

## DEFINIZIONI E CONCETTI GENERALI

**I. 1 - L'elemento strutturale "trave".** Le strutture, siano esse parti di un edificio o di una macchina, sono costruzioni destinate a sopportare determinati sistemi di forze. Fra gli elementi resistenti che le costituiscono, quelli classificabili come *travi* hanno particolare importanza per il loro frequente impiego. In particolare, *le travature* sono strutture essenzialmente costituite da travi collegate fra loro in vario modo.

L'elemento strutturale denominato *trave* e', per quanto riguarda la sua forma: un solido generato da una figura piana la quale si sposta *mantenendosi normale alla traiettoria del suo baricentro*, e intanto puo' variare gradualmente di forma *ma mantiene dimensioni piccole* rispetto al raggio di curvatura e allo sviluppo di detta traiettoria. Le successive posizioni della figura generatrice si chiamano *sezioni*, il luogo dei loro baricentri si dice *linea d'asse* della trave.

Fra le proprieta' geometriche della trave e' essenziale che lo sviluppo e i raggi di curvatura della linea d'asse siano grandi rispetto alle dimensioni delle sezioni: e' questa proprieta' che conferisce ai corpi classificabili come travi la caratteristica forma allungata. Dato un elemento strutturale completamente definito da opportune rappresentazioni, riconoscere se esista, e quindi individuare, una linea tale che le condizioni formulate siano verificate, si presenta come problema assai complesso. Pero' in realta' le difficolta' non sono tali quali appaiono: in primo luogo, gli elementi strutturali ai quali va attribuito il carattere di trave presentano una forma la quale rivela chiaramente la legge di generazione, gia' tenuta in mente dal progettista; in secondo luogo, alle restrizioni espresse non e' da annettere valore di assoluto rigore. Di solito, e' facile trovare nel corpo classificabile come trave una linea tale che le dimensioni massime delle sezioni trasversali siano piccole rispetto allo sviluppo della linea stessa. Il luogo  $a_1$  dei baricentri delle sezioni cosi' tracciate generalmente non coincide con la linea di partenza

ma rappresenta tuttavia con buona approssimazione la linea di asse. Si può procedere ad un'ulteriore approssimazione determinando il luogo  $a_2$  dei baricentri delle sezioni normali ad  $a_1$ ; però tale correzione, di solito, è del tutto trascurabile.

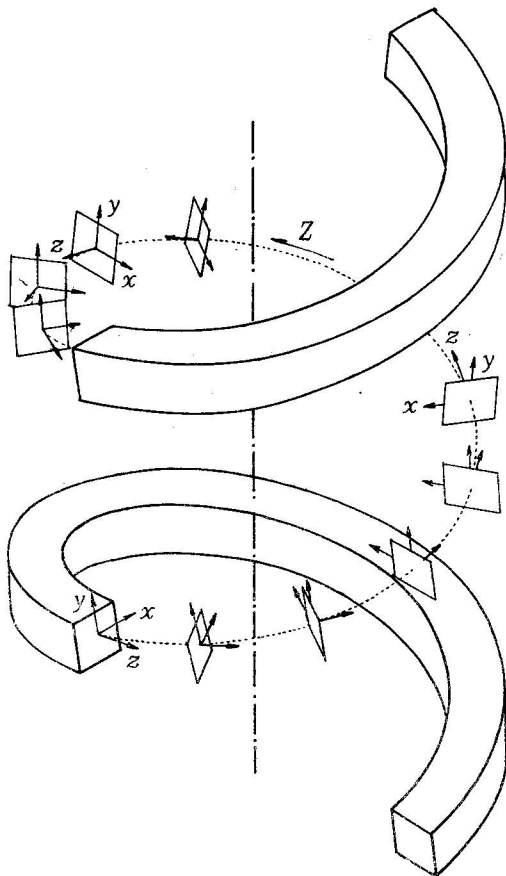
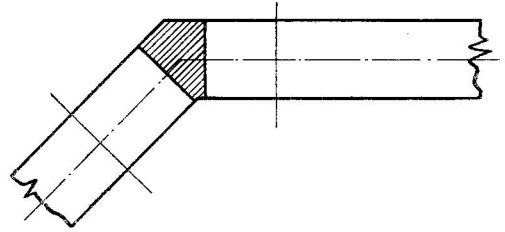


Fig. 1 - Molla a elica a sezione quadrata. In termini geometrici, il solido è generato da un quadrato il cui baricentro percorre un'elica cilindrica mentre gli assi del quadrato paralleli ai lati si dispongono secondo la normale e la binormale all'elica stessa.

