

CAPITOLO III

TRAVATURE RETICOLARI PIANE EQUILIBRIO DEGLI SFORZI

III.1 - Grado di iperstaticita'. Una trave ad asse rettilineo, destinata a sopportare solo sforzi assiali e' chiamata *asta*. Le *travature reticolari* sono strutture composte da aste; infatti gli elementi che le compongono sono travi diritte, articolate alle estremita' mediante cerniere in punti, detti *nodi*: solo in questi punti agiscono le forze esterne. Si considereranno ora schemi *piani*, per i quali cioe' gli assi di tutte le aste giacciono in un piano.

La definizione formulata presenta uno schema ideale che non e' mai esattamente realizzato in pratica. Le travature che vengono trattate come reticolari hanno in realta' le aste unite nei nodi da reciproci incastri e sono spesso caricate da forze anche agenti fuori dei nodi. Percio' flessione e taglio si accompagnano sempre, in maggiore o minor misura, allo sforzo assiale. Tuttavia la schematizzazione in uso, notevolmente semplificatrice, si dimostra accettabile in pratica. Necessariamente essa implica un certo errore: e' intuibile che questo e' tanto piu' sensibile quanto maggiori siano le dimensioni trasversali delle aste a confronto della loro lunghezza.

Consideriamo uno schema reticolare isolato dal terreno (fig. 38). Per ciascun nodo si possono scrivere due equazioni di equilibrio. Se n sono i nodi, si hanno $2n$ equazioni. Da queste dovranno essere determinati gli sforzi delle aste; inoltre, poiche' i carichi non possono essere fissati del tutto arbitrariamente ma vanno assoggettati a tre condizioni d'equilibrio globale (le quali non sono indipendenti dalle $2n$ menzionate), tre delle forze esterne sono da annoverarsi fra le incognite. Il grado di iperstaticita' e' dunque:

$$h = 3 + a - 2n \quad [31]$$

Per mettere in relazione questa espressione con la [8] si effettui il computo delle cerniere secondo quanto si e' osservato a proposito della fig. 13. Si numerino i nodi da 1 a

n . Se nei nodi $1, 2, \dots, n$ concorrono rispettivamente a_1, a_2, \dots, a_n aste sarà:

$$c = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \dots + (a_n - 1)$$

Poiché ciascuna asta ha due estremità, nel conteggio suindicato ciascuna interverrà due volte; ossia è $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2a$ e quindi $c = 2a - n$. So-

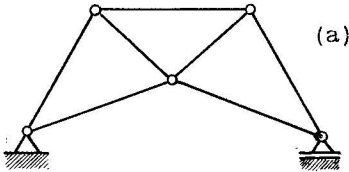
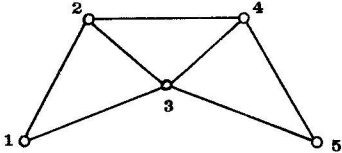


Fig. 38 - Schema reticolare isostatico. Nel conteggio delle cerniere è $a_1 = a_5 = 2$, $a_2 = a_4 = 3$, $a_3 = 4$. Nel caso (a) è $v_1 = 3$.

stituendo nella [8] questo valore di c e ponendovi $m = a$ si ottiene precisamente la [31]. Questa concordanza ci assicura che la relazione [31], dedotta esaminando il grado di iperstaticità sulla base della ipotesi che le aste lavorino a sforzo assiale, vale anche se le aste sono caricate fuori dei nodi. Si noti che, se lo schema si presenta, come quello della fig. 38, costituito a partire da una maglia triangolare per successive aggiunte di un nodo collegato ai precedenti da due

aste, esso è certamente isostatico. Se la struttura è legata al terreno da v_1 vincoli semplici, sarà:

$$h = v_1 + a - 2n \quad [32]$$

poiché, sempre facendo riferimento alla [8], si deve ora incrementare m di 1, mentre i vincoli risultano accresciuti di v_1 . Se la travatura è collegata al terreno da c' cerniere e g appoggi, sarà $v_1 = 2c' + g$. Si osservi che il valore di h ottenuto dalla [31] pensando di staccare la struttura dal terreno può essere negativo, la labilità essendo poi eliminata da un congruo valore di v_1 .

Le considerazioni di questo capitolo si riferiscono al caso in cui sia $h = 0$.

