

## CAPITOLO VI

### SFORZO NORMALE E FLESSIONE

**VI.1 - Considerazioni generali.** Fra gli stati di tensione che si ottengono come soluzioni particolari del problema di St. Venant, sono di calcolo immediata quelli in cui manca la tensione tangenziale  $\vec{\tau}$ . Anche se nelle applicazioni si presentano di rado condizioni di sollecitazione che propriamente rientrino in questa categoria, tuttavia l'esame di questi casi riveste particolare importanza perché il calcolo, estremamente semplice, delle tensioni e deformazioni che in essi si riscontrano fornisce i dati di maggior rilievo per le applicazioni della teoria.

Essendo il vettore  $\vec{\tau}$  nullo su tutta la sezione, per le [66]-[68] debbono essere nulle le azioni risultanti  $T_x, T_y, M_z$ . Le tensioni  $\sigma_z$  hanno su tutte le sezioni la medesima distribuzione, secondo la [50] che dà  $\partial\sigma_z/\partial z = 0$ ; i momenti  $M_x, M_y$  sono quindi costanti come  $N$ . Dei fattori  $k$  della teoria generale sono qui nulli  $k_1^\circ, k_2^\circ$  e  $k_3$ .

Poiché  $\tau_x = 0$ , si ha

$$\partial u/\partial z + \partial w/\partial x = 0$$

Derivando rispetto a  $x$  e considerando che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

si deduce che  $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ . Poiché  $x$  non è una direzione privilegiata si conclude che gli spostamenti  $w$  avranno andamento lineare lungo qualunque retta della sezione: quindi questa si mantiene piana.

**VI.2 - Casi particolari.** a) Sforzo assiale. Consideriamo il caso nel quale solo  $k_0$  sia diverso da zero fra i valori  $k$ . Per le [64], [65] e [69] risulta  $M_x = M_y = 0$ , mentre dalle [54] e [70] si ha

$$\sigma_z = k_0 = \frac{N}{A}, \quad \epsilon_z = \frac{N}{EA} \quad [74] [75]$$

Dunque il solido è soggetto ad una forza agente secondo il suo asse baricentrico. Secondo le convenzioni adottate, la forza normale  $N$  è positiva o negativa secondo che si tratti di trazione o compressione. Tutte le fibre longitudinali del corpo subiscono la medesima tensione e la medesima dilatazione. Anche le dilatazioni trasversali  $\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu\epsilon_z$  presentano lo stesso valore su tutta la sezione: questa quindi si contrae o si dilata omoteticamente secondo che il corpo sia teso o compresso.

Poiché  $\epsilon_z = \partial w / \partial z$ , se fissiamo il corpo in modo che sia  $w = 0$  per  $z = 0$ , lo spostamento normale sulla sezione  $z$  sarà

$$w = Nz/EA \quad [76]$$

**b) Flessione deviata.** Supponiamo ora che sia  $k_0 = k_1 = 0$  e quindi  $\sigma_z = k_2 y$ . Tensioni e dilatazioni saranno proporzionali alla distanza dall'asse  $x$  che in questo caso è la retta sulla quale  $\sigma_z = 0$  (*asse neutro*). Sostituendo l'espressione di  $\sigma_z$  nelle [63], [64] e [65] e indicando con  $M_x^*$ ,  $M_y^{**}$  i momenti che si ottengono, si ha

$$N = 0, \quad M_x^* = k_2 J_x, \quad M_y^{**} = k_2 J_{xy} \quad [77]$$

essendo

$$J_x = \int y^2 dA, \quad J_{xy} = \int xy dA$$

Conseguentemente, posto  $j_x = J_{xy}/J_x$ , si ottiene

$$\sigma_z = \frac{M_x^*}{J_x} y, \quad M_y^{**} = j_x M_x^* \quad [78'] [78'']$$

Dunque la sezione è soggetta ad una coppia giacente in un piano parallelo a  $z$ , che fa con l'asse  $y$  un angolo di tangente  $j_x$ : si chiama piano di sollecitazione il piano per l'asse della trave contenente la coppia; la sua traccia  $s_1$  viene determinata facilmente con la costruzione della fig. 28.

Esaminiamo ora gli spostamenti che si producono in questa situazione. Si supponga anzitutto che il coefficiente di Poisson  $\nu$  sia nullo. La forma delle sezioni resta allora inalterata e potremo supporre che tutti i punti della sezione  $z = 0$  restino fissi. Quindi dalla