Un ferro profilato, con sezione a L (fig.109), a T, o di altra forma, costituisce un esempio tipico di trave, sempre che se ne consideri uno spezzone di lunghezza assai maggiore che le dimensioni delle sezioni. Queste saranno tracciate normalmente agli spigoli longitudinali; il luogo dei loro baricentri dà la linea d'asse. Anche una molla ad elica (fig.1) è tipicamente una trave: non risulta difficile trovare una linea

$a$  (punteggiata in figura) tale che i baricentri delle sezioni normali stiano sulla linea stessa, che è un'elica cilindrica. Per la trave in cemento armato della fig. 2 la costruzione procede senza difficoltà fuori della zona tratteggiata dove, a causa della piegatura, viene violata la condizione che il raggio di curvatura della linea di asse sia grande rispetto alle dimensioni delle sezioni: da quella condizione discende



che la retta d'intersezione di due sezioni adiacenti deve trovarsi lontano dal contorno della sezione; invece nella zona tratteggiata, le sezioni si intersecano all'interno del solido. Perciò presso la piegatura si avrà un elemento che non può considerarsi come un tronco di trave. Lo stesso avviene nella zona tratteggiata presso l'incrocio  $B$  nella struttura della fig. 3. Siffatti elementi che si trovano presso le singolarità della linea d'asse, non hanno carattere di trave; ciononostante il complesso può trattarsi come travatura.

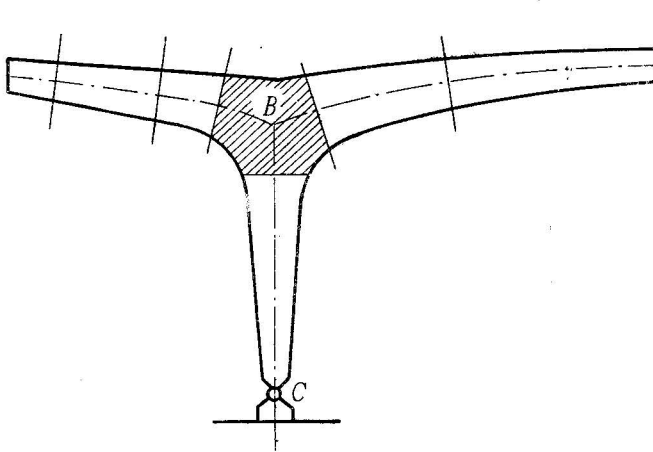


Fig. 3 - Linea d'asse con biforcazione.

Anche nel caso della fig. 4 le condizioni poste nella definizione di trave risultano violate in prossimità delle sezioni  $a$  e  $b$ . Qui si può evitare l'esclusione degli elementi di piegatura tracciando le sezioni tutte fra loro parallele e

rinunciando a soddisfare alla ortogonalità fra sezioni e linea d'asse nel tratto  $a-b$ .

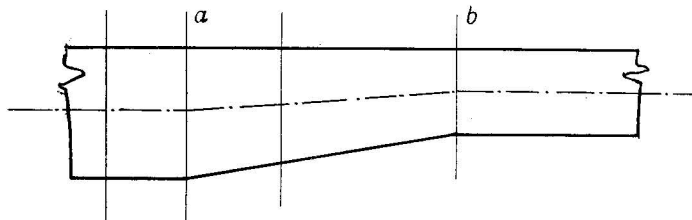


Fig. 4 - Linea d'asse non ortogonale alle sezioni nel tratto  $a-b$ .

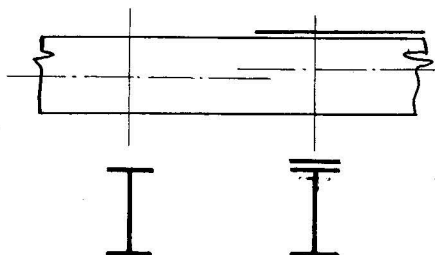


Fig. 5 - Variazione discontinua di sezione.

La condizione di gradualità (\*) per la legge di variazione delle sezioni viene pure talvolta violata (fig. 5): il tratto adiacente alla variazione brusca di sezione non è trattabile come trave.

