CAPITOLO III

L'EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI

III.1 - Il lavoro interno. Sempre in riferimento cartesiano, sia $dV = dx\,dy\,dz$ un elemento di volume di un corpo qualsiasi (fig.12). Sulle sue facce siano distribuite le forze corrispondenti ad un sistema a di tensioni, le cui componenti siano $\sigma_x^a, \sigma_y^a, \ldots, \tau_{zx}^a$. L'elemento sia sottoposto ad una deformazione avente tutte le componenti nulle ad eccezione della ϵ_x. Se la faccia $ABCD$ e' mantenuta immobile (fig.12a), la opposta $EFGH$ viene in $E'F'G'H'$, spostandosi parallelamente a se stessa di $\epsilon_x dx$. La forza $\sigma_x^a\,dy\,dz$ su quella faccia fa il lavoro $\sigma_x^a\,dy\,dz\,\epsilon_x dx = \sigma_x^a\,\epsilon_x dV$. Il lavoro fatto dalle altre componenti e' rappresentato da infinitesimi di ordine superiore.

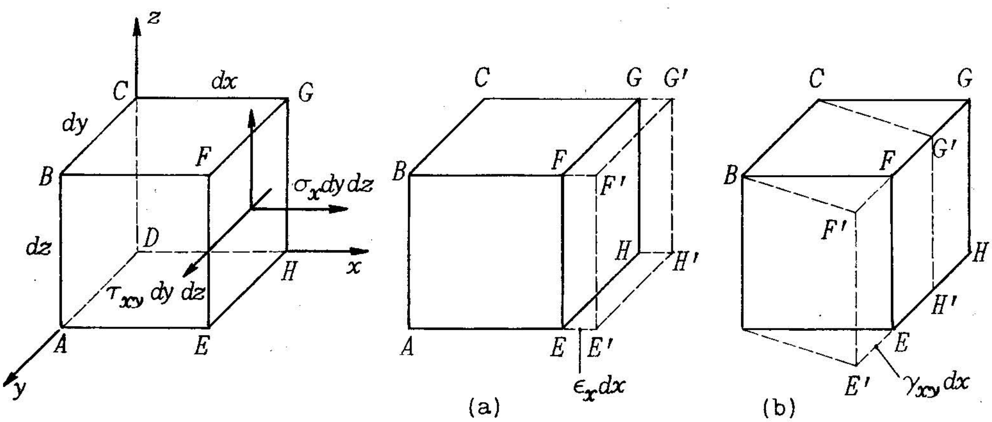

Fig. 12

Supponiamo, invece, di imprimere una deformazione in cui solo la componente γ_{xy} sia diversa da zero. Se la faccia $ABCD$ e' ancora immobile (fig.12b), la opposta scorrera' su se stessa di $\gamma_{xy} dx$ venendo in $E'F'G'H'$. La forza $\tau_{xy}^a\,dy\,dz$ su quella faccia compie il lavoro $\tau_{xy}^a\,dy\,dz\,\gamma_{xy}\,dx = \tau_{xy}^a\,\gamma_{xy}\,dV$, mentre le altre non danno contributo in questo ordine di grandezza.

Si sottoponga l'elemento dV ad una deformazione avente le componenti $\epsilon_x^b, \epsilon_y^b, \ldots, \gamma_{zx}^b$ e si calcoli il lavoro compiuto dalle forze del sistema a esistenti nell'elemento, ammessa l'ipotesi che gli spostamenti siano piccolissimi. Si osserva anzitutto che, per un moto rigido infinitesimo, le forze sulle facce, insieme con quelle eventualmente agenti sui punti del volume dV, danno lavoro nullo se le condizioni di equilibrio sono rispettate dal sistema a. Percio' la supposizione che l'una o l'altra faccia dell'elemento siano comunque fissate non ha influenza sul lavoro che si compie. In secondo luogo, posto che i termini contenenti potenze o prodotti delle componenti di deformazione vanno trascurati, il lavoro potra' essere calcolato sommando gli effetti delle singole componenti, le quali non interferiranno l'una sull'altra. Quindi il lavoro che le tensioni del sistema a fanno per la deformazione b dell'elemento e' ottenuto sommando gli effetti delle sei componenti, valutati come sopra s'e' fatto per ϵ_x e γ_{xy}: esso risulta dato da

$$(\sigma_x^a \epsilon_x^b + \sigma_y^a \epsilon_y^b + \sigma_z^a \epsilon_z^b + \tau_{xy}^a \gamma_{xy}^b + \tau_{yz}^a \gamma_{yz}^b + \tau_{zx}^a \gamma_{zx}^b)\, dV \qquad [14]$$

espressione (*) che scriveremo abbreviata $(\sigma^a \cdot \epsilon^b) dV$.