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

si hanno gli spostamenti  $w$  sulla generica sezione  $z$

$$w = \frac{M_x^*}{EJ_x} yz = \frac{yz}{r} \quad [79]$$

dove si è posto  $1/r = M_x^*/EJ_x$ . Dunque le sezioni si intersecano sulla retta  $y = -r$  (dove risulta  $w = -z$ ), parallela all'asse neutro  $x$ , rotando dell'angolo  $\varphi = z/r$ . Dalle identità  $\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$  e dalla [79], si ottiene per gli spostamenti  $u, v$  nel piano della sezione

$$\partial u / \partial z = - \partial w / \partial x = 0 \quad [80]$$

$$\partial v / \partial z = - \partial w / \partial y = - z/r \quad [81]$$

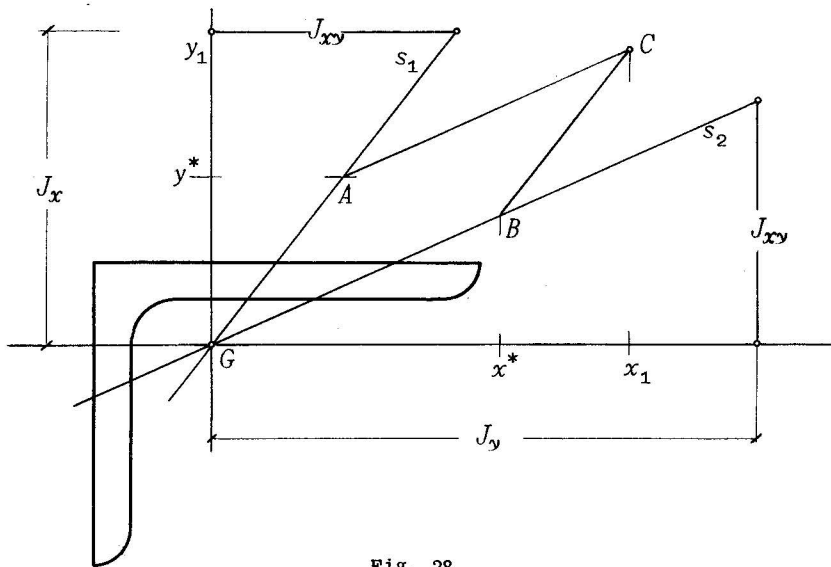


Fig. 28

Tenendo conto che la sezione  $z = 0$  non si sposta, si ha  $u = 0, v = -z^2/2r$ . Dunque le sezioni si spostano in direzione normale all'asse neutro; le fibre longitudinali si deformano secondo archi di parabola (nell'ambito delle piccole deformazioni non distinguibili da archi di cerchio) si da mantenersi normali alle sezioni:  $1/r$  è la curvatura assunta dalla linea d'asse. Reciprocamente, se si deforma la trave in modo da farle assumere una curvatura  $1/r$  nel piano  $yz$ , essa reagisce con una coppia  $EJ_x/r$  nel piano  $yz$  ed una coppia  $EJ_{xy}/r$  nel piano  $xz$ : le fibre longitudinali subiscono dilatazioni  $y/r$  e tensioni  $Ey/r$ .

Gli effetti della contrazione trasversale deformano le sezioni, tutte allo stesso modo poiché  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , come  $\sigma_z$ , non dipendono da  $z$ . Le rette normali all'asse neutro si trasformano in un fascio convergente nel punto di ordinata  $r/v$ ,

le parallele all'asse in archi di cerchio con centro in quel punto (\*) (fig.29).

La situazione che si produce per  $k_0 = k_2 = 0$  e quindi  $\sigma_z = k_1 x$  si deduce dal calcolo precedente scambiando gli assi. I momenti flettenti in questo caso sono

$$M_y^* = k_1 J_y, \quad M_x^{**} = j_y M_y^* \quad [82]$$

essendo

$$j_y = J_{xy}/J_y, \quad J_y = \int x^2 dA$$

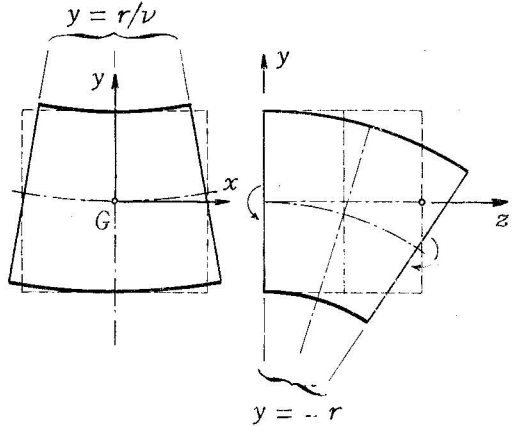


Fig. 29

Il piano di sollecitazione in questo caso è rappresentato dalla retta  $s_2$  della fig.28.

