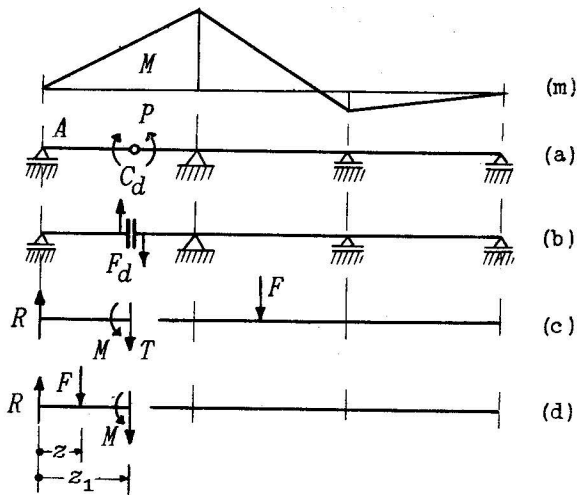


Fig. 108 - (a), (b) Schemi per il tracciamento diretto delle linee d'influenza di M e T in una trave continua. (c), (d) Schemi per il tracciamento indiretto.

Siano da tracciare le linee d'influenza delle sollecitazioni in una sezione P della campata esterna di una trave continua (fig.108). Per il tracciamento diretto si porrà in P una cerniera per trovare il grafico di M e una coppia prismatica per quello di T e si applicano le azioni di distorsione. Il diagramma dei momenti si ottiene risolvendo l'unica iperstatica; esso ha la medesima forma nei due casi (fig.108m). Per il tracciamento indiretto conviene valersi della linea di influenza della reazione R . Finché il carico si trova fuori del tratto AP (fig.108c) sarà $T = R$, $M = Rz_1$: quindi per il tratto oltre P la stessa linea d'influenza di R vale

per T , mentre per il momento M si dovranno moltiplicarne le ordinate per z_1 . Se il carico si sposta nel tratto AP si ha

$$T = R - F \quad , \quad M = Rz_1 - F(z_1 - z) = Fz_1 \left(\frac{R}{F} - \frac{z_1 - z}{z_1} \right)$$

Quindi il tratto AP della linea d'influenza di T si ottiene da quella di R sottraendo l'ordinata 1; per la linea d'influenza di M si dovranno sottrarre i valori $(z_1 - z)/z_1$ e si moltiplicheranno i resti per z_1 .