**1.2 - Le caratteristiche di sollecitazione.** Decidere se un elemento strutturale possa o no considerarsi come trave importa ai fini della determinazione del suo comportamento sotto le azioni che lo sollecitano; affermare che un elemento resistente viene considerato come trave significa accettare le appros-

(\*) Questa può essere così precisata: si considerino due sezioni vicine, che staccano sull'asse un segmento  $\Delta$ ; sia  $r$  la retta d'intersezione dei loro piani; si faccia rotare intorno ad  $r$  una delle sezioni sino a sovrapporla all'altra; la distanza di un punto qualunque su uno dei due contorni dal punto più vicino sull'altro deve essere piccola come  $\Delta$ .

Naturalmente si ha una variazione brusca alle estremità delle travi.

simazioni a cui si va incontro quando si applichino ad esso formule e metodi della *teoria delle travi*. L'applicazione di tale teoria alle strutture reali ha sempre valore di approssimazione. Per questo la definizione sopra enunciata non fissa limiti netti alla denominazione di trave. Così le condizioni poste circa la grandezza del raggio di curvatura della linea d'asse e la gradualità di variazione delle sezioni vanno intese nel senso che il calcolo condotto mediante la teoria delle travi sarà tanto più preciso quanto più la forma del solido si accosti alla cilindrica. Altre limitazioni alla precisione da attendersi dall'uso di quella teoria riguardano la distribuzione delle forze esterne. Di queste limitazioni e degli errori inerenti alle approssimazioni anzidette si può trattare in termini quantitativi quando, completato lo studio di detta teoria, si proceda ad un'analisi più approfondita delle reali condizioni geometriche e di carico.

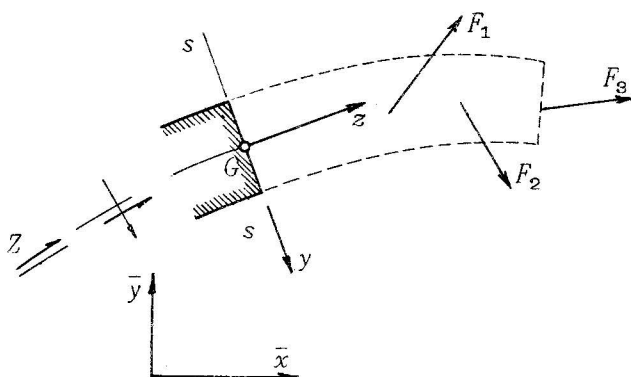


Fig. 6 - Riferimento locale e riferimento generale.

La teoria delle travi ammette che lo stato di sollecitazione presso una data sezione generica dipenda solo dall'azione risultante a cui la sezione è sottoposta. Sia  $s-s$  la traccia del piano della sezione, normale al piano di rappresentazione (fig. 6). Si isoli idealmente la parte di struttura (accennata a tratto in figura) che si trova a un lato della sezione e si considerino tutte le forze  $F$  che su essa agiscono. Si fissino tre assi di riferimento, ad esempio  $y, z$  come segnati in figura e  $x$  normale al piano di rappresentazione. Le proiezioni sui tre assi della risultante delle  $F$  e i momenti risultanti delle stesse  $F$  rispetto ai tre assi caratterizzano l'azione risultante a cui la sezione è sottoposta: queste sei quantità si dicono *caratteristiche di sollecitazione*

della sezione. Secondo la teoria delle travi, la distribuzione delle forze che, nei punti della faccia del taglio praticato dalla sezione, le particelle del tronco segnato a tratto esercitano sulle opposte, dipende unicamente dalle caratteristiche di sollecitazione e non dalla configurazione delle forze  $F$ : qualunque alterazione di quella configurazione che lasci invariate le azioni risultanti e' priva di effetti sulla distribuzione delle forze interne presso la sezione considerata (\*). Dunque, quando si adotti la teoria menzionata, per conoscere le sollecitazioni in qualunque punto delle travi che compongono la travatura, tracciata la relativa linea d'asse, bastera' determinare per ciascun punto di questa linea i valori delle sei caratteristiche di sollecitazione. Si rinvia alla parte seguente l'analisi della distribuzione delle forze interne sulla sezione; lo studio che qui si intraprende si limitera' alla determinazione delle caratteristiche di sollecitazione, che rappresentano forza e momento risultante di tali forze interne, sezione per sezione.