La situazione che si produce quando la coppia flettente giaccia in un piano generico si può dedurre dai due casi precedenti per sovrapposizione di effetti. Se  $M_x$  e  $M_y$  sono i momenti flettenti rispetto a  $x$  e  $y$  si dovrà scrivere

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^* + M_x^{**} = M_x^* + j_y M_y^* \\ M_y &= M_y^* + M_y^{**} = M_y^* + j_x M_x^* \end{aligned} \quad [83]$$

Quindi, risolvendo, si ottiene

$$\begin{aligned} M_x^* &= (M_x - j_y M_y) / (1 - j_x j_y) \\ M_y^* &= (M_y - j_x M_x) / (1 - j_x j_y) \end{aligned} \quad [84]$$

Le tensioni risultanti quando coesista anche sforzo nor-

(\*) Dalle  $\partial u/\partial x = -vy/r = \partial v/\partial y$  si ha  $u = -vyx/r + f_1$ ,  $v = -vy^2/2r + f_2$  essendo  $f_1$  e  $f_2$  funzioni rispettivamente di  $y$  e  $x$ . Dalla  $\gamma_{xy} = 0$  si ha

$$df_1/dy = -df_2/dx + vx/r$$

Perché l'eguaglianza sussista per ogni valore di  $x$  e  $y$  le espressioni ai due membri debbono essere costanti. Quindi, posto che nel baricentro  $x = y = 0$  sia  $u = v = \partial u/\partial y = 0$  si ha  $u = -vyx/r$ . La condizione  $u = -x$  è verificata per  $y = r/v$ : in tale punto convergono le verticali. Le orizzontali si deformano come traiettorie ortogonali a questo fascio di rette, poiché  $\gamma_{xy} = 0$ .

male sono date da

$$\sigma_z = \frac{M_y^*}{J_y} x + \frac{M_x^*}{J_x} y + \frac{N}{A} \quad [85]$$

La linea d'asse nelle proiezioni sui piani  $yz$  e  $xz$  assume le curvatures  $M_x^*/EJ_x$  e  $M_y^*/EJ_y$ : gli spostamenti relativi si sommano vettorialmente ed individuano il *piano di inflessione* normale all'asse neutro.

**c) Flessione retta.** Se  $x, y$  sono assi principali d'inerzia della sezione, ossia se  $J_{xy} = 0$ , si hanno alcune semplificazioni. Essendo  $j_x = j_y = 0$  risulta  $M_x^* = M_x$ ,  $M_y^* = M_y$ . Allora, se la coppia applicata giace nel piano  $yz$  il piano di inflessione coincide col piano di sollecitazione e l'asse neutro si dispone normale al piano della coppia. Così avviene anche se la coppia sta nel piano  $xz$ . La sollecitazione in ambo i casi si dice *flessione retta*. Nel riferimento ad assi principali le curvatures sono espresse da  $M_x/EJ_x$  e  $M_y/EJ_y$ . Gli spostamenti vanno composti, per la flessione deviata, come nel riferimento ad assi non principali. Si osservi che l'asse neutro, normale al piano di sollecitazione se  $J_x = J_y$ , si accosta all'asse di minore momento d'inerzia se  $J_x \neq J_y$ .

**d) Sforzo normale eccentrico.** Il caso più generale, in cui coesistano le sollecitazioni  $N, M_x$  e  $M_y$ , e' prodotto dalla applicazione di una forza normale al piano della sezione, passante per un punto  $C$  che si dice *centro di sollecitazione* (fig.28). La forza ivi applicata, uguale alla risultante delle tensioni sulla sezione, costituisce lo sforzo normale  $N$ . Perciò, se  $x_1, y_1$  sono le coordinate di  $C$  sarà

$$M_x = Ny_1, \quad M_y = Nx_1 \quad [86]$$

Questi valori sostituiti nelle [84] danno i momenti  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  coi quali si calcolano tensioni e deformazioni. Il calcolo può anche essere effettuato graficamente, secondo la fig.28. Il trasporto della forza  $N$  da  $C$  in  $B$  (o, equivalentemente, da  $A$  in  $G$ ) dà le tensioni [78'], con l'asse neutro  $x$ . Il trasporto da  $C$  in  $A$  (o da  $B$  in  $G$ ) corrisponde al caso considerato dalle [82]. Gli effetti si sovrappongono secondo la [85] essendo  $M_x^* = Ny^*$ ,  $M_y^* = Nx^*$  con  $x^*, y^*$  calcolati come in figura. A queste tensioni si aggiungono le  $\sigma_z = N/A$  che produce la forza trasportata in  $G$ .

Supponiamo ora che  $x, y$  siano assi principali. Allora la tensione risultante si può porre nella forma

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{xx_1}{\rho_y^2} + \frac{yy_1}{\rho_x^2} \right) \quad [87]$$

dove  $\rho$  sono i raggi d'inerzia definiti dalle posizioni  $J_x = A\rho_x^2$ ,  $J_y = A\rho_y^2$ . L'equazione dell'asse neutro e' ottenuta eguagliando a zero l'espressione in parentesi nella [87]. Per la costruzione di tale retta (fig. 30) basta considerare che ad essa appartengono i punti  $x = 0, y = y_2 = -\rho_x^2/y_1$  e  $y = 0, x = x_2 = -\rho_y^2/x_1$ . Sulla parallela all'asse neutro passante per il baricentro la tensione  $\sigma_z$  assume il valore  $N/A$ . Valori costanti di  $\sigma_z$  si hanno su tutte le parallele a quell'asse, sicche' e' facile dare una rappresentazione quotata delle tensioni sulla sezione. In particolare, sono individuati i punti di massima e minima sollecitazione.

