CAPITOLO I

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

I.1 - Spostamenti e dilatazioni. Sia P (fig.1) un punto del corpo in uno stato che diciamo *iniziale*; x, y, z siano coordinate cartesiane ortogonali di P. Il corpo stesso subisca una trasformazione per la quale il punto materiale situato in P si porti in P': il vettore $\vec{\eta}$ che va da P a P' e' detto *spostamento* di P; le componenti di $\vec{\eta}$ sui tre assi coordinati sono indicate con u, v, w.

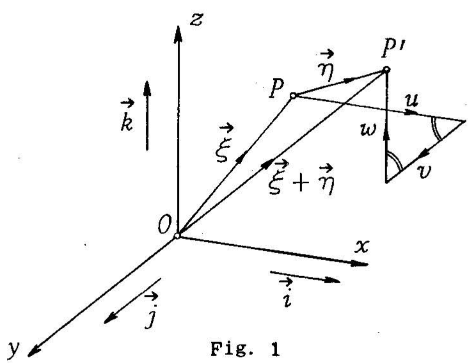

Fig. 1

Come P, cosi' gli altri punti del corpo si sposteranno; supporremo che in tutto lo spazio occupato dal corpo si sappiano calcolare gli spostamenti: ossia che u, v, w siano funzioni assegnate di x, y, z. Sia A' (fig.2) la posizione in cui viene a portarsi il punto materiale che nello stato iniziale si trova in A; detta l la distanza PA, si indichera' con $l + \delta l$ la lunghezza del segmento $P'A'$. Se, comunque si scelgano nel corpo i punti P, A, si constata che $\delta l = 0$, ossia che la distanza non si modifica, cio' significa che il corpo ha subito un moto rigido. Si ha invece una *deformazione* se le posizioni relative dei punti del corpo risultano alterate. Nelle considerazioni che svolgeremo in questo capitolo non entrano in questione le cause che provocano la deformazione, siano esse l'applicazione o la rimozione di un carico, una variazione di temperatura o un processo chimico: l'esame geometrico della deformazione ha valore in ogni caso. La situazione per cui sia identicamente $\delta l = 0$, rientra come caso particolare in queste considerazioni: diremo percio' che il corpo subisce una *deformazione nulla* se esso esegue un moto rigido.

Si consideri una linea a che collega A a P. Si supporra' che il corpo sia continuo, sicche', se a non ne attraversa il contorno, in ogni suo punto esista una particella. Diremo *fibra* una linea continua di punti materiali. Siano A'_1, $A'_2, \ldots$ i punti che nella deformazione corrispondono ai punti $A_1 A_2, \ldots$ della fibra a posti a distanze $l_1, l_2, \ldots$ sempre piu' piccole da P; i punti A'_i si accosteranno a P' percorrendo una curva a', trasformata di a nella deformazione.

