

CAPITOLO X

QUESTIONI DI SECONDA APPROSSIMAZIONE SUL CALCOLO DELLE TRAVI

X.1 - Considerazioni generali. La teoria delle travi, estesa secondo il principio di St.Venant, costituisce il primo fondamento per il calcolo di una vasta categoria di strutture. Però, quanto più ci si discosta dalle condizioni ideali del solido di St.Venant, tanto più importanti sono gli errori a cui si va incontro in queste applicazioni: in una parte di trave dove le dimensioni delle sezioni cambino rapidamente, dove il raggio di curvatura dell'asse non sia molto grande rispetto alle dimensioni della sezione, dove varino le caratteristiche di sollecitazione N, T, M_t assunte costanti nella teoria, si potranno riscontrare scarti rilevanti rispetto alla teoria delle travi. Considereremo qui alcune trattazioni approssimate che, attraverso schematizzazioni, prendono in esame i punti più importanti di discordanza fra la teoria delle travi e la reale situazione, nella imperfetta realizzazione dei presupposti di quella teoria.

X.2 - La trave di grande curvatura. Consideriamo una trave curva in forma di solido di rivoluzione intorno ad un asse OO_1 simmetrica rispetto ad un piano normale all'asse, il cui versore indichiamo con \vec{i} . Nel piano della sezione generica, che passa per OO_1 e forma con una sezione di riferimento un angolo ψ , sia R la distanza del baricentro dall'asse, \vec{r} il versore radiale, ossia normale a \vec{i} , x, y siano le coordinate ortogonali baricentriche, $x = 0$ essendo l'asse di simmetria della sezione (fig.54). La coordinata vettoriale di un punto qualunque del corpo si scrive dunque

$$\vec{\xi} = \vec{i}x + \vec{r}(R + y) \quad [156]$$

Poiché $\partial\vec{r}/\partial\psi$ è il versore \vec{t} normale alla sezione, si ha

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{(R + y)\partial\psi} = \vec{t}$$

A rappresentare gli spostamenti elastici viene adottata l'espressione

$$\vec{\eta} = \vec{t}(\eta_1 + \beta y) + \vec{r} \eta_2 \quad [157]$$

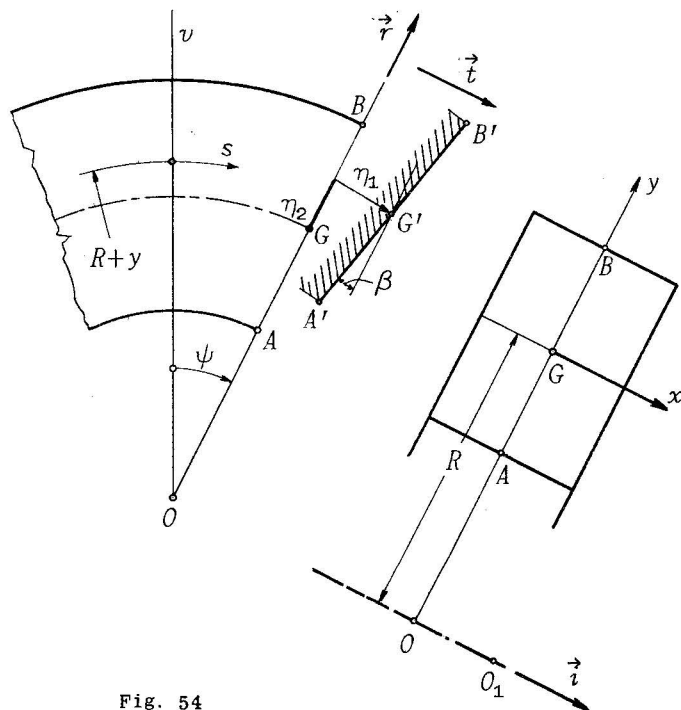


Fig. 54

dove η_1, η_2, β si assume che siano costanti su ogni sezione, dipendendo solo da ψ ; η_1 rappresenta lo spostamento normale alla sezione, in corrispondenza del baricentro, η_2 lo spostamento radiale, β la rotazione della sezione. Per calcolare la dilatazione ϵ della fibra circonferenziale si adopera la [A4] sostituendo $R + y$ al posto di h_a . Tenendo presente che $\partial \vec{t} / \partial \psi = -\vec{r}$ e $\vec{r} \cdot \vec{t} = 0$ si trova

$$\epsilon = (\eta_2 + \eta_1' + y\beta') / (R + y) \quad [158]$$

indicandosi con η_1', β' le derivate rispetto a ψ . Posto

$$k_1 = E(\eta_2 + \eta_1') / R \quad k_1 + k = E\beta'$$

la [158] si scrive

$$\sigma = k_1 + \frac{ky}{R + y} \quad [159]$$

Il diagramma di σ lungo le normali all'asse di rivolu-

zione consta di un termine costante e di uno iperbolico, di ordinate inversamente proporzionali alla distanza dall'asse. I coefficienti k_0 e k possono essere immediatamente calcolati quando si conosca il momento flettente M baricentrico ed il momento rispetto all'asse di rivoluzione che indichiamo con Q ; in base alle relazioni