E' interessante analizzare la corrispondenza esistente fra centro di pressione ed asse neutro. Se  $C$  si allontana da  $G$  lungo la retta  $s$ , l'asse neutro

si avvicina al baricentro mantenendo invariata la sua direzione e tende verso  $G$  se la distanza di  $C$  cresce indefinitamente; la sollecitazione allora si approssima alle condizioni di flessione deviata. Viceversa, accostandosi  $C$  a  $G$  l'asse neutro se ne allontana, mentre le tensioni tendono verso la distribuzione uniforme relativa allo sforzo assiale. In ogni caso, asse neutro e centro di sollecitazione stanno da parti opposte rispetto a  $G$ .

Un'altra proprieta' importante deriva dal fatto che l'espressione in parentesi nella [87] non cambia se si permuta  $x$  con  $x_1$  e  $y$  con  $y_1$ . Se  $x', y'$  sono le coordinate di un punto del-

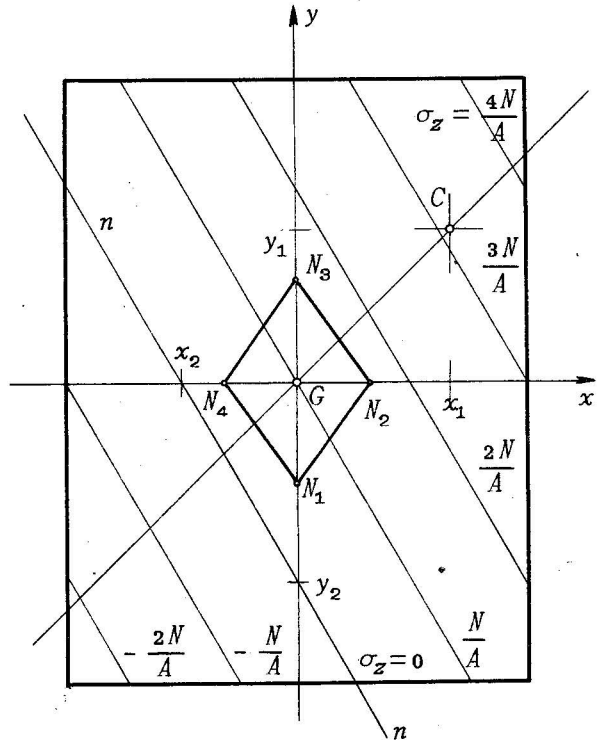


Fig. 30

l'asse neutro relativo al centro di sollecitazione  $C(x_1, y_1)$  (e quindi e'  $x'x_1/\rho_y^2 + y'y_1/\rho_x^2 + 1 = 0$ ) l'asse neutro relativo al centro  $C'(x', y')$  (la cui equazione e'  $x'x/\rho_y^2 + y'y/\rho_x^2 + 1 = 0$ ) conterra' il punto  $C$ . In particolare, se il centro di sollecitazione si muove su una retta, il relativo asse neutro passa sempre per un punto, centro di sollecitazione a cui corrisponde come asse neutro la retta  $r$ .

Se l'asse neutro taglia la sezione, una parte di questa sara' soggetta a trazione ed una parte a compressione. Se esso non taglia la sezione ma ha uno o piu' punti in comune con il contorno diciamo che esso e' *tangente* alla sezione. Il luogo dei centri di pressione ai quali corrispondono assi neutri tangenti al contorno si dice *nocciolo*. Tale figura e' costituita da una linea chiusa intorno al baricentro. Ad es., per la sezione rettangolare (fig.30) esso e' il quadrilatero  $N_1N_2N_3N_4$

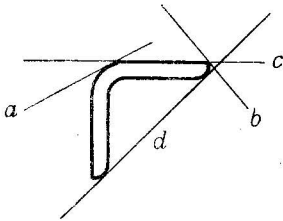


Fig. 31

contenente come diagonali i terzi medi delle due mediane. Se il centro di sollecitazione cade all'interno della figura di nocciolo, l'intera sezione e' soggetta a tensioni dello stesso segno, Quando  $C$  sta sul contorno del nocciolo l'asse neutro e' tangente al contorno, con cio' intendendosi che esso puo' toccarlo in un punto di un arco convesso (retta  $a$  della fig.31) o passare per un vertice (retta  $b$ ) o contenere una parte rettilinea del contorno (retta  $c$ ) o essere bitangente (retta  $d$ ).