La struttura caricata si deforma: varia cioe' la posizione relativa delle sezioni. Anche la forma delle sezioni in realta' risulta alterata. Pero' gli effetti della deformazione intrinseca delle sezioni non sono valutabili nell'ambito della teoria delle travi. Le considerazioni relative alla deformazione della struttura saranno qui svolte come se le sezioni fossero indeformabili, sulla base di relazioni che fanno dipendere la deformazione di un tronco elementare di trave dalle caratteristiche della sollecitazione a cui l'elemento e' sottoposto.

**I.3 - Riferimenti e notazioni generali.** Il calcolo di un aggregato di travi (travatura) viene svolto sulla base del tracciato del suo "scheletro", la linea d'asse. Questa puo' essere una curva piana o sghemba, aperta o chiusa e anche dotata di punti singolari (angolosi o di ramificazione) presso i quali si presenta, come s'e' detto, un tratto non calcolabile come trave. Fuori dei punti singolari sara' ben definita la giacitura della sezione, normale alla linea d'asse. Nel piano della sezione si fissano gli assi ortogonali  $x, y$  con origine nel baricentro; l'asse  $z$  si dispone normale alla sezione.

---

(\*) Ad esempio, posto che le forze  $F_1, F_2, F_3$  della fig. 6 siano complanari, si potra' trovarne la risultante e sostituire questa alle 3 forze: le sollecitazioni nella sezione  $s-s$  non muteranno.

Questa terna rappresenta un riferimento *locale*, che di regola vale per il calcolo relativo alla sezione dove esso ha origine. Inoltre si potrà stabilire una terna *generale*  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  di assi ortogonali. Non si pongono condizioni circa la scelta delle terne locali, che potranno essere destrorse o sinistrorse.

Si indica con  $Z$  la coordinata misurata lungo la linea d'asse della travatura;  $dZ$  e' l'elemento di lunghezza della linea d'asse. Se questa e' composta di piu' rami che si uniscono negli incroci, si potrà per ciascuno fissare a piacere il verso e l'origine per misurare la coordinata curvilinea  $Z$ . In un tratto in cui la linea d'asse e' dritta si potrà far coincidere la coordinata  $Z$  con la  $z$  del riferimento locale per una delle sezioni del tronco. Il senso crescente della coordinata  $Z$  sara' indicato con una freccia adiacente alla linea d'asse; tale senso coincidera' con quello dell'asse  $z$  presso ciascuna sezione. Quando uno degli assi  $x$  o  $y$  sia parallelo al piano di rappresentazione se ne indichera' il verso positivo con una freccia segnata trasversalmente alla linea di asse (fig. 6). In base al verso della coordinata  $Z$ , per ogni sezione resta individuata una *faccia positiva* e una *negativa*: diremo positiva la faccia volta verso le  $z, Z$  crescenti, negativa la opposta, ossia quella che delimita il tratto  $z > 0$  (\*).

Nel presente calcolo non si tiene conto delle sollecitazioni locali che derivano dalla distribuzione delle forze applicate ai punti delle sezioni caricate. Di queste forze bastera' conoscere la risultante ed il momento risultante rispetto al baricentro  $G$  della sezione: si dira' che quella forza e quel momento sono applicati al punto  $G$ . Si noti che in realta' i carichi non sono mai applicati ai punti di una sola sezione, ma si distribuiscono su un certo tronco di trave. Tuttavia spesso, quando tale tronco e' corto, per comodita' si usa considerare forza e momento risultante come concentrati in un punto della linea d'asse.

Oltre al punto di applicazione di una data forza  $F$  si dovra' dare direzione, intensita' e senso. E' opportuno che questi dati vengano definiti con l'aiuto di rappresentazioni grafiche: quando piu' forze siano parallele ad un piano, converra' assumere questo come piano di rappresentazione. In ogni caso si rappresentera' la retta d'azione della forza, si segnara' su questa la freccia indicante il verso positivo *convenzionale* e

---

(\*) Nella fig. 1 gli assi  $x, y$  sono segnati su varie sezioni sulla faccia positiva, come se sulla faccia negativa non trasparissero. Nella figura 6 la faccia positiva della sezione e' segnata a tratto pieno.

il simbolo presso la freccia. Il simbolo con cui si designa una forza va inteso come quantità algebrica, suscettibile di assumere valori positivi o negativi: il verso convenzionale è