$$M = \int \sigma y dA \quad Q = \int \sigma (R + y) dA = M + NR$$

e alla [159] si ottiene

$$\sigma = \frac{My}{J} \frac{R}{R+y} + \frac{Q}{AR} \quad [160]$$

essendo

$$J = \int \frac{R}{R+y} y^2 dA = J_x - \int \frac{y^3}{R+y} dA \quad [161]$$

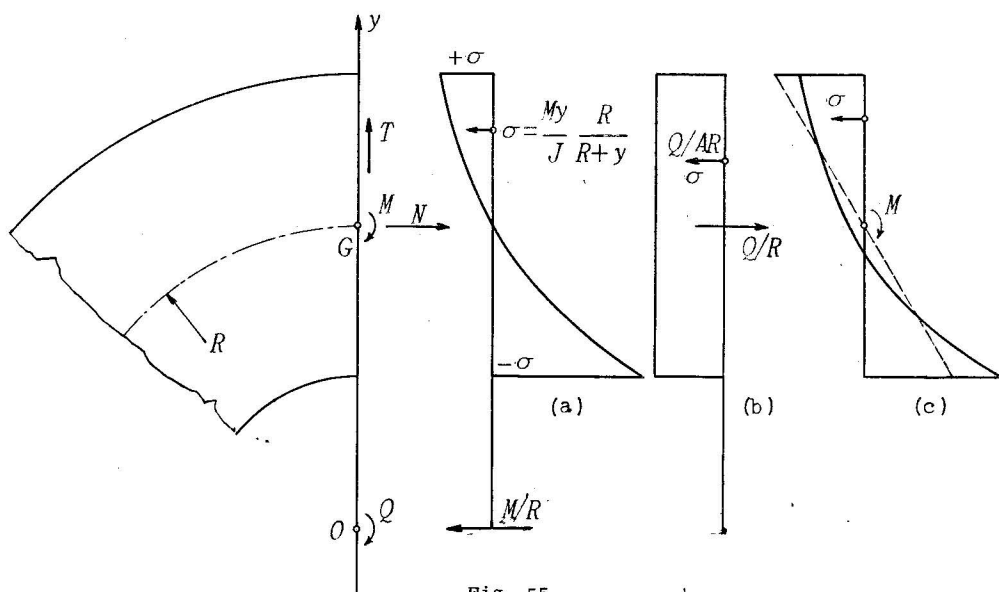


Fig. 55

Tendendo la curvatura $1/R$ a zero, il fattore $R/(R+y)$ si approssima a 1, il rapporto Q/R si approssima al valore dello sforzo assiale N e la caratteristica J si riduce al momento d'inerzia J_x ; la [160] riconduce all'espressione di σ per la trave rettilinea. L'effetto della curvatura appare particolarmente evidente se si considera la sollecitazione sulla sezione prodotta da una forza Q/R baricentrica ed una forza M/R incidente all'asse di rivoluzione (fig. 55a, b): la pri-

ma da una tensione uniformemente ripartita, come se la trave fosse rettilinea, la seconda da le stesse sollecitazioni come se la sezione fosse non omogenea, con modulo elastico proporzionale a $1/(R + y)$. In particolare, assoggettando la sezione solo ad una forza baricentrica si hanno tensioni uniformi; assoggettandola ad una coppia, si trova la distribuzione iperbolica di tensioni con ordinata nulla in posizione spostata rispetto al baricentro (fig. 55c). In questo secondo caso si ha dunque, per effetto della curvatura un incremento di sollecitazione nelle fibre piu' vicine all'asse di rivoluzione.

Nell'applicazione di questa teoria (di Winkler), il calcolo piu' laborioso e' rappresentato dalla determinazione di J . Esistono per questo numerose tabelle. Se si scompone la sezione in rettangoli (fig. 56) e si indica con b_i la larghezza del rettangolo compreso fra i raggi R_{i-1} e R_{i+1} si puo' adoperare l'espressione

$$J = R^3 \sum b_i \log_n (R_{i+1}/R_{i-1}) - R^2 A \quad [162]$$

L'effetto della curvatura si manifesta anche nella presenza di tensioni radiali le quali operano come se esistesse

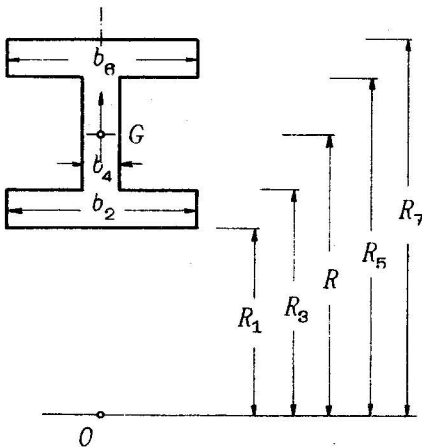


Fig. 56

un'attrazione o una repulsione fra le fibre circolari tese e quelle compresse, secondo che le fibre tese siano quelle esterne o quelle piu' vicine all'asse di rivoluzione. Queste tensioni nel caso di una sezione tubulare possono produrre una ovalizzazione della sezione; per una sezione a doppio T portano ad una inflessione delle ali e a tensioni talvolta pericolose, di trazione o compressione trasversale, nell'anima. Si consideri la condizione di equilibrio nella direzione radiale per una porzione elementare del corpo limitata da

due sezioni che fanno un angolo $d\psi$ e da un cilindro di raggio $R + y$; se b e' la corda (fig. 57) ossia la lunghezza del tratto di generatrice sulla superficie del cilindro di raggio $R + y$ che limita l'elemento, le tensioni radiali σ_r danno luogo ad una forza $(R + y) b \sigma_r d\psi$ la quale contrasta l'azione dovuta alle tensioni circolari sulla parte A_1 di sezione staccata dalla corda b ; nel caso in cui il corpo sia

soggetto a flessione pura non sono da considerare tensioni tangenziali sulle due sezioni; quindi per l'equilibrio si ha

$$(R + y) b \sigma_r = - \int_1 \sigma dA$$

l'integrale essendo esteso all'area A_1 staccata dalla corda b . Indicando con S_1 il momento statico di quest'area rispetto al baricentro, con J_1 il valore dell'integrale [161] ad essa applicati, si scrive

$$-\sigma_r = \frac{M}{(R + y) b J} (S_1 - J_1/R + JA_1/AR) \quad [163]$$

Il valore di J_1 puo' essere valutato applicando la [162] alla sezione A_1 .

Per il calcolo delle deformazioni si puo' fare uso della equazione dei lavori. A tale scopo si esprime la parte di L_i^{ab} corrispondente alle tensioni circonferenziali [160] ottenendo

$$L_{i\sigma}^{ab} = \int \sigma^a \sigma^b dV/E = \int (M^a M^b dz/EJ + Q^a Q^b dz/EAR^2) \quad [164]$$

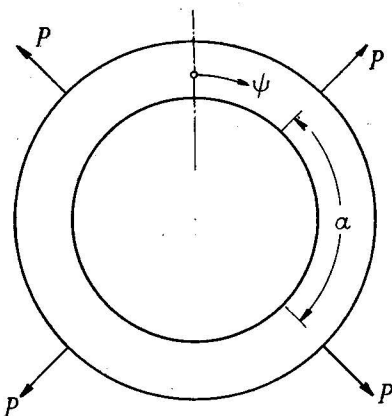


Fig. 58

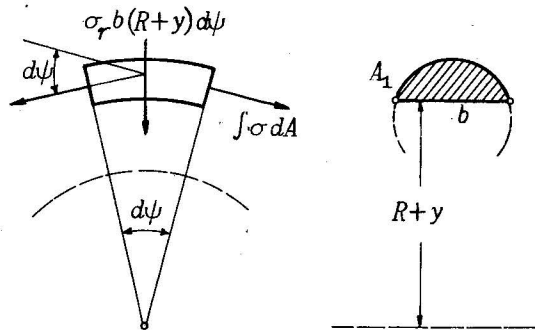


Fig. 57

essendo $dz = R d\psi$. E' interessante osservare che nell'espressione cosi' formulata, il termine in M e quello in Q sono separati; invece facendo riferimento alle componenti M, N appaiono dei termini nei prodotti $M^a N^b, M^b N^a$. Delle deformazioni dovute al taglio si puo' tener conto in via di approssimazione, introducendo nell'integrando il termine $T^a T^b dz/GA_s$, calcolato come se si trattasse di trave rettilinea. Con queste espressioni, il calcolo delle deformazioni e quindi anche delle incognite iperstatiche, si svolge per i solidi a grande curvatura come

per quelli a piccola curvatura. Indichiamo i risultati della applicazione al calcolo di un sistema iperstatico.