**VI.3 - Espressione dei lavori virtuale interno e di deformazione.** Sostituendo nella [73] come tensioni del sistema  $b$  quelle qui trovate nel caso piu' generale, ossia

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_y^*}{J_y} x + \frac{M_x^*}{J_x} y, \quad \vec{\tau} = 0$$

e considerando che

$$\int \sigma_z^a dA = N^a, \quad \int \sigma_z^a x dA = M_y^a, \quad \int \sigma_z^a y dA = M_x^a$$

si ottiene, per la trave soggetta a flessione e sforzo normale

$$L_i^{ab} = \int \left( \frac{N^a N^b}{EA} + \frac{M_x^a M_x^b}{EJ_x} + \frac{M_y^a M_y^b}{EJ_y} \right) dz \quad [88]$$

Se  $x, y$  sono assi principali, si ha  $M_x^{*b} = M_x^b$ ,  $M_y^{*b} = M_y^b$ . In queste condizioni il lavoro di deformazione si scrive

$$L = \int (N^2/2EA + M_x^2/2EJ_x + M_y^2/2EJ_y) dz \quad [89]$$

**VI.4 - Sezioni eterogenee.** Gli stati di tensione sopra considerati, corrispondenti secondo la teoria di St.Venant alle sollecitazioni di flessione e sforzo normale sono caratterizzati dalla presenza della sola componente di tensione  $\sigma_z$ . Tali soluzioni si estendono facilmente al solido non omogeneo purché il coefficiente di Poisson abbia il medesimo valore in tutti i punti del corpo e le sezioni siano identiche, anche nelle caratteristiche dei materiali costituenti. In altre parole, se il modulo  $E$  differisce da punto a punto della sezione ma mantiene valore costante lungo le fibre parallele a  $z$ , purché sia  $\nu$  costante in tutto il corpo, si possono ottenere soluzioni analoghe a quelle del § VI.2.

Si consideri nel solido di St.Venant uno stato di deformazione corrispondente a tensioni nulle, fatta eccezione per  $\sigma_z$ . Sia  $\bar{E}$  il modulo elastico, costante, e sia  $\bar{\sigma}_z$  la tensione presente, distribuita secondo la [56]. Si consideri ora lo stesso stato di deformazione nel caso in cui si presenti l'eterogeneità sopra descritta, essendo il modulo  $E$  funzione di  $x, y$  ma non di  $z$ . Si avrà ancora la sola tensione  $\sigma_z$  legata a  $\bar{\sigma}_z$  dal rapporto (\*)

$$\sigma_z/\bar{\sigma}_z = E/\bar{E} \quad [90]$$

Indicando con  $n$  il rapporto  $E/\bar{E}$ , sarà  $\bar{\sigma}_z n dA$  la forza normale sull'area  $dA$ . Indichiamo con  $d\bar{A}$  il prodotto  $ndA$ . Dunque, se ogni elemento di area viene sostituito dall'elemento  $d\bar{A}$ , si potrà trattare il corpo come se esso possedesse dap-

---

(\*) Infatti, secondo le [35]-[36], per date deformazioni, a parità di  $\nu$ , le tensioni sono proporzionali al modulo  $E$ . Dunque lo stato di deformazione (congruente) che nel corpo omogeneo corrisponde alla sola tensione  $\bar{\sigma}_z$  darà anche in quello eterogeneo questa sola tensione. La sola condizione di equilibrio da considerare, la  $\partial\sigma_z/\partial z = 0$  sarà soddisfatta dalle  $\sigma_z$  della [90] come dalle  $\bar{\sigma}_z$  se il rapporto  $E/\bar{E}$  non dipende da  $z$ . Se invece le  $\tau$  non fossero nulle, lo stato di deformazione del corpo omogeneo non sarebbe valido per quello eterogeneo perché il rapporto  $n$ , essendo dipendente da  $x$  e  $y$ , introdurrebbe termini addizionali per via dei primi due addendi della [50].



per tutto lo stesso modulo  $\bar{E}$ . L'area della sezione, la posizione del baricentro e i momenti  $J_x, J_y, J_{xy}$  saranno da determinare in base alle aree  $d\bar{A}$ . Con questi dati, lo stato di deformazione corrispondente a date condizioni di carico sarà calcolato come se il materiale possedesse dappertutto il modulo  $\bar{E}$ . Le tensioni determinate sul solido omogeneo equivalente saranno però da moltiplicare per il fattore localmente variabile  $n$ .

Il modulo di riferimento  $\bar{E}$  può essere fissato a piacere. Di solito si assume per esso il valore relativo al materiale preponderante nella sezione. Così per il cemento armato si prende per  $\bar{E}$  il modulo d'elasticità adottabile per il calcestruzzo; le aree dei ferri vengono moltiplicate per il rapporto  $n = E_{\text{ferro}}/E_{\text{calcestruzzo}}$ ; generalmente si assume  $n=10$ . Le tensioni così calcolate si riferiscono al calcestruzzo; le tensioni nei ferri si ottengono moltiplicando per  $n$  i valori localmente trovati.