III.2 - Equazioni di equilibrio. La condizione d'equilibrio [1] per la proiezione orizzontale delle forze concorrenti in un nodo K (fig. 39) può scriversi:

$$\sum N_i \cos \alpha_i + F_x = 0 \quad [33]$$

essendo N_i lo sforzo assiale in una delle aste che fanno capo al nodo, α_i l'angolo che con la direzione orizzontale $+x$

fa il vettore che va da K all'altro nodo dell'asta. F_x la componente orizzontale del carico applicato in K ; la somma si estende a tutte le aste concorrenti nel nodo. La [33] si puo' convenientemente porre nella forma [2] ponendo $a_x = 1$, $a_y = a_z = 0$ e scegliendo per il segmento f l'asta stessa; cosi' e':

$$f_x = \bar{x}_i - \bar{x}^K, \quad f_y = \bar{y}_i - \bar{y}^K$$

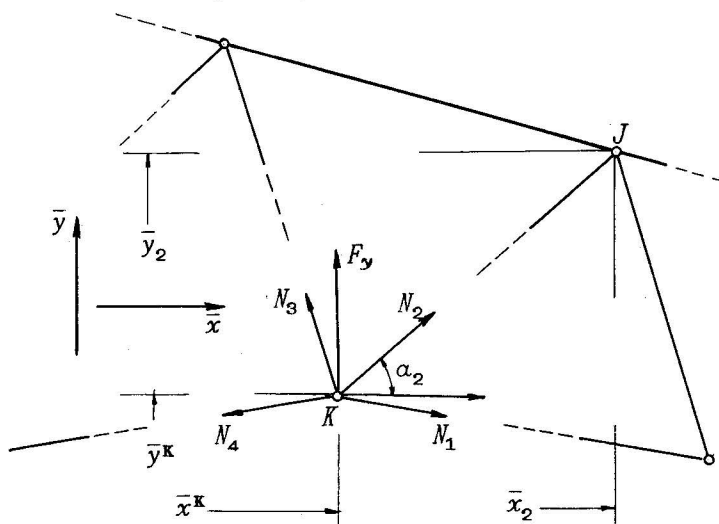


Fig. 39 - Equilibrio del nodo K .

Quindi e' $f = l_i$, lunghezza dell'asta. Poniamo inoltre:

$$N_i/l_i = S_i \quad [34]$$

Si ottiene cosi' dalla [2]

$$\sum S_i (\bar{x}_i - \bar{x}^K) + F_x = 0 \quad [35]$$

Dalla proiezione verticale, per la [2] con $a_y = 1$, $a_x = a_z = 0$, si ha:

$$\sum S_i (\bar{y}_i - \bar{y}^K) + F_y = 0 \quad [36]$$

essendo F_y il carico agente in direzione verticale. Il sistema delle equazioni di equilibrio scritto nella forma delle [35], [36] presenta rispetto alle espressioni [33] il vantaggio che i coefficienti delle incognite sono rapidamente calcolati in funzione delle coordinate cartesiane dei nodi. Dalle quantita' S si passa poi agli sforzi nelle aste mediante la [34]. Si osservi che il calcolo delle lunghezze l_i delle aste e' necessario in ogni caso nelle applicazioni.

Si osservi che nella [35] il coefficiente dell'incognita S_i e' positivo o negativo secondo che percorrendo l'asta dal nodo K al nodo opposto si trovi che la coordinata \bar{x} cresce o diminuisce. Percio' il coefficiente di S_i nelle [35] relative ai due nodi estremi dell'asta i ha valori uguali e opposti. Le condizioni di equilibrio sono scritte in base alla convenzione sui segni positivi di N : si otterranno valori positivi di S (e quindi di N) per le aste tese, che son dette *tiranti*, e negativi per quelle compresse (*puntoni*).

La risoluzione del sistema delle $2n$ equazioni [35], [36] e' certo laboriosa. Pero' assai spesso risulta possibile aggruppare e ordinare le equazioni in modo che siano da risolvere l'uno dopo l'altro, sistemi parziali con un ristretto numero di incognite. In molti casi, come in quello della fig. 40, la risoluzione puo' effettuarsi procedendo da un nodo all'altro in una successione tale che dalle equazioni di equilibrio di ciascun nodo siano da calcolare due soli sforzi incogniti, gli altri che vi compaiono essendo stati determinati in precedenza.