Consideriamo ora l'intero corpo, soggetto ad un sistema di tensioni a che supponiamo rispetti le condizioni di equilibrio in connessione con un sistema di forze $\vec{F}^a$. Cio' vuol dire che, su qualunque porzione del corpo che isoliamo mettendo a nudo le tensioni esistenti sulla superficie di separazione, sussiste equilibrio fra le tensioni stesse e le forze esterne agenti su detta porzione. Imprimiamo al corpo una deformazione b, piccola come di regola, seguendo questo processo: supponiamo di frazionare il corpo con una triplice serie di tagli, normali agli assi x, y, z, con equidistanza Δ; isoliamo i cubetti staccati e li deformiamo; infine li portiamo nella posizione che loro compete in conseguenza della deformazione b. In questo processo si fa lavoro solo nella fase in cui si deformano gli elementi. Infatti se le forze sono in equilibrio su ciascun elemento, i moti rigidi piccolissimi non debbono fornire ne' richiedere lavoro: se il processo si svolgesse solo per moti rigidi, il lavoro complessivo sarebbe nullo. Quindi, se facciamo tendere a zero le dimensioni Δ dei cubetti, il lavoro totale sara' dato dall'integrale dell'espressione [14] esteso a tutto il volume del corpo. Diciamo ***lavoro***

(*) Si noti l'analogia dell'espressione [14] con quella del prodotto scalare di due vettori, somma dei prodotti delle componenti omologhe.

interno questa quantita', espressa da

$$L_i^{ab} = \int(\sigma^a \cdot \epsilon^b)dV \qquad [15]$$

Osserviamo che questo e' il lavoro compiuto dal complesso delle forze, *esterne ed interne*. Infatti, su ogni elemento, se non si includessero le forze esterne, non si verificherebbe l'equilibrio. La considerazione comprende anche le forze applicate alla superficie di contorno. Infatti, se la faccia *ABCD* dell'elemento della fig. 12 appartiene al contorno del corpo, le forze esterne su essa agenti vengono a sostituire le tensioni che dovrebbe esercitare l'elemento adiacente: e se quelle forze mancassero, la configurazione degli sforzi sulle altre facce dovrebbe conformarsi a tale situazione, in accordo con le condizioni d'equilibrio.

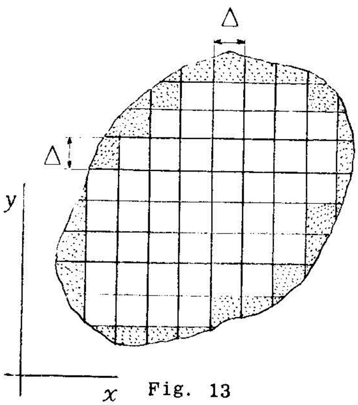

Fig. 13

Si puo' obiettare che non tutte le parti in cui si e' frazionato il corpo sono parallelepipedi interi: alcune sono troncate dal contorno (fig. 13); pero', se si fa tendere a zero la dimensione Δ, il volume delle particelle incomplete va annullandosi, e con esso il residuo omesso. Cosicche' al limite, come conferma il processo analitico (appendice A9), il lavoro complessivo assume l'espressione [15].

Di L_i^{ab} si e' adoperata nella Parte I un'espressione, la [42], che rappresenta nel caso particolare delle travi l'equivalente della [15]: la [42] infatti, come si vedra', e' ottenuta dalla [15] eseguendo in parte le integrazioni, si' che l'integrale triplo viene trasformato in un integrale semplice.

III.2 - L'equazione dei lavori virtuali. Ripetiamo il processo di deformazione *b* sul corpo soggetto alle tensioni *a*, senza pero' staccare le particelle l'una dall'altra. In questo caso le tensioni interne, uguali e contrarie sulle due facce di ciascun taglio, faranno lavoro nullo, posto che le facce dei tagli si mantengano a contatto nella deformazione *b*. Faranno lavoro solo le forze esterne: indicando con L_e^{ab} il lavoro cosi' calcolato potremo scrivere:

$$L_i^{ab} = L_e^{ab} \qquad [16]$$

dato che nelle due maniere di eseguire il processo di deformazione intervengono le medesime forze. Della quantita' L_e^{ab} si e' data nella Parte I l'espressione [40] supponendo che le forze del sistema a siano tutte concentrate. E' facile generalizzare l'espressione al caso in cui si abbiano forze distribuite lungo linee, superfici o porzioni di volume. Ad es., in questo terzo caso si puo' scrivere:

$$L_e^{ab} = \int \vec{f}^a \cdot \vec{\eta}^b \, dV \qquad [17]$$

essendo $\vec{f}^a dV$ la forza di massa agente dall'esterno sull'elemento dV e $\vec{\eta}^b$ lo spostamento del punto a cui questa forza si puo' considerare applicata.