Circa gli effetti che possono derivare dal fatto che la ipotesi della costanza del coefficiente  $\nu$  non sia verificata, si può avere un'idea qualitativa considerando il comportamento a compressione di un cilindro circolare cavo (un'asta tubulare) con la cavità riempita di un materiale avente un coefficiente  $\nu$  più alto. La parete dovrebbe subire un aumento di raggio maggiore di quello che l'effetto della dilatazione trasversale vi produce. Nasceranno trazioni circonferenziali nel tubo e compressioni nel riempimento che ristabiliscono la congruenza. Queste tensioni contraddicono alle [48] e quindi il problema esorbita dalla teoria di St. Venant.

**VI.5 - La sezione parzializzata.** Esistono materiali i quali non danno affidamento di un efficace comportamento a trazione, mentre hanno buona resistenza a compressione. Fra questi è il calcestruzzo. Il calcolo delle travi composte con questo materiale, per quanto riguarda i computi di robustezza, viene effettuato supponendo che esso sia del tutto inattivo a trazione (\*). Tali condizioni possono localmente prodursi in modo pressoché completo a causa della fessurazione. Quindi una sezione in cemento armato viene considerata come composta di

---

(\*) Nei calcoli di deformazioni si considera invece efficiente l'intera sezione: ossia si ammette che le fessurazioni non influenzino la rigidità. Tali valutazioni hanno sempre valore approssimato, poiché il comportamento del calcestruzzo è alquanto discosto dall'elasticità lineare.

materiali a tre moduli: il calcestruzzo compresso con modulo  $\bar{E}$ , quello teso con  $E = 0$  e il ferro con  $E = n\bar{E}$ ,  $n = 10$ .

Diciamo sezione reagente quella costituita dal calcestruzzo compresso e dagli eventuali ferri. Assegnata la posizione dell'asse neutro e precisato il verso del momento che le azioni applicate alla sezione hanno rispetto all'asse neutro, resta definita la sezione reagente; quindi a questa potrebbero applicarsi i metodi del § VI.2, dopo modificate le aree secondo quanto e' detto nel § VI.4. Piu' direttamente, indicando qui con  $y$  le distanze dall'asse neutro e ammettendo ancora la conservazione delle sezioni piane, si scrive

$$\bar{\sigma}_z = ky \quad [91]$$

La risultante delle tensioni deve eguagliare la forza  $N$  applicata alla sezione. Percio' sara'

$$N = \int \sigma_z dA = \int \bar{\sigma}_z d\bar{A} = k\mathcal{S} \quad [92]$$

essendo  $\mathcal{S} = \int y d\bar{A}$  il momento statico della sezione reagente rispetto all'asse neutro. Detta  $y_1$  la distanza del centro di sollecitazione da detto asse, si ha

$$Ny_1 = \int \sigma_z y dA = k \int y^2 d\bar{A} = kJ \quad [93]$$

essendo  $J$  il momento d'inerzia della sezione reagente, sempre rispetto all'asse neutro. Si ha percio'

$$y_1 = J/\mathcal{S} \quad [94]$$

Indicando poi con  $x$  le ascisse misurate parallelamente all'asse neutro a partire da una retta comunque scelta e con  $x_1$  la coordinata  $x$  del centro di sollecitazione si avra' la relazione

$$\int \sigma_z x dA = Nx_1 = k \int x y d\bar{A} \quad [95]$$

Se la sezione e' fornita di un asse di simmetria e l'asse neutro e' normale ad esso, non e' necessario far ricorso alla [95], bastando la [94] a definire la posizione del centro di sollecitazione sull'asse di simmetria. Cosi' pure, se divisa la sezione in strisce parallele all'asse neutro, risulta che i baricentri di queste cadono su una retta, si puo' evitare l'uso della [95] tenendo presente che il centro di sollecitazione deve stare su quella retta. Nel caso piu' generale le

[92], [93] e [95] permettono di determinare il centro di sollecitazione per un dato asse neutro, con semplici operazioni quali il calcolo di momenti di primo o secondo ordine di una area: si tratta infatti della determinazione del centro delle forze parallele  $k y d\bar{A}$ .

Viceversa, il problema, diciamo *diretto*, di determinare l'asse neutro per un'assegnata posizione del centro di sollecitazione presenta difficoltà assai maggiori, perché la sezione reagente dipende dall'incognita posizione dell'asse neutro. Il problema diretto si semplifica quando la direzione dell'asse neutro è nota a priori. Questo è il caso di sezioni simmetriche rispetto ad una retta che contenga il centro di sollecitazione. Allora l'ubicazione dell'asse neutro può essere definita mediante un solo parametro  $y_2$ : esprimendo allora  $y_1$ ,  $\bar{S}$  e  $J$  in funzione di  $y_2$ , si ha nella [94] un'equazione nella sola incognita  $y_2$  la cui risoluzione analitica o grafica non presenta difficoltà.