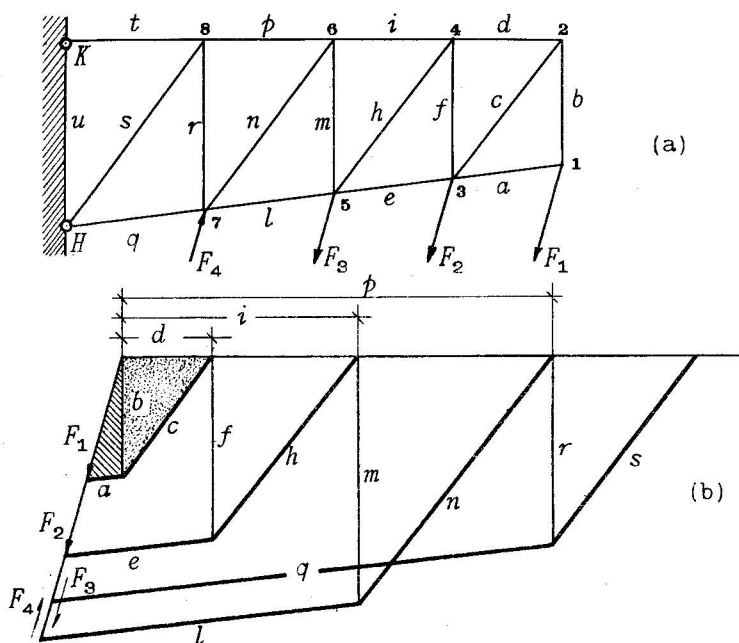


Fig. 40 - (a) Schema reticolare. (b) Relativo cremoniano. La costruzione ha inizio dal nodo 1: la forza F_1 viene scomposta nelle N_a e N_b (triangolo tratteggiato). Si passa al nodo 2 dove N_b e' scomposta in N_c e N_d . Quindi per il nodo 3, la risultante di N_c, N_a e F_2 viene scomposta in N_e e N_f . Cosi' di seguito per i nodi 4, 5, 6, 7, 8.

Se nell'equilibrio di un nodo si trova che la forza trasmessa da un'asta si allontana dal nodo, quell'asta e' un tirante; se la forza va verso il nodo, l'asta e' un puntone. Sul cremoniano gli sforzi nei puntoni sono segnati con tratto ingrossato.

Anche per le travature reticolari potrebbero presentarsi situazioni anomale, da identificare coi metodi indicati nel § II.6. Negli schemi piani e' pero' estremamente improbabile che si incorra in tali situazioni.

III.3 - Diagrammi cremoniani. Piu' rapida che la risoluzione analitica si presenta in generale la determinazione grafica degli sforzi in una travatura reticolare. Si tratta di costruire i poligoni di equilibrio nodo per nodo; poiche' lo sforzo di ciascuna asta interviene in due poligoni di equilibrio, si trova conveniente giustapporre i poligoni in modo che abbiano a due a due un lato in comune. La figura che ne risulta e' detta cremoniano.

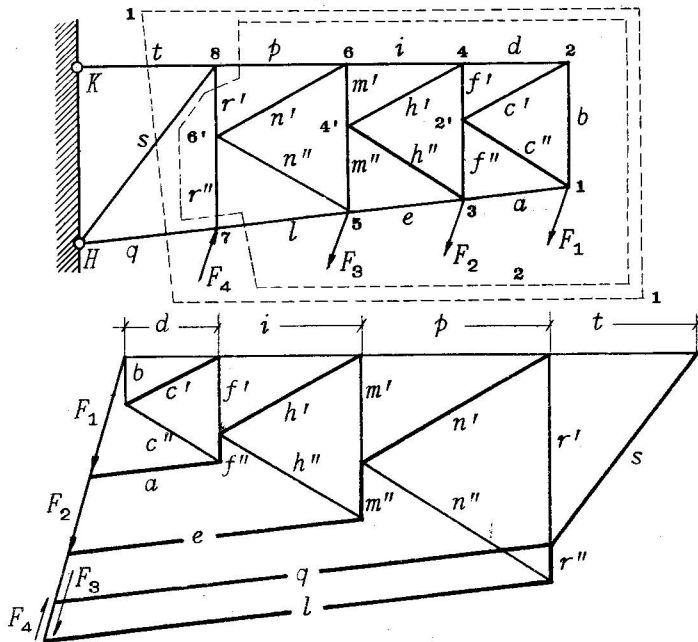


Fig. 41 - Schema reticolare e relativo cremoniano. Si determinano anzitutto N_q , N_s e N_t mediante la sezione di Ritter 1. Poi si risolvono i nodi sull'ordine 8-7-6'-6-5-4'-4-3-2'-2-1.