Una trave ad anello sia soggetta a carichi radiali uguali, applicati alle sezioni $\psi = a/2, 3a/2, \dots, (2n-1)a/2$ essendo $na = 2\pi$, n intero qualunque (nel caso della fig. 58, $n = 4$). Sotto tali carichi si trova: che il momento Q e' costante e vale

$$Q = AR^3P/(AR^2 + J)\alpha \quad [165]$$

che lo sforzo normale per $-\alpha/2 < \psi < \alpha/2$ e' dato da

$$N = P \cos \psi/2 \sin(\alpha/2) \quad [166]$$

mentre lo sforzo tagliante e'

$$T = P \sin \psi/2 \sin(\alpha/2) \quad [167]$$

Analoghe espressioni valgono, ovviamente in ciascuno dei settori α , con riferimento alle bisettrici. In particolare, con due carichi radiali opposti, i valori di N e T coincidono con le due componenti di $P/2$.

Nel caso in cui alle sezioni $\psi = 0, \alpha, 2\alpha, \dots, (n-1)\alpha$ (essendo ancora $na = 2\pi$) siano applicati i carichi $P, P \cos m\alpha, P \cos 2m\alpha, \dots, P \cos m(n-1)\alpha$ essendo m un intero qualunque da 2 a $n/2$ se n e' pari, a $(n-1)/2$ se n e' dispari, si trova che (*):

il momento Q e' ovunque nullo;

lo sforzo assiale nella sezione $\psi = 0$ vale $N = \frac{P \sin \alpha}{2(\cos m\alpha - \cos \alpha)}$

Tanto basta ad individuare le sollecitazioni nell'intero anello.

X.3 - Effetti della conicità in una struttura a parete sottile. E' detta *guscio cilindrico* una struttura costituita da una sottile parete cilindrica (rivestimento) rinforzata da nervature longitudinali (correnti) disposte nella direzione delle generatrici e da nervature giacenti in piani normali (ordinate). Il calcolo degli sforzi in tale struttura viene ordinariamente condotto sulla base dell'ipotesi, suggerita dalla teoria delle travi, che le tensioni normali nei correnti siano distribuite secondo la legge lineare [56] sulle sezioni rette. Oltre a cio' si ammette generalmente, a semplificare i calcoli, che il rivestimento sia soggetto solo a tensioni tangen-

(*) Si noti che questi risultati sono indipendenti dalla curvatura, come quelli espressi dalle [166] e [167]; la teoria di Winkler interviene solo nella [165], nella quale appare J al posto di J_x .

ziali, sulle sezioni rette; così le σ vengono concentrate nei correnti. Le ordinate costituiscono strutture piane; si trascura la resistenza che esse oppongono alle azioni che tendono a deformarle fuori del loro piano. I carichi normali alla parete vanno applicati alle ordinate; il rivestimento, collegando correnti e ordinate, stabilisce la trasmissione delle azioni trasversali agli elementi longitudinali.

Il calcolo di queste strutture, che per il guscio cilindrico, secondo quanto è detto nel § VII.3 e nelle Appendici A13, A15, A16, A17, consiste in un'applicazione semplificata della teoria delle travi, richiede alcune generalizzazioni quando sia da tenere conto della variazione di sezione. Supporremo ancora le ordinate situate in piani paralleli; le sezioni, che diciamo *principali*, si intendono fatte secondo questa giacitura; la coordinata z è misurata normalmente ad essa. Consideriamo un pannello di rivestimento, compreso fra i correnti i , $i+2$ e fra le ordinate r , $r+2$, contigue. Supporremo che gli assi dei due correnti concorrano in un punto V e che la superficie media del pannello sia generata da rette passanti per V (pannello conico). Ammetteremo che su ogni sezione principale si trovino solo tensioni tangenziali; parimenti si ammette che sulle sezioni del pannello fatte secondo le generatrici esistano solo tensioni tangenziali. Queste assunzioni sono giustificate dal fatto che il contributo offerto dal pannello alla resistenza assiale dei rinforzi che lo contornano non è, in genere, rilevante, sia per le dimensioni esigue di solito assegnate al rivestimento, sia per la deformabilità delle fibre curve del rivestimento, accentuata dalla flessione di esse. Del resto di tale contributo si tiene conto con sufficiente appros-

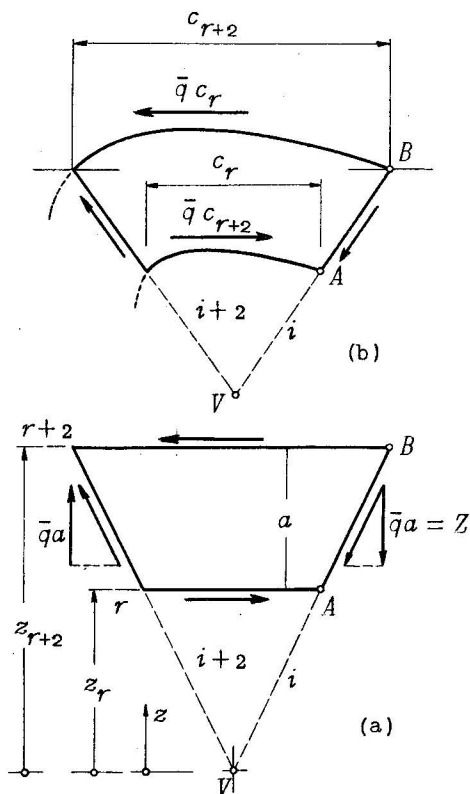


Fig. 59

simazione aggregando all'area dei rinforzi trasversali e longitudinali la sezione di rivestimento collaborante.

Ammissa la resistenza del pannello alle sole tensioni tangenziali, risulta facile provare che il flusso $q = \tau s$ gode delle proprietà:

- a) in ogni punto il flusso secondo la generatrice e' uguale al flusso sulla sezione principale
- b) lungo le sezioni principali il flusso e' costante
- c) lungo le generatrici il flusso varia in ragione inversa al quadrato della distanza dal vertice V (*).

Per queste proprietà, noto il flusso in un punto qualsiasi del pannello, risultano completamente individuate le azioni che esso trasmette agli elementi che lo contornano. Per

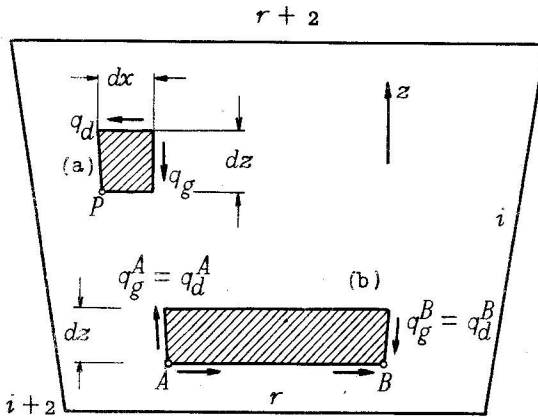


Fig. 60

quanto riguarda le forze trasmesse lungo la giunzione alle ordinate valgono le proprietà immediatamente deducibili dalle considerazioni svolte con riferimento alla formula [110]: un complesso di forze distribuite tangenzialmente ad un arco di linea piana con intensità costante q ha per risultante una forza qc agente secondo l'asse di risultante dell'arco, c essendo la corda dell'arco e *asse di risultante*

essendo la retta parallela alla corda, distante da questa del segmento $2\Omega/c$, se Ω e' l'area compresa fra l'arco e la corda.