Si consideri, ad es., il caso della fig. 33; una sezione a T in calcestruzzo soggetta ad azioni che tendono le fibre inferiori, nelle quali si dispone l'armatura di sezione  $A_f$ . Con le notazioni della figura si scrive

$$\begin{aligned}
 y_1 \left[ \frac{b'}{2} y_2^2 - \frac{b' - b''}{2} (y_2 - h')^2 - nA_f (h' + h'' - y_2) \right] &= \\
 = \frac{b'}{3} y_2^3 - \frac{b' - b''}{3} (y_2 - h')^3 + nA_f (h' + h'' - y_2)^2 & \quad [96]
 \end{aligned}$$

L'espressione a secondo membro rappresenta il valore di  $J$ , quella a primo membro è il prodotto di  $\bar{S}$  per  $y_1$ ; questo fattore può essere sostituito con  $y_2 - (y_2 - y_1)$ : poiché la differenza  $y_2 - y_1$ , distanza del centro di sollecitazione dal lembo superiore della sezione è un dato del problema, la [96] così si traduce in un'equazione di terzo grado in  $y_2$ .

La [96] è scritta supponendo che l'asse neutro tagli la sezione di calcestruzzo nel tratto di larghezza  $b''$  (ossia ritenendo  $y_2 > h'$ ). Se invece risulta  $y_2 < h'$  si deve ripetere il calcolo risolvendo la [96] modificata mediante soppressione dei termini contenenti il fattore  $b' - b''$ : la soluzione non differisce allora da quella relativa al caso in cui la parte in calcestruzzo sia un rettangolo di larghezza  $b'$ . In tal caso, per la sezione non armata ( $A_f = 0$ ), si ha  $y_1 = 2y_2/3$ : l'asse neutro si trova ad una distanza dal lembo superiore pari al triplo della distanza del centro di pressione dal lembo stesso. Accostandosi il centro di pressione al lembo superiore della sezione non armata, l'area reagente si va continua-

mente restringendo e quindi crescono indefinitamente le sollecitazioni a parità di carico; ovviamente forze che cadano fuori della sezione non possono essere sostenute dalla sezione non armata.

Se la sezione è soggetta ad una coppia nel piano  $yz$  e'  $N = 0$  e quindi la posizione dell'asse neutro è individuata dalla condizione  $\mathcal{S} = 0$ . Nel caso della fig. 33 per trovare lo asse neutro si dovrà risolvere l'equazione (di II grado) che si ottiene annullando il fattore in [ ] a primo membro.

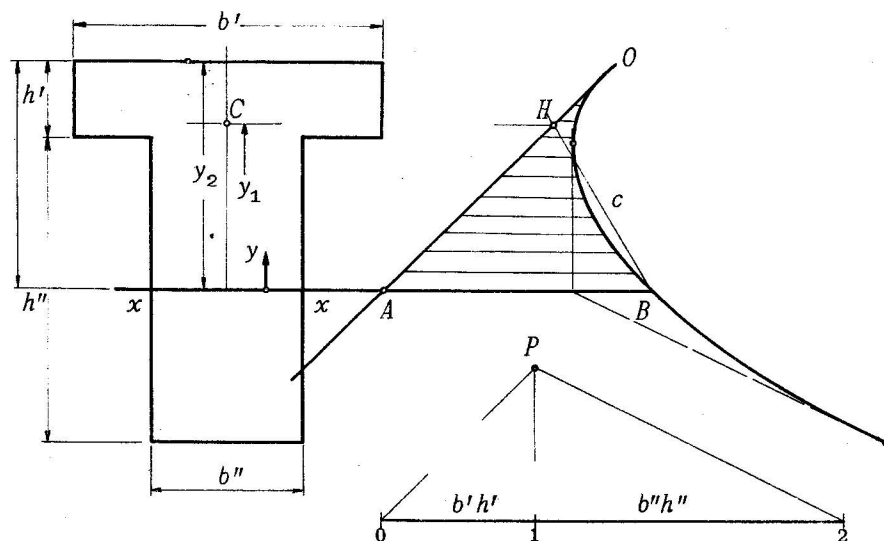


Fig. 32

La risoluzione della [96] per la determinazione dell'asse neutro della sezione simmetricamente caricata può anche effettuarsi per via grafica. La fig. 32 si riferisce alla sezione senza armatura. Si portano da una retta  $OA$  qualunque, in orizzontale, i valori dei momenti statici della parte di sezione (reagente) che sta al di sopra di ciascuna corda, computati rispetto alla corda stessa: si ottiene così la curva  $c$ . Quindi il segmento orizzontale compreso fra questa curva e la retta  $OA$  ad una certa altezza  $y$  rappresenta la quantità

$$\mathcal{S}(y) = \int_y^{y_2} (\bar{y} - y) d\bar{A}$$

essendo  $\bar{y}$  la coordinata  $y$  dell'area  $d\bar{A}$ . L'area delimitata dal segmento  $AB$  (che rappresenta il valore di  $\mathcal{S}$  per  $y = 0$ ),

la curva  $c$  e la fondamentale  $OC$  ha il valore (\*)

$$\int_0^{y_2} \bar{S} dy = \frac{1}{2} \int_0^{y_2} \bar{y}^2 d\bar{A} = \frac{J}{2} \quad [97]$$