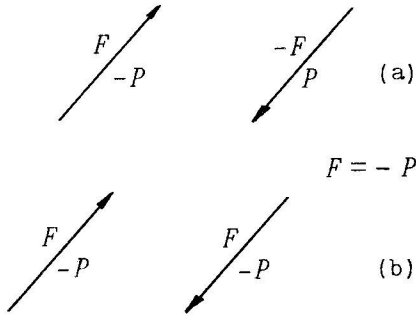


Fig. 7 - (a) forze di versi concordi;  
(b) forze opposte.

quello in cui agirebbe la forza se il suo valore fosse positivo. Questi versi convenzionali sono fissati ad arbitrio, indipendentemente dalla situazione reale. Può accadere che si debba segnalare che una data forza in una certa situazione viene ad avere verso contrario a quello della convenzione adottata previamente. Allora si potrà invertire il senso della freccia e si segna accanto il simbolo con segno -; o meglio, si introduce un nuovo simbolo di segno opposto e si scrive questo presso la freccia invertita (fig. 7) (\*).

Per le coppie, quando non si potrà usare una rappresentazione di maggiore evidenza, si adotterà quella vettoriale della Meccanica. Si ricordi che il vettore rappresentativo di una coppia ha direzione normale al piano che contiene la coppia stessa e senso dipendente da quello degli assi di riferimento; portato il piano  $\bar{x}\bar{y}$  a coincidere con quello della coppia in modo che questa operi nel senso che porta l'asse  $+\bar{x}$  a sovrapporsi a  $+\bar{y}$ , la direzione dell'asse  $+\bar{z}$  sarà quella del vettore che rappresenta la coppia. Se la coppia è designata dal suo valore algebrico, si intenderà che questo sia positivo quando la coppia agisce nel senso specificato dalla relativa freccia, definita come s'è

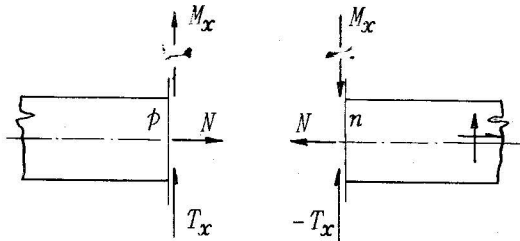


Fig. 8 - Forze e coppie interne fra le facce positiva  $p$  e negativa  $n$  di una sezione.

(\*). La freccia segnata nella rappresentazione indica il versore che va moltiplicato per il valore algebrico del simbolo segnato accanto per individuare la forza. Se invece si usa il simbolo vettoriale  $\vec{F}$ , questo indica in se' completamente la forza: la forza opposta sarà designata da  $-\vec{F}$ ; questo simbolo sarà posto presso la freccia invertita.



detto in base alla terna generale  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ . Per maggior chiarezza, intorno al vettore che rappresenta una coppia conviene segnare una freccia curva che indichi il verso in cui questa agisce.

Secondo la notazione suindicata, le forze e le coppie che si trasmettono fra le facce opposte di una sezione sono rappresentate con versi opposti delle frecce ma col medesimo simbolo (fig.8 forze  $N$  e coppie  $M_x$ ) oppure con lo stesso verso per le due frecce e il simbolo col segno invertito (fig.8, forze  $T_x$ ).

**1.4 - Le equazioni di equilibrio.** Strumento essenziale nel calcolo delle sollecitazioni in una struttura sono le equazioni di equilibrio. Esse possono essere scritte in varie forme:

a) **Equazioni di proiezione.** L'espressione del tutto generale di un'equazione di proiezione, o di equilibrio alla traslazione, si può scrivere:

$$\sum F \cos \alpha = 0 \quad [1]$$

essendo la somma estesa a tutte le forze  $F$  del sistema e per ciascuna  $\alpha$  essendo l'angolo compreso fra la direzione positiva di  $F$  e quella su cui si proietta. In una situazione assolutamente generale non è un'operazione geometrica semplice determinare  $\alpha$ ; conviene piuttosto valersi di un'espressione che si deduce dalla relazione  $\vec{a} \cdot \sum \vec{F} = 0$  equivalente alla [1], essendo  $\vec{a}$  un vettore avente per direzione quella di proiezione. Dette  $a_x, a_y, a_z$  le componenti di  $\vec{a}$  sugli assi  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  e dette  $f_x, f_y, f_z$  le proiezioni sugli stessi assi di un segmento scelto a piacere nella direzione e nel verso convenzionale di  $F$ , detta  $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$  la lunghezza di questo segmento, si può porre la [1] nella forma:

$$\sum (a_x f_x + a_y f_y + a_z f_z) F / f = 0 \quad [2]$$

In particolare, per proiettare le forze sull'asse  $\bar{x}$ , si potrà scrivere la [2] con  $a_x = 1, a_y = a_z = 0$ .