(*) Per provare la proprietà a) basta, per un elemento di rivestimento (fig. 60a) compreso fra due generatrici e due sezioni principali contigue, considerare la condizione di equilibrio alla rotazione intorno a P . Per la b) si consideri, per una striscia elementare delimitata da due sezioni principali a distanza dz , la proiezione delle forze su z . Per la c) si considerino i momenti rispetto ad un asse per V , delle forze agenti sulla striscia compresa fra due generatrici contigue (fig. 61). Nelle figure 60, 61 sono indicati con q_g e q_d i valori (uguali) del flusso secondo generatrici e direttrici.

Le proiezioni delle figg. 59a, 60, 61 sono fatte su un piano qualunque parallelo a z ; in ogni caso il flusso rappresenta la forza (proiettata) su un tratto unitario (in proiezione).

Per calcolare la forza trasmessa al corrente i si consideri che, con le notazioni della fig. 59 lungo la AB e: $q = q^A z_r^2 / z^2$; quindi la componente su z di quella forza vale

$$Z = \int_A^B q dz = q^A z_r^2 \int \frac{dz}{z^2} = q^A z_r^2 \left(\frac{1}{z_r} - \frac{1}{z_{r+2}} \right) = q^A a \frac{z_r}{z_{r+2}}$$

Quindi, posto $\bar{q} = q^A z_r / z_{r+2}$ si ha

$$Z = a \bar{q} \quad [168]$$

Dal flusso che appare in questa equazione dipende la forza trasmessa al corrente secondo la stessa relazione come se si trattasse di pannello cilindrico; esso si chiama *flusso medio* del pannello conico. In funzione di questo flusso si ottengono le forze trasmesse dal pannello lungo i quattro lati di contorno (fig. 59).

Indichiamo con $N_{i,r}$ la componente su z dello sforzo nel corrente i all'incrocio con la ordinata r , con $q_{i+1,r+1}$ il flusso medio nel pannello compreso fra i correnti $i, i+2$ e le ordinate $r, r+2$. In base alla [168] la condizione di equilibrio alla traslazione secondo z per il tratto di corrente i che va dall'ordinata r alla $r+2$ si scrive

$$N_{i,r+2} - N_{i,r} = a(q_{i-1,r+1} - q_{i+1,r+1}) \quad [169]$$

In questa equazione, di importanza fondamentale per il calcolo dei flussi in base ai valori di N che si deducono dalla condizione di linearità delle σ , non appare la conicità della parete. Tutte le equazioni di equilibrio sono così ridotte alla medesima forma come per il guscio cilindrico, ad eccezione di quella dei momenti. Per questa si deve osservare che nel piano della sezione, oltre alle tensioni tangenziali nel rivestimento, appaiono le proiezioni degli sforzi nei correnti; il vettore componente dello sforzo nel corrente i sul piano della sezione r è diretto secondo la proiezione del tratto di corrente che va dall'ordinata r alla $r+2$; con

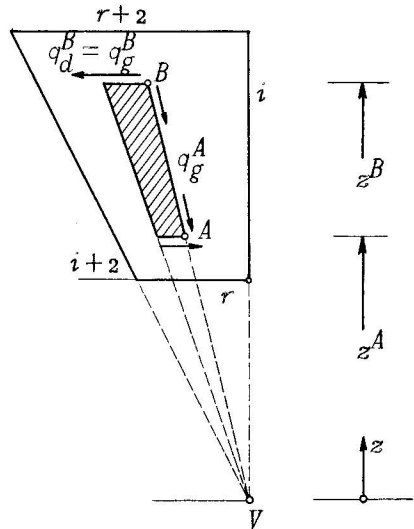


Fig. 61

le notazioni della fig. 62 questo vettore vale $N_{i,r} l_i/a$ e la sua componente su y e' $N_{i,r} (y_{i,r+2} - y_{i,r})/a$. L'effetto globale di queste forze viene facilmente valutato quando gli assi dei correnti concorrano tutti in uno stesso punto V (*). In tal caso e'

$$(y_{i,r+2} - y_{i,r})/a = (y_{i,r} - y^V)/z_r$$

Quindi

$$\sum N_{i,r} (y_{i,r+2} - y_{i,r})/a = (M_x - y^V N)/z_r \quad [170]$$

essendo $N = \sum N_i$, $M_x = \sum N_i y_i$.

Analogamente si trova che la somma delle componenti su x da' il valore $(M_y - x^V N)/z_r$; percio' la risultante degli sforzi nei correnti, proiettati sulla sezione, per $N = 0$, da una forza di componenti M_y/z_r , M_x/z_r per V . Queste vanno sottratte alle componenti T_x, T_y della forza tagliante nel computo delle azioni sul rivestimento; se, come e' di regola, i momenti crescono in valore assoluto nel senso in cui crescono le dimensioni della sezione, il rivestimento sopporta una forza tagliante ridotta per effetto della convergenza dei correnti. Questo e' l'effetto piu' importante della conicita'.

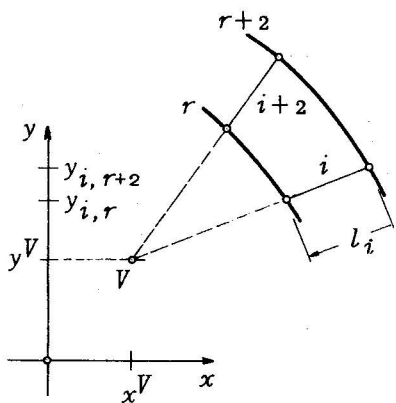


Fig. 62

Per il calcolo delle deformazioni si puo' in via di approssimazione, usare per il pannello conico la medesima espressione di L_i^{ab} che vale per il pannello cilindrico; ossia

$$L_i^{ab} = q^a q^b \lambda a/G \quad [171]$$

(*) Indipendentemente da ogni ipotesi sulla geometria del sistema, sulla sezione r la risultante dei flussi del tronco $r+1$ ha su y la componente

$$\begin{aligned} \sum q_{i+1,r+1} (y_{i+2,r+2} - y_{i,r+2}) &= \sum y_{i,r+2} (q_{i-1,r+1} - q_{i+1,r+1}) = \\ &= \sum y_{i,r+2} (N_{i,r+2} - N_{i,r})/a \end{aligned}$$

Aggiungendo le componenti degli sforzi nei correnti, secondo l'espressione a primo membro nella [170], si ottiene la forza $[(\sum y_i N_i)_{r+2} - (\sum y_i N_i)_r]/a$ che, comunque si fissi l'asse x , non necessariamente baricentrico, rappresenta lo sforzo tagliante T_y .

dove λ e' il rapporto fra lo sviluppo dell'arco, sezione della superficie media nel piano equidistante dalle due ordinate che limitano il pannello e lo spessore, a e' la distanza di queste ordinate, q^a e q^b sono i flussi medi, per i sistemi [a] e [b], definiti come e' detto per il calcolo della [168].