Quindi, per la [94], quest'area deve essere equivalente al triangolo  $ABH$  la cui base vale  $\bar{S}$  e la cui altezza e'  $y_1$ . Ne segue immediata la determinazione dell'asse neutro (detto qui sovente *retta di separazione*): proiettato in  $H$  il punto  $C$  sulla  $AB$  si conduce per  $H$  una retta  $HB$  tale che la figura mistilinea  $OHBCO$  racchiuda area nulla: l'orizzontale per  $B$  e' l'asse neutro. La linea  $c$  si ottiene come poligonale, dividendo in strisce la sezione con corde orizzontali e connettendo con un poligono funicolare le aree delle strisce.

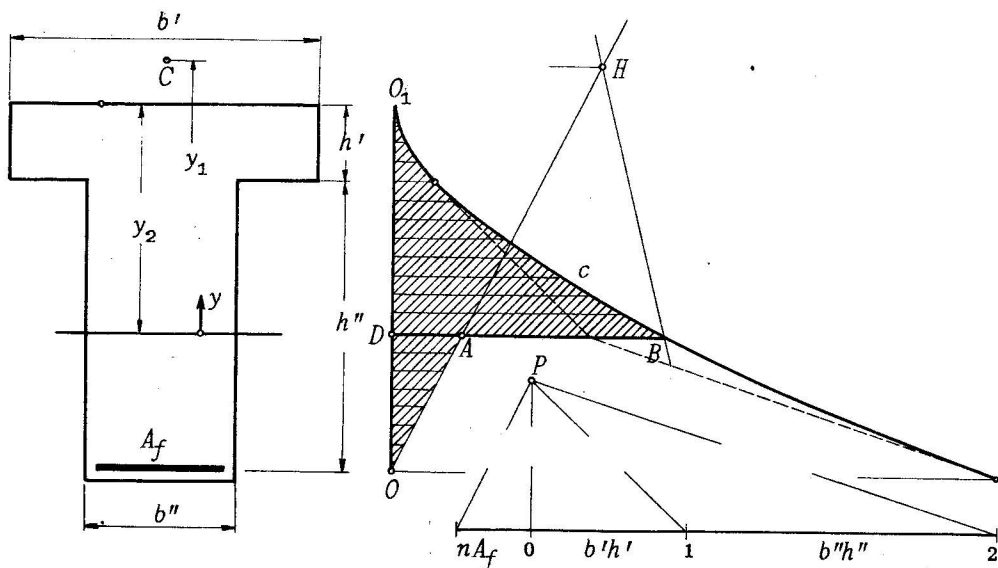


Fig. 33

Nella fig. 33 e' indicata l'analogia costruzione relativa al caso in cui esistano rinforzi nella zona tesa. La linea  $AOO_1c$  rappresenta il poligono funicolare che connette le aree parziali della sezione divisa in strisce orizzontali. L'area trat-

(\*) L'area  $d\bar{A}$  da' i momenti statici  $(\bar{y}-y)d\bar{A}$  per  $y$  compreso fra  $0$  e  $\bar{y}$ ; quindi il suo contributo nell'integrale e'  $d\bar{A} \int_0^{\bar{y}} (\bar{y}-y) dy = \bar{y}^2 d\bar{A}/2$ .

teggiata rappresenta il valore di  $J/2$ , nel quale in questo caso interviene il contributo dell'area dei ferri, rappresentato dal triangolo  $ODA$ . Sul primo lato  $OA$  del poligono funicolare il centro  $C$  viene proiettato in  $H$ . Il triangolo  $ABH$ , la cui base rappresenta il valore di  $S$  rispetto alla corda stessa e la cui altezza rappresenta  $y_1$ , deve avere per la [94] la medesima area che racchiude la linea  $OO_1cBAO$  e che rappresenta  $J/2$ . Quindi il punto  $B$  viene individuato conducendo per  $H$  una retta tale che la figura mistilinea  $HOO_1cBH$  abbia area nulla.

Per una soddisfacente precisione si deve praticare una divisione della figura in strisce sottili. Peraltro, nei tratti in cui la larghezza di calcestruzzo si mantiene costante si può convenientemente sostituire il poligono funicolare con la parabola a cui esso è circoscritto. Così nei casi delle figure 32 e 33 basta dividere l'area di calcestruzzo nei due rettangoli di area  $b'h'$  e  $b''h''$ ; la curva  $c$  è formata da due archi di parabola che toccano i corrispondenti lati del poligono in corrispondenza delle dividenti.