b) **Equazioni di momento.** Si deve ricordare che i momenti rispetto ad un asse si ottengono proiettando i vettori momento sull'asse. Quindi, indicando con  $\vec{a}$  il vettore orientato secondo l'asse, con  $\vec{b}$  un vettore che va da un punto di tale retta ad un punto della retta d'azione della  $F$ , con  $\vec{C}$  il vettore della coppia generica, l'equazione di momento si scrive

$$\vec{a} \cdot (\sum \vec{b} \times \vec{F} + \sum \vec{C}) = 0.$$

Per le applicazioni conviene porre questa relazione nella forma:

$$\Sigma \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} F/f + \Sigma (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) C/c = 0 \quad [3]$$

La prima sommatoria, contenente i determinanti che esprimono i prodotti misti della relazione vettoriale, si estende a tutte le forze del sistema; la seconda a tutte le coppie:  $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z; f_x, f_y, f_z; c_x, c_y, c_z$ , sono rispettivamente le componenti dei vettori  $\vec{a}, \vec{b}$ , di un vettore disteso secondo  $F$  (di lunghezza  $f$ ) e di un vettore secondo la direzione e il verso  $C$ , di lunghezza  $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$ .

Particolari scelte dei vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  possono semplificare notevolmente il calcolo della [3].

c) **Equazioni degli spostamenti virtuali.** Con l'uso dell'equazione dei lavori virtuali si possono avere espressioni particolarmente semplici per le condizioni d'equilibrio, come si vedrà nelle applicazioni.

Le condizioni d'equilibrio per un sistema generico di forze e coppie possono essere espresse scrivendo tre equazioni del tipo [2] e tre del tipo [3]: ad esempio, proiezioni su tre assi ortogonali e momenti rispetto ai medesimi. Si potrebbero fare altre scelte: ad esempio si potrebbero scrivere sei equazioni di momento. Si deve però sempre badare che le sei equazioni siano fra loro indipendenti, ossia che nessuna di esse sia conseguenza delle altre. Tale eventualità è sicuramente esclusa se le equazioni si scrivono come prima s'è detto.

La scrittura di qualunque equazione di equilibrio a) o b) deve sempre essere preceduta da una operazione ideale: si deve *isolare* la parte di struttura della quale si intende esaminare l'equilibrio; si devono cioè porre in evidenza le forze o coppie che a questa parte sono trasmesse attraverso i vincoli che la uniscono al resto della struttura o al terreno. In particolare, ad esempio, se per isolare la parte in esame si deve tagliare una trave in una certa sezione, si dovranno introdurre le sei caratteristiche di sollecitazione relative alla sezione tagliata. Le forze e le coppie che attraverso i vincoli troncati si esercitano sulla porzione considerata si uniranno alle forze o coppie esterne aventi punti di applicazione compresi nella porzione stessa per introdurle nelle equazioni [2] e [3]. Ciascuna di queste forze e coppie dovrà essere definita chiaramente da un valore algebrico (dato nume-

ricamente o indicato simbolicamente) come e' detto nel paragrafo precedente. Naturalmente nelle [2] o [3] non entreranno le forze interne che si esercitano fra punti della porzione di struttura in esame. Interverranno d'altra parte le eventuali forze di inerzia, per le quali percio' si dovra' aver definito lo stato di accelerazione delle masse comprese nella parte in esame. Sulle forze e le coppie del sistema individuato si potranno eseguire le operazioni di trasformazione (composizioni, scomposizioni, riduzioni a sistemi equivalenti) che la statica insegna, qualora con cio' si voglia semplificare la successiva scrittura e l'uso delle equazioni di equilibrio.

Considerazioni atte a semplificare l'applicazione delle [2], [3] si vedranno in casi specifici.