Rileviamo che nello sviluppare la giustificazione della eguaglianza [15] si e' dovuto supporre:

a) che le tensioni del sistema a siano in equilibrio con le forze esterne $\vec{F}^a$: altrimenti il lavoro compiuto nel trasportare le particelle nella posizione finale non consterebbe solo della quantita' [15];

b) che la deformazione b lasci a contatto tutte le facce dei tagli praticati nel corpo, cioe' che essa sia congruente: altrimenti le forze uguali e opposte sulle superficie affacciate non farebbero lavoro nullo;

c) che la deformazione sia piccolissima nel senso indicato nel § I.2, si' da permettere la linearizzazione delle espressioni delle componenti di deformazione in funzione di quelle di spostamento. Questa ultima esigenza si presenta particolarmente evidente nella deduzione analitica della [16] (Appendice A9).

Nessun'altra limitazione e' posta alla scelta dei due sistemi; percio' l'equazione [16] ha un ambito di validita' e di applicazione amplissimo. In particolare, non v'e' da esigere alcuna condizione circa le deformazioni che le tensioni a produrrebbero nel corpo; ne' v'e' da porre alcuna condizione circa le cause atte a produrre la deformazione b. Non intervengono per nulla le proprieta' fisiche del corpo. Sotto questo punto, i due sistemi hanno carattere di enti ***virtuali***. Nell'applicazione poi, l'uno o l'altro viene identificato col sistema reale, relativo al problema in esame, e si deduce dalla [16] una relazione a cui tale sistema deve soddisfare. Come si e' notato a p.60 della Parte I, se il sistema reale e' quello delle tensioni e delle forze a, dalla [16] si ottiene una condizione di equilibrio che esso deve verificare. Se il sistema reale e' quello della deformazione b, dalla [16] si ha una relazione a cui questa deformazione deve soddisfare se essa e' congruente. L'equazione [16] e' atta a sostituire qualsivoglia equazione di equilibrio, purche' si sappia costruire una opportuna deformazione b congruente; parimenti essa e' atta a sostituire qualsivoglia condizione di congruenza, purche' si sappia costruire una opportuna configurazione di sforzi che rispetti le condizioni imposte dalla statica.

Occorre osservare che l'uso dell'equazione dei lavori puo' essere esteso al caso in cui la deformazione b non rispetti tutte le condizioni di congruenza. Supponiamo che lungo la superficie S di un taglio praticato nel corpo, la configurazione b presenti una ***dislocazione*** (*), ossia uno spostamento relativo di punti che dovrebbero essere a contatto: in particolare, la formazione di un vano o di una penetrazione di parti. In tal caso l'espressione [40] di L_e (posto che le forze esterne siano concentrate) va modificata come segue:

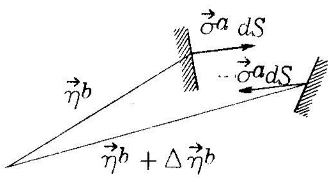

Fig. 14

$$L_e^{ab} = \Sigma\, \vec{F}^a \cdot \vec{\eta}^b - \int \vec{\sigma}^a \cdot \Delta\vec{\eta}^b dS \qquad [18]$$

Il termine aggiunto e' costituito dall'integrale, esteso alla superficie dove si localizza la dislocazione, del prodotto delle forze $\vec{\sigma}^a dS$ per gli spostamenti relativi $\Delta\vec{\eta}^b$ (figura 14). Il segno negativo e' dovuto al fatto che l'incremento $\Delta\vec{\eta}$ va misurato sottraendo lo spostamento $\vec{\eta}^b$ relativo alla faccia positiva (sulla quale agisce la tensione $\vec{\sigma}^a$) da quello relativo alla faccia opposta.

Dell'equazione [16] si e' fatto largo uso nella Parte I, per le strutture ivi considerate. Non e' quindi necessario qui soffermarsi sulle modalita' di impiego di questa importantissima equazione.

(*) "Distorsione" e' il termine classico, non molto appropriato, per questi difetti di congruenza.