CAPITOLO V

IL PROBLEMA DI St.VENANT

V.1 - Formulazione del problema. Una soluzione particolare del problema elastico per un dato corpo viene ottenuta quando si riesce ad individuare, mediante appropriate posizioni, una configurazione di sforzi e deformazioni che soddisfi punto per punto a tutte le condizioni necessarie: quelle di equilibrio per le tensioni, quelle di congruenza per le deformazioni e quelle d'elasticita' fra tensioni e deformazioni. La soluzione trovata presentera' sul contorno del corpo certe tensioni, le quali definiscono i carichi che occorrera' distribuirvi per creare quello stato di cose nel corpo. Il teorema di unicita' ci assicura che, qualora il corpo sia assoggettato alle forze esterne cosi' determinate, vi si creera' lo stato di tensione e di deformazione trovato. Con questo procedimento si viene ad individuare *una* particolare soluzione, se le posizioni fatte sono completamente determinanti; se le assunzioni fatte lasciano certe liberta' di scelta, l'analisi svolta fornira' un *gruppo* di soluzioni.

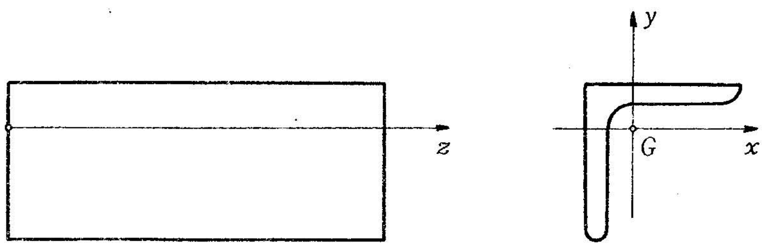

Fig. 26

La teoria di St.Venant rientra in questa impostazione. Il corpo in questione e' formato di materiale elastico, omogeneo e isotropo. La sua forma e' cilindrica, ossia generata da una figura piana qualsiasi che si sposti normalmente al suo piano senza cambiare di forma (fig.26). Chiamiamo *solido di St.Venant* siffatto corpo; *sezioni* sono le varie posizioni della figura generatrice; *basi* sono le due sezioni terminali. In una base si fissa l'origine della terna cartesiana ortogonale, con l'asse z parallelo alle generatrici del cilindro. La posizione dell'origine e la direzione degli assi x, y verranno precisate quando se ne presenti l'opportunita'.

Il problema di St.Venant si puo' formulare nei termini seguenti: determinare quelle configurazioni di sforzi che possono crearsi nel solido specificato mediante azioni applicate solo sulle basi con legge tale da creare uno stato di tensione che, in ogni punto del corpo, dia

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \qquad [48]$$

Le componenti di tensione che restano dunque da calcolare sono: la tensione normale σ_z e le tensioni tangenziali τ_{zx}, τ_{zy} che considereremo come componenti di un vettore $\vec{\tau}$, distribuito sulla sezione, e indicheremo con τ_x e τ_y.

V.2 - Le equazioni generali. Le equazioni di equilibrio [13], nelle quali qui per le ipotesi fatte si deve porre $X = Y = Z$, per le [48] danno

$$\partial\tau_x/\partial z = 0 \qquad \partial\tau_y/\partial z = 0 \qquad [49'] [49'']$$

$$\partial\tau_x/\partial x + \partial\tau_y/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z = 0 \qquad [50]$$

Le [49] indicano che il vettore $\vec{\tau}$ non dipende da z: la medesima distribuzione di tensioni tangenziali regna su tutte le sezioni. Tenendo conto di questo fatto, dalla [50] derivata rispetto a z, si deduce che

$$\partial^2\sigma_z/\partial z^2 = 0 \qquad [51]$$

ossia σ_z deve essere funzione lineare di z.

Applicando la derivazione $\partial^2/\partial x\,\partial z$ all'equazione [6] e tenendo conto che, per le [49'] e [36'''] e' $\partial\gamma_{zx}/\partial z = 0$, si ottiene

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial z} = 0 \qquad [52]$$

Poiche' per la [1], la [35'] e le [48] e'

$$\partial u/\partial x = \epsilon_x = -\nu\sigma_z/E \qquad [53]$$

tenendo presente la [51] si deduce che il primo addendo della [52] e' nullo. Poiche' per la [3], la [35'''] e le [48] e'

$$\partial w/\partial z = \epsilon_z = \sigma_z/E \qquad [54]$$

dalla [52] si conclude che deve essere identicamente

$$\partial^2\sigma_z/\partial x^2 = 0 \tag{55}$$

Ossia: la legge di variazione di σ_z lungo qualsiasi parallela all'asse x deve essere lineare. Di conseguenza, siccome la direzione dell'asse x e' del tutto arbitraria, il diagramma a tre dimensioni che si otterrebbe riportando i valori di σ_z normalmente alla sezione deve essere piano: questa infatti e' l'unica superficie che, segata con un piano qualsiasi, dia per intersezione una retta. Cioe' l'equazione $\sigma(x,y)$ deve essere quella di un piano:

$$\sigma_z = k_0 + k_1 x + k_2 y \tag{56}$$

I coefficienti k_0, k_1, k_2 non dipendono da x e y ma solo da z.