Con cio' il calcolo della struttura a pannelli conici e' ricondotto ai medesimi procedimenti che valgono per il guscio cilindrico.

X.4 - La torsione con gradiente variabile. Nella teoria di St. Venant della torsione gli spostamenti sono, secondo le [A58], [A59],

$$u = \vartheta (y^C - y), \quad v = \vartheta (x - x^C), \quad w = \vartheta \cdot \hat{w} = \vartheta (\hat{w}_0 + x^C y - y^C x) \quad [172]$$

dove \hat{w}_0 e' una funzione di x, y calcolabile con la [A60] e con la condizione $\int \hat{w}_0 dA = 0$, mentre x^C, y^C sono le coordinate del centro di torsione definito dalle condizioni

$$\int \hat{w} x dA = \int \hat{w} y dA = 0 \quad [173]$$

Queste espressioni sono valide per il solido cilindrico quando sia ϑ costante; in questo caso le tensioni sono quelle calcolate nel § VII.4. Wagner, con special riferimento alla sezione in parete sottile, estese le [172] al caso in cui ϑ sia funzione di z . Si ha allora

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = E \vartheta \cdot \hat{w} \quad [174]$$

A queste tensioni si accompagnano altre tensioni tangenziali, che indichiamo con $\vec{\tau}_c$ che vanno ad aggiungersi a quelle della teoria di St. Venant. Queste $\vec{\tau}_c$ sono definite dalla [50] in base alle σ_z della [174] e dalla condizione $\text{rot } \vec{\tau}_c = 0$ in conformita' alla [99], il valore k_3 essendo eliso dalle tensioni di St. Venant. Per i flussi q_c delle $\vec{\tau}_c$ sussiste un'equazione analoga alla [119]:

$$-q_c = \frac{\partial}{\partial z} \int_1 \sigma_z dA = E \vartheta \int_1 \hat{w} dA \quad [175]$$

Questa mette in relazione i flussi entranti ed uscenti attraverso una qualunque linea chiusa l_1 con l'integrale di \hat{w} esteso all'area racchiusa.

In particolare per la sezione sottile aperta il flusso

q_c è individuato dall'equazione:

$$-q_c = E\mathfrak{D}^{\sigma\sigma} \int_0^s \hat{w} s dl \quad [176]$$

l'integrale essendo effettuato lungo la linea media m a partire da un estremo di essa. In questo caso il calcolo di \hat{w} è facilitato dal fatto che lungo la m si può ritenere $\tau = 0$.

Per la sezione sottile cava si può ancora applicare la [176] fissando l'origine in modo che sia nulla la circuitazione:

$$\oint q_c dl/s = 0 \quad [177]$$

Similmente, per le sezioni più volte connesse dovrà annullarsi l'analogo integrale su ciascun circuito chiuso della linea m .

È ovvio che le tensioni $\vec{\tau}_c$ così definite non hanno risultante nel piano della sezione, in accordo col fatto che le σ_z a cui esse sono legate per l'equilibrio, non hanno momento, secondo le [173]. Per ottenere l'equazione finale che lega il momento torcente applicato alle tensioni relative applichiamo l'equazione dei lavori virtuali per un tronco di lunghezza Δz , assumendo come sistema [a] le tensioni di questa teoria, come sistema [b] quelle, indicate con $GJ_t \vec{t}_t$, corrispondenti secondo la teoria di St. Venant a $\mathfrak{D}^{\sigma} = 1$. Poiché in questo secondo sistema mancano le σ_z , si ha

$$L_i^{ab} = \Delta z J_t \int \vec{\tau}_t \cdot (\vec{\tau}_c + GJ_t \mathfrak{D}^{\sigma} \vec{t}_t) dA$$

Per la definizione delle τ_c in relazione alla [99] e

$$\int \vec{\tau}_c \cdot \vec{t}_t dA = 0 \quad [178]$$

Quindi, tenendo presente la [101] si ha $L_i^{ab} = GJ_t \mathfrak{D}^{\sigma} \Delta z$. D'altra parte il lavoro compiuto dalle forze del sistema [a] applicate alle sezioni terminali consta di due parti:

- le tensioni tangenziali, equivalenti ad una coppia di momento M_t , nella rotazione relativa delle sezioni estreme, misurata da Δz , poiché nel sistema [b] e $\mathfrak{D}^{\sigma} = 1$, fanno il lavoro $M_t \Delta z$;

- le tensioni normali [174] per l'ingobbamento delle sezioni terminali rappresentato dagli spostamenti w , danno per differenza fra gli effetti relativi alle sezioni terminali, il

lavoro

$$E\mathcal{D}^{\circ\circ}\Delta z \int \hat{w}^2 dA$$

Quindi, posto

$$C = \int \hat{w}^2 dA \quad [179]$$

dall'eguaglianza $L_i = L_e$ si ha

$$GJ_t \mathcal{D}^{\circ} - EC\mathcal{D}^{\circ\circ} = M_t \quad [180]$$

Da questa equazione, corredata delle necessarie condizioni al contorno, si ottiene la legge di variazione dell'angolo \mathcal{D} di torsione. Conseguentemente si calcolano le tensioni $\sigma_z = E\mathcal{D}^{\circ\circ}\hat{w}$ e $\vec{\tau} = \vec{\tau}_c + GJ_t \vec{t}_t$, nonché le deformazioni delle sezioni $w = \mathcal{D}^{\circ}\hat{w}$. In questa approssimazione, il moto delle sezioni si riduce ad una rotazione intorno al punto in cui coincide il centro di torsione col centro di taglio secondo Trefftz.