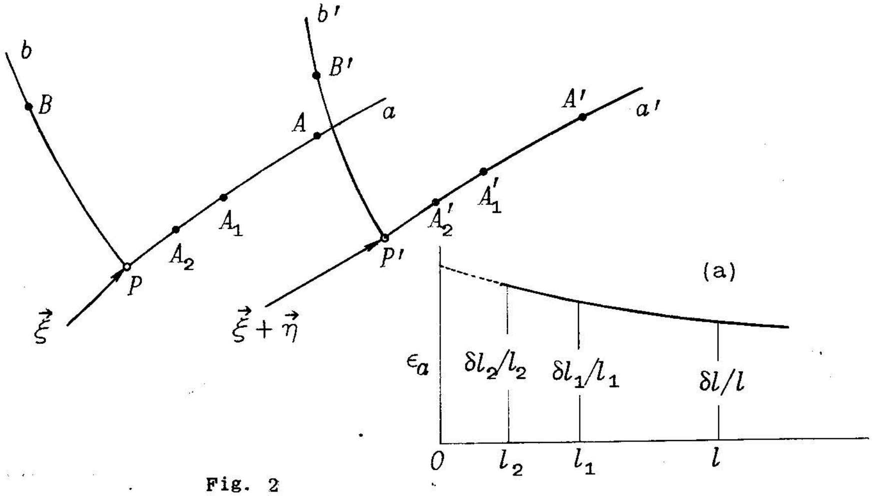

Fig. 2

Detta $l_i + \delta l_i$ la distanza $P'A'_i$ diremo ***dilatazione*** della fibra a in P il limite ϵ_a verso cui tende il rapporto $\delta l_i / l_i$ all'approssimarsi di A_i a P: in altri termini, l'elemento dl della fibra a prossimo a P assume la lunghezza $(1 + \epsilon_a)dl$ a deformazione avvenuta.

La determinazione analitica della dilatazione ϵ_a non presenta difficolta', come vedremo, quando u, v, w siano funzioni note delle coordinate x, y, z. La determinazione sperimentale non e' altrettanto semplice. La misurazione di δl viene effettuata mediante strumenti detti ***estensimetri***. La lunghezza iniziale l del segmento PA e' detta ***base*** di misura. Volendo conoscere il limite del rapporto $\delta l / l$ per $l \to 0$ si dovranno installare estensimetri con basi sempre piu' corte (e percio' strumenti piu' delicati) e, dal diagramma dei quozienti $\delta l / l$ (fig.2a) dedurre per estrapolazione il valore della ϵ_a locale in P come ordinata per $l = 0$. In realta' spesso il diagramma della fig.2a presenta una variazione limitata si' che il rapporto $\delta l / l$ misurato su una base abbastanza corta puo' valere a indicare la ϵ_a locale.

Dalle definizioni risulta che la dilatazione ϵ, come δl, e' positiva se il segmento l si allunga nella deformazione;

se il segmento si accorcia, la ϵ e' negativa. Non avverra' pero' mai che ϵ scenda ad un valore ≤ -1: infatti, per $\epsilon = -1$, la lunghezza $(1+\epsilon)dl$ dell'elemento deformato si annullerebbe, cio' che e' fisicamente assurdo.

I.2 - Deformazioni piccolissime. Ci varremo nel' seguito delle semplificazioni che derivano dall'ipotesi che u, v, w siano quantita' piccolissime a fronte di qualsiasi dimensione del corpo. Cosi', del resto, si e' fatto nella Parte I quando, ad es., nel calcolare il momento di una forza se ne misurava il braccio con riferimento alla configurazione della struttura indeformata. Cosi', se in un'espressione termini lineari in u, v, w e loro derivate rispetto alle coordinate si sommano a termini quadratici, questi ultimi verranno cancellati. Lo stesso trattamento si usera' per le caratteristiche di deformazione, come ϵ; queste infatti, se gli spostamenti $\vec{\eta}$ sono ovunque piccoli, saranno piccole dello stesso ordine. Anzi, ove si sovrapponga un moto rigido finito ad una deformazione piccolissima, potrebbero aversi spostamenti $\vec{\eta}$ rilevanti pur con ϵ piccole. Una tale situazione non puo' essere analizzata con le espressioni piu' avanti indicate, semplificate dalla cancellazione dei termini quadratici come s'e' detto.

Naturalmente questa e' un'approssimazione che limita il campo di validita' della nostra analisi. Esistono infatti fenomeni per il cui studio quella semplificazione deve essere abbandonata. Tuttavia i risultati a cui essa conduce hanno validita' assai piu' ampia di quanto a prima vista possa apparire.

I.3 - Componenti della deformazione. Indicando con ϵ_x la dilatazione della fibra parallela all'asse x, si trova la espressione:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad [1]$$

Questa relazione e' giustificata dalle considerazioni della fig.3: il segmento elementare PA si trasforma nel segmento $P'A'$ la cui lunghezza, per definizione pari a $1+\epsilon_x$ volte la lunghezza iniziale, e' misurata dalla sua proiezione su x, poiche' per la supposta piccolezza degli spostamenti deve considerarsi unitario il coseno dell'angolo che $P'A'$ fa con x; semplificando l'eguaglianza si ottiene la [1], la cui deduzione rigorosa e' svolta nell'appendice A3.