Vedremo come la [56] permettera', con calcoli elementari, di determinare le tensioni σ_z. Quindi il terzo addendo nella [50] si deve considerare come termine noto; questa e' dunque una prima equazione nelle due funzioni incognite di x, y costituite dalle componenti di $\vec{\tau}$. Una seconda equazione si ottiene sottraendo dalla [36''] derivata rispetto a x la [36'''] derivata rispetto a y:

$$\frac{\partial\tau_y}{\partial x} - \frac{\partial\tau_x}{\partial y} = G\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right) \tag{57}$$

L'espressione in parentesi, in virtu' delle [5] e [6] si riduce alla differenza $\partial^2 v/\partial z\partial x - \partial^2 u/\partial z\partial y$. Poniamo

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{58}$$

le due ultime espressioni di ω essendo ricavate dall'identita' $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y = 0$ che si deduce dalle [4] e [36'] tenendo conto della terza delle [48]. La quantita' ω ha un significato geometrico: e' la rotazione intorno a z dell'elemento generico di sezione; in questo moto le fibre normali a z mantengono inalterati gli angoli relativi poiche' $\gamma_{xy} = 0$ per qualunque direzione degli assi. Si osserva che

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z\partial y} = \frac{\nu}{E}\dot{k}_2 \tag{59}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu}{E}\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z\partial x} = -\frac{\nu}{E}\dot{k}_1 \tag{60}$$

essendo $k_1^{\cdot} = dk_1/dz$, $k_2^{\cdot} = dk_2/dz$, quantita' costanti perche' σ_z e' funzione lineare di z. Nelle deduzioni [59] e [60] si e' tenuto conto della [53] e della analoga che sussiste per $\epsilon_y = \epsilon_x$, e infine della [56]. Concludendo, della quantita' a secondo membro della [57] ossia $2G\,\partial\omega/\partial z$, sono costanti le derivate rispetto a x e a y e valgono $\nu k_2^{\cdot}/(1+\nu)$, $-\nu k_1^{\cdot}/(1+\nu)$ in base alle [59],[60] e [37]. Quindi sara'

$$\frac{\partial\tau_y}{\partial x} - \frac{\partial\tau_x}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu}(xk_2^{\cdot} - yk_1^{\cdot}) + k_3 \qquad [61]$$

essendo k_3 una nuova costante di integrazione.

A definire le funzioni τ_x, τ_y di x, y, oltre alle equazioni differenziali [50] e [61] occorre una condizione sul contorno della sezione. Questa si ottiene considerando che sulla superficie laterale del corpo non agiscono forze, per ipotesi e pertanto, in base alla proprieta' di reciprocita' delle τ (fig.8a), deve essere nulla la componente di normale al contorno: il vettore $\vec{\tau}$ deve essere tangente al contorno della sezione. Questa condizione si scrive imponendo che, lungo la linea di contorno sia (fig.27):

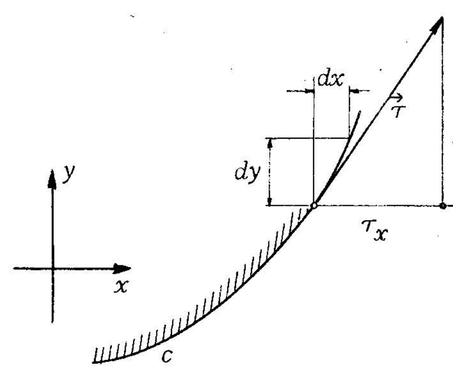

Fig. 27

$$dy/dx = \tau_y/\tau_x \qquad [62]$$

Con cio' la soluzione e' completamente definita in dipendenza dei coefficienti k, i cui valori dovranno essere ora posti in relazione con le forze e i momenti risultanti a cui le basi del corpo di St.Venant sono soggette (*).