**I.5 - Sovrapposizione degli effetti.** Se le quantita'  $V_1, \dots, V_n$  sono legate da relazioni lineari del tipo:

$$a_{i1}V_1 + \dots + a_{in}V_n = 0 \quad [4]$$

essendo  $i = 1, \dots, m$  ed essendo  $a_{i1}, \dots, a_{in}$  fattori che non dipendono dalle  $V$ , vale il principio di sovrapposizione: se due sistemi di valori  $V_1', \dots, V_n'$  e  $V_1'', \dots, V_n''$  soddisfano alle equazioni [4], anche la combinazione:

$$V_1 = AV_1' + BV_1'', \dots, V_n = AV_n' + BV_n'' \quad [5]$$

soddisfa alle [4], essendo  $A, B$  costanti qualunque (\*). La proprieta' vale anche se le equazioni [4] sono di tipo differenziale, ossia se le quantita'  $V$  sono funzioni di una variabile indipendente  $x$  e gli addendi della [4] sono del tipo  $a_{in}dV_n/dx$ , sempre che anche le condizioni ai limiti siano di tipo lineare.

Per maggior generalita', nel considerare le conseguenze della relazione [4] non si e' specificato se alcune delle  $V$  siano da considerare come dati, altre come incognite del problema che si presenta. L'applicazione ai casi specifici resta pero' immediata: occorrera' controllare che tutte le equazioni necessarie a specificare le incognite di un dato problema siano di tipo lineare; allora, ottenute due soluzioni del problema in questione si potranno sommare tutti i dati della prima

---

(\*) Infatti e'  $a_{i1}(AV_1' + BV_1'') + \dots + a_{in}(AV_n' + BV_n'') = A(a_{i1}V_1' + \dots + a_{in}V_n') + B(a_{i1}V_1'' + \dots + a_{in}V_n'')$ . Le somme in parentesi nell'ultima espressione sono nulle per ipotesi: quindi le  $V$  espresse dalle [5] verificano le [4].

a quelli della seconda, moltiplicati rispettivamente per fattori  $A, B$ ; la soluzione sara' ottenuta sommando i risultati della prima a quelli della seconda moltiplicati per quei due stessi fattori.

Supponiamo che la determinazione delle sollecitazioni in una struttura possa essere effettuata in base alle sole equazioni [2], [3], nelle quali interverranno carichi e caratteristiche di sollecitazione al posto delle quantita'  $F$  e  $C$ . Queste relazioni sono di tipo lineare, *posto* che i coefficienti  $a, b, c, f$ , non dipendano dagli sforzi, ossia, supposto che non si producano deformazioni tali da alterare sensibilmente la geometria della struttura. Allora varra' il principio di sovrapposizione: se un sistema di carichi  $F'$  produce certi sforzi  $N'$  e un sistema di carichi  $F''$  produce sforzi  $N''$ , saranno  $AN' + BN''$  gli sforzi prodotti dai carichi  $AF' + BF''$ . Questa proprieta' e' estremamente utile, come e' facile intuire: essa permette di ottenere la soluzione per una situazione complessa combinando i risultati ottenuti in situazioni semplici. Occorre pero', come s'e' detto, che l'intero sistema sia di tipo lineare; cio' dovra' essere constatato in ogni caso specifico.

**I.6 - Proprieta' di simmetria.** Si considerera' la simmetria rispetto ad un piano; sia esso normale al piano di proiezione, fig. 9, e sia  $s-s$  la sua traccia. Due punti  $P, P'$  sono simmetrici se situati sulla stessa normale al piano di simmetria, a uguale distanza da esso, dalle due parti. Due rette saranno simmetriche se passano per due punti simmetrici e si incontrano (al finito o all'infinito) in un punto del piano. Una struttura sara' da considerare simmetrica agli effetti di un determinato problema se i parametri in gioco relativi a punti simmetrici hanno lo stesso valore. Quindi ad esempio, se in un dato problema interverra' solo la geometria relativa alla linea d'asse di una travatura, questa sara' da considerare simmetrica purché la linea d'asse sia simmetrica. Se nel problema interverranno anche le dimensioni degli elementi strutturali o le proprieta' fisiche di essi, occorrera' che gli elementi simmetricamente ubicati ai due lati del piano abbiano uguali le dimensioni o le proprieta' fisiche in questione.

Perche' due forze siano simmetriche, occorre che i loro punti di applicazione, le loro rette d'azione e i loro versi siano simmetrici (ossia che le due frecce siano disposte come immagini speculari (fig. 9a). La condizione e' differente per i vettori momento delle coppie. Si considerino due coppie di

forze simmetriche, normali al piano di rappresentazione; le loro tracce sono indicate presso i simboli  $\pm F_1$ , il verso di  $+F_1$  essendo rivolto dall'osservatore verso il disegno. Nello stesso senso sia volto l'asse  $\bar{x}$ , gli assi  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  essendo paralleli alla figura. E' facile constatare che i vettori momento delle due coppie  $C_1$  hanno direzione simmetrica; ma l'uno ha verso opposto a quello dell'immagine speculare dell'altro. Questa proprieta' e' del tutto generale: coppie simmetriche hanno vettori momento ciascuno opposto all'immagine dell'altro.