X.5 - Correzioni al calcolo delle travi. A differenza dalla teoria delle travi che, limitatamente, sia pure, a condizioni ideali, fornisce una soluzione esatta del problema elastico per un corpo particolare, le trattazioni dei §§ 1, 2, 3 presentano configurazioni di sforzi e deformazioni che neanche in condizioni ipotetiche soddisfano interamente alle condizioni di equilibrio e congruenza. La conservazione delle sezioni piane postulata nella [157] si giustifica in condizioni di simmetria, ossia quando su tutte le sezioni regni la medesima distribuzione di tensioni; però l'indeformabilità delle sezioni ammessa dalla medesima [157] è inconciliabile con le tensioni radiali che appaiono dalla [163]. La teoria del § 2, si fonda su una schematizzazione del pannello di parete ed introduce ancora altre approssimazioni in quanto si valga di una distribuzione degli sforzi N negli elementi longitudinali la quale non sia giustificata dalla congruenza delle deformazioni. La teoria della torsione del § 3 postula il moto rigido delle sezioni nel loro piano e suppone che gli spostamenti w siano quelli conseguenti a questo movimento e alle τ della teoria di St. Venant, trascurando in ciò l'effetto delle τ_c . Le conclusioni di queste trattazioni approssimate sono tuttavia di notevole interesse poiché rivelano gli aspetti più importanti della divergenza fra la soluzione di St. Venant e la reale situazione nelle condizioni in cui si usa quella teoria. Le due fondamentali conseguenze della curvatura dell'asse di una trave sono mostrate dalla [160] che indica il soprelevamento

delle tensioni nelle fibre piu' vicine al centro di curvatura e dalla [163] che indica le tensioni radiali dovute all'effetto combinato del momento flettente e della curvatura. Il principale effetto della rastremazione di una trave e' rappresentato, secondo la [170], dalla componente sul piano della sezione delle tensioni nelle fibre longitudinali. La teoria del § 3 da' interessanti indicazioni circa le perturbazioni originate dalle accidentalita' di carico o di vincolo, ossia, circa lo stato di tensione che si crea in prossimita' delle sezioni dove si introducano azioni distribuite con legge diversa da quella supposta dalla teoria delle travi. Ci soffermeremo ad esaminare alcune conseguenze di questa analisi.

Si consideri una trave molto lunga, di sezione costante, soggetta a momento torcente costante, vincolata nella sezione $z = 0$ in condizioni di ingobbamento impedito. Dovra' dunque essere $\vartheta' = 0$ per $z = 0$. La soluzione e' qui fornita dall'espressione

$$GJ_t \vartheta' = M_t \left(1 - e^{-z \sqrt{GJ_t/EC}} \right) \quad [181]$$

Questa infatti verifica la condizione esistente per $z = 0$ e soddisfa alla [180]. La funzione esponenziale che appare nella [181] sara' indicata con $e[z]$; anche la funzione $e[-z]$ soddisfa alla [180]; pero' questa da' luogo a tensioni rapidamente crescenti con z e queste non possono presentarsi a meno che nella sezione libera, supposta molto lontana, si applicassero tensioni σ_z elevatissime.

Il fattore $\sqrt{GJ_t/EC}$ contenuto nell'argomento di $e[z]$ da' una misura della rapidita' con cui questa funzione, che rappresenta il termine addizionale rispetto all'ordinaria teoria delle travi, decresce con la distanza dall'origine della perturbazione, creata nella sezione $z = 0$ dall'impedito ingobbamento. Si osserva che, se per una data sezione tutte le dimensioni fossero diminuite nello stesso rapporto, le quantita' indicate con \hat{w} decrescerebbero col quadrato di esso e quindi C con la sesta potenza del medesimo; invece J_t risente della quarta potenza del fattore di similitudine. Percio' il fattore anzidetto si puo' scrivere come $1/L$ essendo L una lunghezza proporzionale alle dimensioni trasversali della trave. Il suo valore cresce col fattore EC (indice della rigidita' che la sezione presenta di fronte alla distorsione rappresentata dagli spostamenti w), diminuisce per effetto della rigidita' degli elementi lavoranti al taglio che influiscono su GJ_t . In certe strutture (guscio) si possono indipendentemente variare gli elementi che contribuiscono ad accrescere C (i correnti) e quelli che influiscono sul modulo J_t

(il rivestimento); i primi, incrementando L , contribuiscono ad accrescere il raggio d'azione della perturbazione (*), mentre i secondi operano in senso opposto restringendo il campo in cui la perturbazione si fa sentire.

Dalla [181] si hanno per integrazione gli angoli ϑ (linea ϑ fig.63). Fuori di una breve zona in prossimità della origine, l'andamento e' quello rettilineo voluto dalla teoria di St. Venant; i valori sono pero' diminuiti dall'impedito ingobbamento della sezione vincolata. Con buona approssimazione, se la lunghezza della trave e' alquanto superiore a L si puo' affermare che l'impedito ingobbamento opera come una riduzione della lunghezza per un tratto pari a L ; si intende che, se l'ingobbamento e' impedito per entrambe le sezioni terminali (come avverrebbe se la coppia torcente fosse applicata attraverso blocchi rigidi) la lunghezza viene ridotta di $2L$.

Il vincolo nella sezione $z = 0$ origina ancora le tensioni (fig.63a)

$$\sigma_z = e[z] M_t L \hat{\omega} / C \quad [182]$$

Le tensioni nella sezione vincolata dipendono dunque dal momento torcente e dalle sole caratteristiche della sezione, non dalla lunghezza l della trave, per lo meno se e' $l > L$ tanto da rendere $e[l]$ trascurabile e quindi valida la [181].

I risultati sopra indicati possono essere generalizzati in base alle considerazioni seguenti. Si consideri una trave di sezione costante, molto lunga, ossia tale che nella zona in esame non si percepiscano le perturbazioni dovute alle condizioni di carico delle sezioni estreme. La trave sia soggetta al diagramma di momenti torcenti della fig.64, la coppia

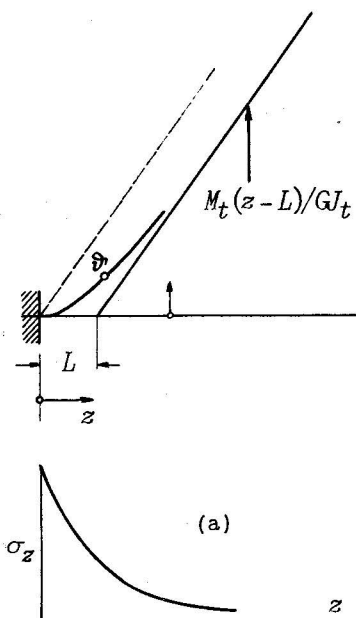


Fig. 63

(*) Questo termine, anche se impreciso, vale a dare evidenza al fenomeno. Si potrebbe definire il raggio d'azione come la lunghezza del tronco che, sottoposto su tutte le sue sezioni alle tensioni stesse che si hanno nella sezione di origine della perturbazione, da' lo stesso lavoro di deformazione che realmente corrisponde alla perturbazione stessa.

C_t applicata alla sezione $z = 0$ essendo sopportata in ugual misura dalle parti che stanno ai due lati di quella sezione.