La costruzione del cremoniano procede secondo lo schema della fig. 40b, sempre che sia possibile ordinare i nodi in una successione tale che, in ciascuno appaiano, oltre a forze precedentemente determinate, due sole forze da calcolare. Il procedimento, in linea generale, ha inizio con la costruzione

del poligono dei carichi e delle reazioni vincolari. Tali forze vengono disposte nell'ordine in cui le si incontra quando si percorra il contorno della travatura in un senso fissato. Si comincia poi a costruire il poligono d'equilibrio di un nodo con due aste; da questo si procede di nodo in nodo cercando sempre di incontrare due sole incognite per nodo. Le forze di ciascun poligono vanno disposte nell'ordine in cui si incontrano le aste omonime quando si giri intorno al nodo nel senso prefissato per tutta la costruzione (orario, nelle figure 40, 41).

Talvolta non si riesce a trovare un nodo dal quale si possa iniziare la costruzione. Questo, ad es., e' il caso della travatura della fig. 41, nella quale non c'e' nodo dove si incontrino meno di tre sforzi incogniti. In questi casi soccorrono i procedimenti indicati nei due paragrafi seguenti.

III.4 - Scelta delle linee di distacco. Le equazioni di equilibrio [35], [36] corrispondono ad una linea di distacco che racchiude il nodo K soltanto. Talvolta puo' essere conveniente tracciare linee di distacco differenti. In particolare, se v'e' modo di tracciarne una che tagli solo tre aste, si potranno determinare gli sforzi in queste dalle condizioni di equilibrio della parte di travatura che cosi' si viene ad isolare. Cosi' nel caso della fig. 41 la punteggiata 1, isolando una parte di struttura soggetta alle forze note F_1, F_2, F_3, F_4 , permette di calcolare direttamente gli sforzi nelle aste q, s, t . Un'equazione di momento intorno al punto 8 da' N_q , una intorno al punto H da' N_t . Se si volesse avere direttamente N_s si dovrebbe scrivere un'equazione di momento intorno al punto di concorso degli assi delle aste t e q ; piu' comodamente, da un'equazione di proiezione in direzione normale a t , se si e' calcolata N_q si puo' trovare N_s .

Siffatte linee di distacco, quando isolino una parte di struttura soggetta a forze tutte note interrompendo tre sole aste sono dette *sezioni di Ritter*; naturalmente gli assi delle tre aste non debbono essere concorrenti, altrimenti la struttura e' difettosa.

Talvolta una linea di distacco puo' portare a risultati conclusivi anche se tronca piu' di tre aste. Cosi' la punteggiata 2 della fig. 41 permette di determinare N_p mediante la equazione dei momenti intorno al punto 7 perche' in questo concorrono gli assi delle altre tre aste troncate l, r', r'' . In certi casi si puo' arrivare alla soluzione mediante due linee di distacco che taglino due quaterne di aste, purché due aste

siano comuni alle due quaterne: se una sezione taglia le aste a, b, c, d , e l'altra taglia le a, b, e, f , scrivendo una equazione di momento intorno al punto di concorso degli assi delle aste c, d e una intorno al punto di concorso delle e, f si hanno due equazioni negli sforzi N_a, N_b dalle quali questi possono essere calcolati.

In generale l'ostacolo alla costruzione di un cremoniano che si presenta quando non si riesce a trovare un nodo con due sole forze incognite viene superato con una sezione di Ritter. Anche durante la costruzione di un cremoniano che non presenti tali difficoltà una sezione di Ritter è utile, potendo servire come controllo atto a correggere eventuali imprecisioni delle costruzioni grafiche.