(*) Della congruenza della deformazione si e' indirettamente tenuto conto nelle deduzioni anteriori utilizzando le [1]-[6] e le [35]-[36] per definire le tensioni. Si puo' provare che tutte le condizioni di congruenza [A22]-[A27] sono tenute in conto. Per questo si consideri che

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu\sigma_z/E \quad , \quad \gamma_{xy} = 0$$

e si tenga presente che per le [49] e' $\partial\gamma_{zx}/\partial z = \partial\gamma_{yz}/\partial z = 0$ e che σ_z

(continua)

V.3 - Introduzione delle caratteristiche di sollecitazione. Occorre ora esprimere le tensioni in funzione delle caratteristiche di sollecitazione definite nella Parte I: lo sforzo normale N, i momenti flettenti M_x, M_y, gli sforzi di taglio T_x, T_y, il momento torcente baricentrico M_z. Poiche' in qualunque caso risultante e momento risultante delle tensioni sulla sezione e delle azioni ad essa applicata debbono essere uguali, si hanno le relazioni

$$N = \int \sigma_z dA \quad , \quad M_x = \int \sigma_z \, y \, dA \quad , \quad M_y = \int \sigma_z \, x \, dA \qquad [63]\,[64]\,[65]$$

$$T_x = \int \tau_x dA \quad , \quad T_y = \int \tau_y dA \qquad [66]\,[67]$$

$$M_z = \int (x\tau_y - y\tau_x) dA \qquad [68]$$

gli integrali essendo estesi all'area A della sezione, e x, y essendo coordinate baricentriche. Pertanto sara'

$$\int x \, dA = \int y \, dA = 0 \qquad [69]$$

Quindi, sostituendo l'espressione [56] nella [63] si trova

$$N = k_0 A \qquad [70]$$

Poiche' al corpo sono applicate forze solo sulle basi, la forza N deve avere lo stesso valore su tutte le sezioni e quindi k_0 e' costante. Invece k_1 e k_2 sono funzioni lineari di z, per la [51]; ad individuarle basta darne i valori in una sezione (poniamo k_{10} e k_{20} per $z = 0$) e le derivate $k_1^{\cdot}$ e $k_2^{\cdot}$: in tutto 4 costanti. Dunque, con k_0 e k_3, la soluzione indicata contiene 6 costanti arbitrarie: quante bastano per verificare le [63]-[68] in una sezione del solido (e quindi in tutte, poiche' le condizioni di equilibrio locale verifica-

---

(segue nota da pagina precedente)

ha derivate seconde nulle rispetto a x, a y e a z. Si vede cosi' che tutti i termini delle [A22], [A23], [A24] sono nulli. Anche quelli della [A27] lo sono poiche' $\partial^2\sigma_z/\partial x \partial y = 0$. Moltiplicando la [A26] per G si osserva che il secondo membro rappresenta la derivata rispetto a y del primo membro della [61]: l'identita' degli altri membri e' facilmente constatata in base alle [60]. Similmente la [A25], moltiplicata per $-G$ ha il secondo membro uguale alla derivata rispetto a x del primo della [61]: l'identita' degli altri membri e' provata mediante le [59].

te implicano l'equilibrio globale). Con scelte particolari delle costanti si hanno i vari casi semplici che tratteremo separatamente.

V.4 - Espressioni dei lavori virtuale interno e di deformazione. Si consideri un elemento prismatico di trave, con spigoli paralleli a z di lunghezza dz e sezione normale di area dA. Se lo stato di tensione a soddisfa alle ipotesi [48] risulta

$$(\sigma^a \cdot \epsilon^b) = \sigma_z^a \epsilon_z^b + \tau_x^a \gamma_{zx}^b + \tau_y^a \gamma_{yz}^b \qquad [71]$$

Se le deformazioni b sono corrispondenti secondo le [35], [36] a tensioni che verificano pure le [48], si ha

$$(\sigma^a \cdot \epsilon^b) = \sigma_z^a \sigma_z^b / E + (\tau_x^a \tau_x^b + \tau_y^a \tau_y^b)/G \qquad [72]$$

L'espressione in parentesi a secondo membro rappresenta il prodotto scalare $\vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b$. Quindi integrando la quantita' $(\sigma^a \cdot \epsilon^b)$ agli elementi $dV = dzdA$ di volume del corpo si ha l'espressione del lavoro interno

$$L_i^{ab} = \int \frac{dz}{E} \int \sigma_z^a \sigma_z^b dA + \int \frac{dz}{G} \int \vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b dA \qquad [73]$$

Le integrazioni vengono in primo luogo effettuate sull'area della sezione e poi lungo l'asse della trave: cio' perche' dalla teoria di St.Venant si ricavano espressioni per le tensioni con le quali la prima integrazione puo' dare risultati generali.

L'espressione del lavoro di deformazione si ricava dalla [73] sopprimendo gli indici a, b poiche' qui si tratta di uno stesso sistema di tensioni e deformazioni, e dividendo gli integrali per 2.