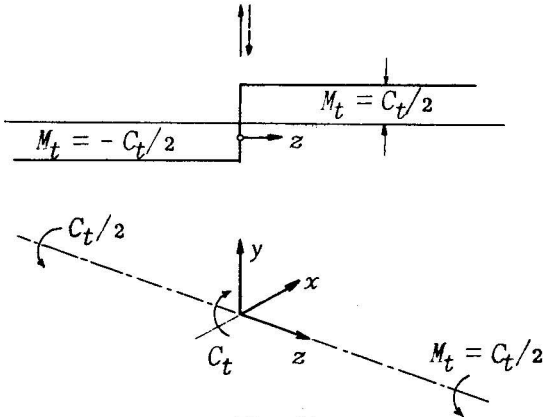


Fig. 64

Per motivi di simmetria l'ingobbamento della sezione $z = 0$ deve essere nullo. Quindi la situazione e' la medesima del caso precedente, sotto un momento $M_t = C_t/2$. Con questa sostituzione si possono calcolare ancora le σ_z mediante la [182], intendendo che $e[z]$ e' la funzione calcolata in base al *valore assoluto* di z , dato che per simmetria, le σ_z avranno andamento decrescente ai due lati della

sezione $z = 0$. Con questa avvertenza scriviamo dunque

$$\sigma_z = e[z] C_t L \hat{\omega} / 2C \quad [183]$$

Un ulteriore passo verso la generalizzazione e' fatto considerando che le tensioni [183] dipendono solo dalla differenza dei momenti torcenti ai due lati della sezione $z = 0$; del resto, un momento M_t costante produce esattamente le tensioni volute dalla teoria di St.Venant. Quindi se varie coppie torcenti C_{t1}, C_{t2}, \dots , sono applicate alle distanze z_1, z_2, \dots dalla sezione nella quale si calcola σ_z , sovrapponendo gli effetti possiamo scrivere

$$\sigma_z = \frac{L \hat{\omega}}{2C} \sum e[z_i] C_{t_i} \quad [184]$$

Si osserva che la [184] fornisce le tensioni correttive σ_z nella piu' generale condizione di carico per la trave indefinita, di sezione costante; ciascuna coppia torcente agisce come una sorgente di perturbazione i cui effetti si smorzano come indica la $e[z]$.

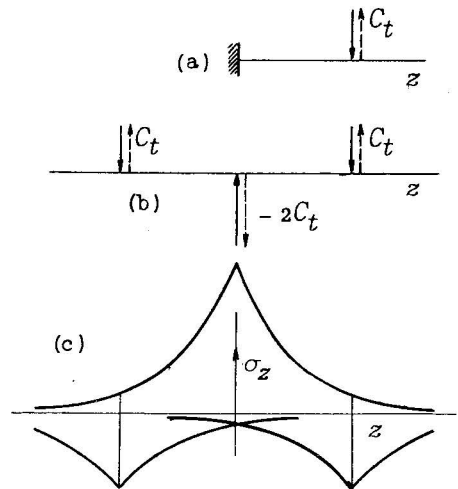


Fig. 65

In particolare se, ai due lati della sezione in esame, si ha una distribuzione di coppie torcenti con intensita' $m dz$ per tratto dz , la quale si estenda fino a distanza d tale che sia $e[d]$ trascurabile, le σ_z dovute a queste azioni non dipendono da z e sono date da

$$\sigma_z = m L^2 \hat{w} / C \quad [185]$$

Con la stessa [184] si possono calcolare le tensioni σ_z in presenza di coppie torcenti applicate in prossimita' di una sezione incastrata. Basta a tal fine osservare che la sezione incastrata puo' essere simulata prolungando idealmente la struttura al di la' di quella sezione e disponendo nel prolungamento virtuale un sistema di carichi torcenti riflesso di quello esistente sulla trave reale. Nella sezione vincolata naturalmente deve disporsi una coppia torcente pari al doppio della effettiva reazione di quel vincolo. Nella fig. 65 e' indicata schematicamente la sostituzione nel caso di una coppia torcente C_t agente presso l'incastro, le coppie essendo qui indicate mediante due forze parallele al piano di rappresentazione. L'andamento delle tensioni σ_z corrispondenti e' indicato nella fig. 65c.

Si osservi che due coppie opposte provocano tensioni $\sigma_z = 0$ in una sezione equidistante da entrambe. Quindi la sezione libera puo' essere realizzata secondo lo stesso concetto della riflessione, prolungando idealmente la struttura oltre la sezione libera e disponendo i carichi torcenti riflessi nelle posizioni ad essa simmetriche, con versi opposti a quelli della trave reale (figura 66). Con cio', la [184] puo' essere adoperata per ogni trave di sezione costante, comunque vincolata e caricata; la somma si estende in ogni caso ai carichi reali e virtuali entro il cui raggio d'azione si trova la sezione in esame.

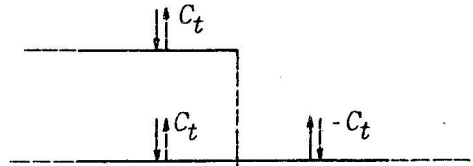


Fig. 66

Analoghe considerazioni valgono per il calcolo delle tensioni tangenziali. Convien scomporre queste nella somma delle tensioni di St. Venant e delle tensioni correttive. Indichiamo con $M_t (\vec{t}_t - 2\vec{\tau}_a)$ le tensioni che si determinano per $z = 0$ nelle condizioni della fig. 64 (*): nelle condizioni piu' gene-

(*) Le tensioni τ_a si ottengono dunque aggiungendo alle $\tau_t/2$ le τ_c che si hanno, per la sezione sottile, dalla [175] sostituendo $1/2C$ a $E\theta''$.

rali si avra'

$$\vec{\tau} = M_t \vec{t}_t + \vec{\tau}_a \sum (\pm 1) e [z_i] C_{t_i} \quad [186]$$

assegnandosi il fattore +1 per le coppie situate dal lato delle z positive rispetto alla sezione in esame, -1 per le altre.

Due applicazioni di questa teoria sono svolte nelle figg. 67 e 68. La prima si riferisce ad una sezione sottile aperta,

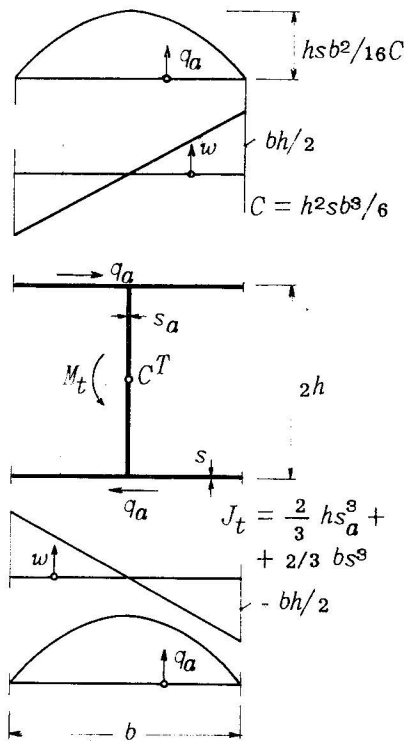


Fig. 67

A' e 3,4 di sezione A'' . In questi si suppone concentrata la area resistente a sforzo normale; quindi sono $J' = h^2 A' / 2$, $J'' = h^2 A'' / 2$ i momenti d'inerzia delle pareti 1,2 e 3,4 considerate come travi isolate. Il centro di taglio, secondo quanto s'è visto a proposito della fig. A8, si troverebbe nel punto C_0 se fosse $J' / s' = J'' / s''$. In condizioni generiche esso si trova nel punto C^T indicato in figura. Quindi, con la [A57] si calcolano i valori indicati di \hat{w} , i quali soddisfanno alle [173].