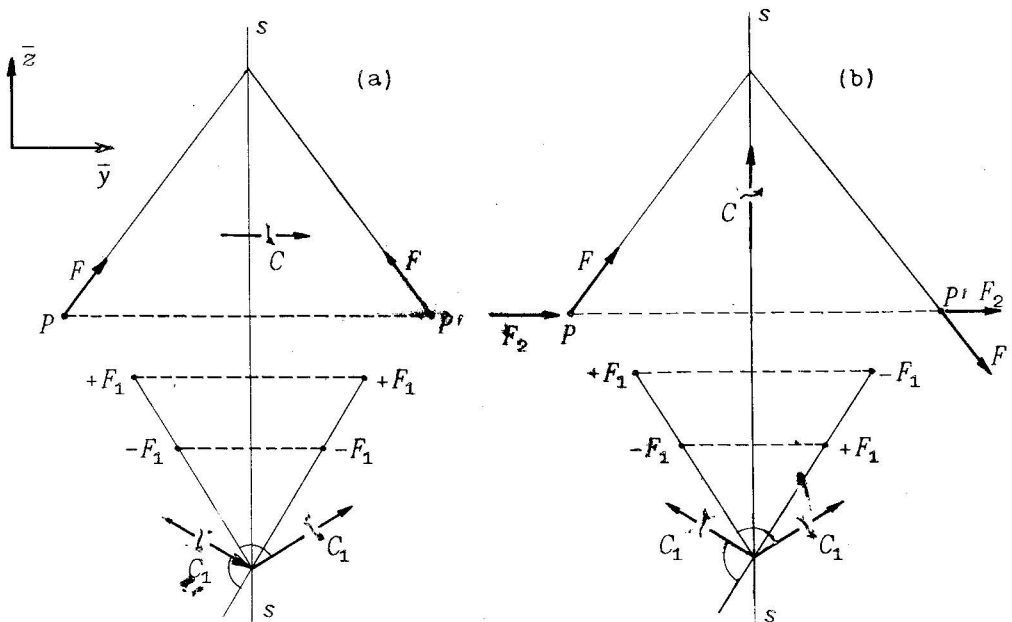


Fig. 9 - (a) Sistema di forze simmetrico. (b) Sistema antisimmetrico.

Diciamo antisimmetriche due forze se i loro punti d'applicazione sono simmetrici mentre le loro frecce sono volte ciascuna in senso opposto all'immagine dell'altra (fig. 9b). In particolare due forze  $F_2$  applicate a punti simmetrici e agenti lungo una stessa normale al piano di simmetria nello stesso verso, sono antisimmetriche l'una dell'altra. Due coppie antisimmetriche hanno i vettori momento simmetrici rispetto al piano di simmetria. Applicando ad un punto situato sul piano di simmetria una forza normale a questo piano o una coppia con vettore momento parallelo al piano stesso si crea un carico antisimmetrico.

Diciamo che uno stato di sollecitazione e' simmetrico se

nelle sezioni simmetriche le caratteristiche di sollecitazione sono simmetriche; diciamo che e' antimitrico se quelle caratteristiche sono antimitriche. Se il sistema delle equazioni che definiscono le sollecitazioni e' lineare si puo' affermare che in una struttura simmetrica un sistema di carichi (forze e coppie) simmetrici produce una sollecitazione simmetrica, mentre carichi antimitrici producono sollecitazioni antimitriche (\*). In particolare, se una sezione della travatura giace sul piano di simmetria, in condizioni simmetriche di carico vi si annulleranno tutte le caratteristiche di sollecitazione antimitriche: ossia sara' nullo il momento, rispetto a qualunque asse del piano, delle sollecitazioni nella sezione. In condizioni antimitriche di carico, saranno nulle le caratteristiche simmetriche: ossia sara' nullo il momento rispetto a qualunque asse normale al piano.

---

(\*) Se il problema non e' lineare, oltre alla soluzione simmetrica, in condizioni simmetriche di carico, possono esistere configurazioni antimitriche e viceversa.