III.5 - Metodo dell'asta sostituita. Talvolta una travatura di difficile calcolo può essere trasformata in uno schema facilmente risolvibile con un cremoniano quando si sopprima un'asta e si disponga, in sostituzione, un'altra asta o un vincolo addizionale semplice, in posizione opportuna. Sia a l'asta aggiunta, s quella soppressa; nella travatura modificata siano \tilde{N} gli sforzi prodotti dai carichi applicati, N' quelli creati dall'applicazione di una forza U agente con versi opposti fra i nodi che l'asta s collegava. Le espressioni:

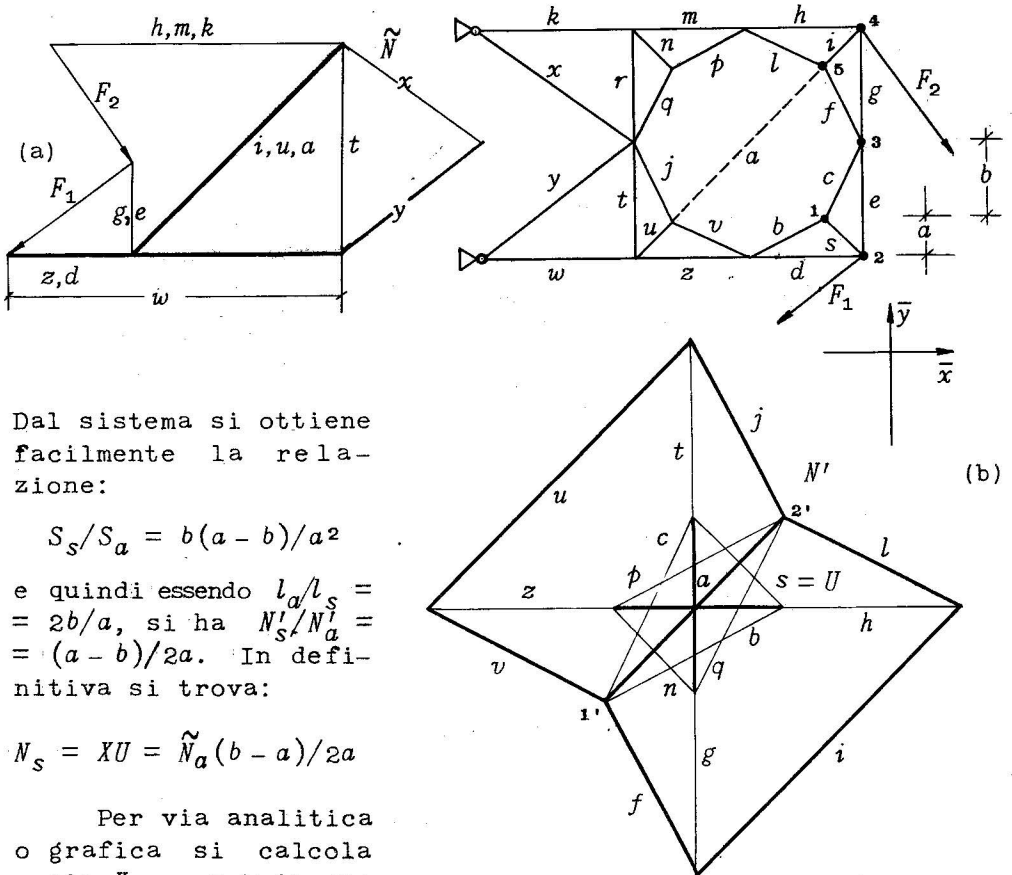
$$N_i = \tilde{N}_i + XN'_i \quad (i = a, b, c, \dots) \quad [37]$$

dove X è un fattore numerico, rappresentano un sistema di sforzi che rispetta in tutti i nodi le condizioni di equilibrio coi carichi esterni, e nei nodi estremi dell'asta s , con le forze XU . Assegnamo il fattore X in modo che per l'asta aggiunta sia $N_a = 0$: la configurazione che così si ottiene fa equilibrio ai carichi applicati e lascia scarica l'asta aggiunta; quindi rappresenta gli sforzi nella struttura originaria. Il valore di X così calcolato posto nella [37] dà la forza N per qualunque asta della travatura: in particolare è $N_s = XU$.