schematizzazione di un profilato a doppio T. Il centro di taglio sta, per simmetria, nel baricentro. Per il calcolo di \hat{w} si adopera la [A57] con $\hat{\tau} = 0$, trattandosi di sezione aperta. Nell'anima e' $\hat{w} = 0$, mentre per le ali e' $r = h$; si trova cosi' per \hat{w} l'andamento lineare indicato in figura. Per il calcolo delle τ , si osserva che il flusso delle t_t e' nullo; quindi il flusso q_a delle τ_a si riduce a quello delle tensioni τ_c che si determina in base alla [176]. Le τ_a si ottengono sommando a queste le $t_t/2$. E' interessante rilevare che le tensioni correttive sono quelle che si otterrebbero considerando le ali del profilato come travi a se'stanti, inflesse in sensi opposti nella torsione del profilato.

L'esempio della fig. 68 si riferisce ad una sezione a scatola rettangolare con 4 correnti nei vertici 1,2 di sezione

Il fattore χ è rappresentato da

$$\chi = \frac{2b/s - h/s' - h/s''}{2b/s + h/s' + h/s''} \quad [187]$$

Si osservi che se $\chi = 0$ si annullano gli spostamenti \hat{w} : ossia le sezioni si mantengono piane nella torsione e quindi le tensioni sono semplicemente quelle della teoria di St. Venant.

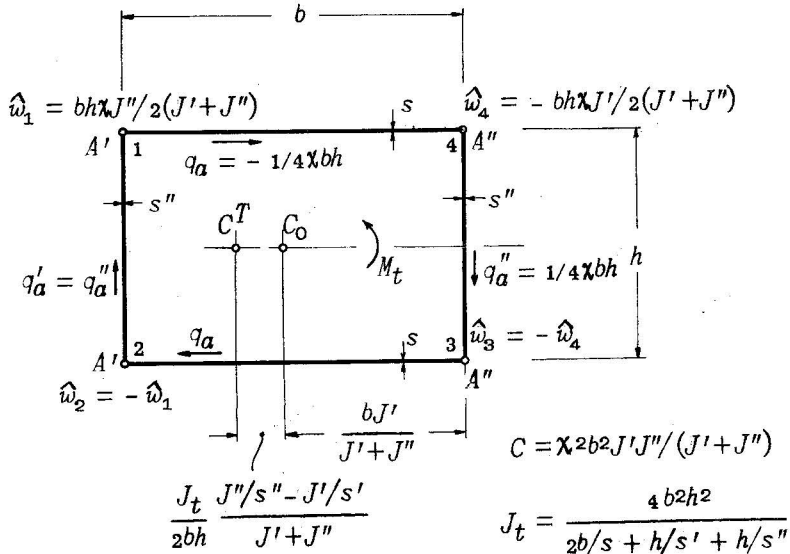


Fig. 68

Nella figura stessa sono anche indicati i flussi q_a . Si nota che per $\chi \approx 1$ (ossia se e $s \ll s', s''$), nelle condizioni della fig. 64, presso la sezione vincolata il momento torcente si scarica principalmente attraverso le anime 1, 2 e 3, 4 (*).

Si osserva infine che per sezioni aperte molto sottili si possono trascurare le tensioni di St. Venant e quindi scrivere al posto della [180] la equazione:

$$EC\vartheta'' = - \int_0 M_t dz = \mathfrak{M} \quad [188]$$

(*) Si noti che, al diminuire di χ , i flussi q_a vanno crescendo. Peró contemporaneamente tendono a zero i fattori e $[z]$, poiché vanno annullandosi proporzionalmente a χ la lunghezza L .

l'origine di integrazione essendo posta in una sezione libera. La quantita' cosi' definita puo' considerarsi come una caratteristica di sollecitazione a cui corrispondono le tensioni $\sigma_z = \mathfrak{N} \hat{w}/C$. Si riscontra cosi' una analogia con la sollecitazione flessionale.

X.6 - I sistemi caratteristici. Le considerazioni del § precedente, anche se basate su una trattazione approssimata, valgono a porre in evidenza i caratteri piu' importanti delle *perturbazioni* che rappresentano lo scarto fra l'effettiva configurazione di sforzi e quella prevista dalla teoria delle travi. Poiche' le tensioni calcolate secondo St. Venant realizzano sezione per sezione l'equilibrio con la sollecitazione applicata, le tensioni di perturbazione debbono su ogni sezione costituire un sistema *staticamente nullo*, ossia avente risultante e momento risultante nulli. In certi casi schematici si localizza in una sezione l'origine della perturbazione che da questa si propaga all'interno del corpo. Poiche' nell'esame di questi stati di deformazione non intervengono altre azioni che quelle applicate sulla sezione di origine, il sistema delle equazioni indefinite di equilibrio e di congruenza e' omogeneo nelle tensioni e deformazioni. Fra le soluzioni di questo sistema vi sono alcune che, per la trave di sezione costante godono di un'importante proprieta': esse sono rappresentabili come prodotti di una funzione della coordinata z per una funzione delle coordinate nel piano della sezione; in altri termini: la corrispondente distribuzione su una sezione qualsiasi si ottiene con un cambiamento di scala da quella in una sezione fissa. Chiameremo *sistemi caratteristici* queste configurazioni di tensioni e deformazioni. Per corpi di forma piu' generale che la cilindrica chiameremo sistema caratteristico ogni soluzione del sistema omogeneo delle equazioni indefinite che si presenti come prodotto di una funzione di una coordinata, diciamo x_1 , per una funzione di una o due altre coordinate, sempre che le tensioni esistenti sul luogo definito da $x_1 = \text{costante}$ costituiscano un sistema nullo. Quando i sistemi caratteristici siano individuati, sia nella loro legge di variazione $f(x_1)$, sia nella loro distribuzione sul luogo $x_1 = \text{costante}$, una perturbazione qualunque puo' considerarsi interamente determinata quando si conoscano i coefficienti mediante i quali essa puo' essere rappresentata come combinazione di tensioni caratteristiche. Per questa via possono ottenersi risultati di carattere generale, compendiabili in grafici o tabelle, atti a fornire indicazioni quantitative sugli effetti della perturbazione.