Applicheremo questo procedimento allo schema della fig. 42. La soppressione dell'asta s e l'aggiunta della a tratteggiata riduce la struttura ad uno schema assai semplice nel quale, per le condizioni di carico indicate, risultano scari che le aste $b, c, f, l, p, n, q, j, v$. Il calcolo degli sforzi \tilde{N} si fa quindi facilmente con il cremoniano della fig. 42a. Per il calcolo degli N' si può usare il cremoniano della fig. 42b oppure si può procedere per via analitica mediante le [35], [36].

Queste, scritte per i nodi 1,2,3,4,5 danno le relazioni:

$$\begin{aligned} S_c a + S_s a - S_b b &= 0 = S_c b - S_b a - S_s a \\ S_s a + S_e (a + b) &= 0 \\ -S_c a - S_f a &= 0 = S_f b + S_g (a + b) - S_c b - S_e (a + b) \\ -S_i a - S_g (a + b) &= 0 \\ S_i a + S_f a - S_l b - 2S_a b &= 0 = S_i a + S_l a - S_f b - 2S_a b \end{aligned}$$



Dal sistema si ottiene facilmente la relazione:

$$S_s/S_a = b(a-b)/a^2$$

e quindi essendo $l_a/l_s = 2b/a$, si ha $N'_s/N'_a = (a-b)/2a$. In definitiva si trova:

$$N_s = XU = \tilde{N}_a(b-a)/2a$$

Per via analitica o grafica si calcola così X e quindi gli sforzi risultanti [37].

Fig. 42 - Risoluzione di una travatura col metodo dell'asta sostituita.

III.6 - Travature caricate fuori dei nodi. Il calcolo degli sforzi in una travatura soggetta a forze applicate alle aste in punti qualunque non presenta sostanziali difficoltà se si mantiene ancora l'ipotesi che le aste siano incernierate alle loro estremità, e quindi la struttura si considera isostatica

quando dalla [32] risulti $h = 0$. Il calcolo delle sollecitazioni puo' essere effettuato per sovrapposizione di effetti come indica la fig. 43. L'asta 12 sia caricata da forze aventi per risultante la \vec{F} ; si applichino alle cerniere di estremita' le forze \vec{R}_1, \vec{R}_2 con rette d'azione passanti per un punto a piacere della \vec{F} e tali che sia $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{F} = 0$. Essendo questo sistema di forze in equilibrio, tutte le aste della travatura saranno scariche, ad eccezione della 12, posto che la struttura sia isostatica; la 12 si comportera' come travè e vi si potranno determinare facilmente le sollecitazioni M, N, T . Successivamente si considera la struttura soggetta alle forze $-\vec{R}_1, -\vec{R}_2$: essendo queste applicate nei nodi, la travatura puo' essere calcolata coi procedimenti dei paragrafi precedenti. Infine sovrapponendo gli sforzi trovati nei due casi e considerando che nella sovrapposizione le forze \vec{R}_1, \vec{R}_2 introdotte per artificio di calcolo vengono ad elidersi, si trovano le sollecitazioni nella travatura caricata in punti intermedi fra i nodi.

E' da rilevare che questo procedimento, rigoroso quando si supponga che esistano cerniere nei nodi, non e' perfettamente giustificato nella situazione reale: infatti vengono tenuti in conto momenti flettenti che sono dello stesso ordine di quelli, trascurati, di mutuo incastro fra le aste. Deve percio' intendersi che il calcolo anzidetto degli effetti dei carichi agenti fuori dei nodi fornisce l'ordine di grandezza di questi sforzi addizionali.

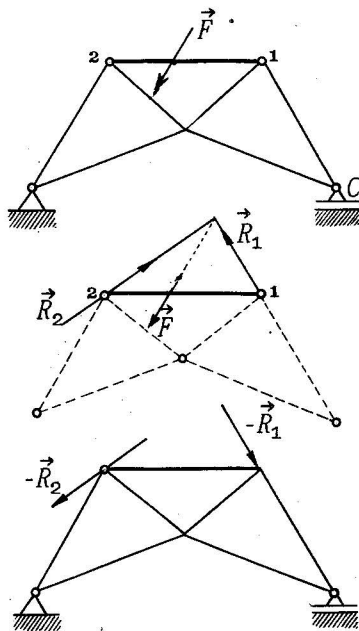


Fig. 43 - Travatura caricata fuori dei nodi.