Analogamente per le dilatazioni delle fibre parallele agli assi y e z si hanno le espressioni:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad [2],[3]$$

Il complemento dell'angolo che a deformazione avvenuta formano due fibre inizialmente parallele agli assi x e y si chiama *scorrimento* γ_{xy} *delle direzioni* x,y. Analogamente si definiscono gli scorrimenti γ_{yz}, γ_{zx}. Tali quantita' si ottengono dalle componenti di spostamento mediante le relazioni:

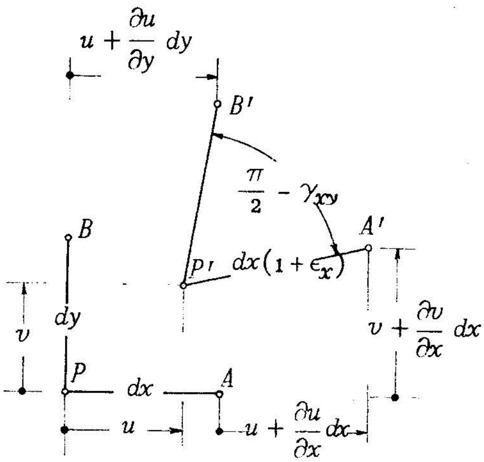

Fig. 3

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad [4]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad [5]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad [6]$$

la cui deduzione e' svolta nell'appendice A3. La giustificazione appare dalla fig. 3: le fibre elementari PA, PB nella deformazione vengono in $P'A'$, $P'B'$ subendo le rotazioni $\partial v/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ rispettivamente, cosicche' il loro angolo varia di γ_{xy} secondo l'espressione [4]. Si osservi che lo scorrimento e' positivo se l'angolo inizialmente retto delle direzioni positive diventa acuto.

Le tre dilatazioni $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ e i tre scorrimenti γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} definiscono completamente lo stato di deformazione dell'intorno del punto P: ossia, in base a questi sei valori, detti *componenti speciali di deformazione*, si puo' calcolare la dilatazione di una fibra comunque diretta, dell'intorno di P, e lo scorrimento di due direzioni ortogonali generiche. Le espressioni [A19], [A16] della dilatazione e dello scorrimento sono lineari nelle componenti speciali e quadratiche nei coseni direttori $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ e $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ delle direzioni considerate.

Nell'intorno di un punto qualunque P del corpo esistono sempre tre direzioni ortogonali che si mantengono perpendicolari nella deformazione, ossia che non manifestano scorrimenti: queste sono dette *direzioni principali della deformazione* e i relativi coefficienti $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sono detti *dila-*

tazioni principali. La loro determinazione richiede nel caso generale la risoluzione di un'equazione di terzo grado, come si mostra nell'appendice A5. Puo' avvenire che due di questi valori, poniamo ϵ_1, ϵ_2 siano fra loro uguali; in questo caso tutte le direzioni ortogonali alla direzione in cui si ha la dilatazione ϵ_3 presentano la medesima dilatazione ϵ_1 e conservano inalterati gli angoli che fanno fra loro. Caso del tutto speciale e' quello in cui $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$, per il quale qualunque terna di direzioni ortogonali puo' essere assunta come principale.

Il valore massimo della dilatazione fra tutte le fibre dell'intorno del punto si trova secondo una delle direzioni principali: anche la dilatazione minima e' data da una delle ϵ principali.

I.4 - Congruenza della deformazione. Lo stato di deformazione di un corpo puo' essere completamente definito dando punto per punto le tre componenti dello spostamento $\vec{\eta}$, oppure dando le sei componenti della deformazione. Poiche' le due formulazioni debbono essere equipollenti, e' ovvio che le sei componenti di deformazione non possono essere fissate indipendentemente. Difatti si trova che le ϵ e le γ sono legate dalle relazioni [A22]-[A27]. Ad interpretare il significato geometrico di tali condizioni valgono le considerazioni seguenti.

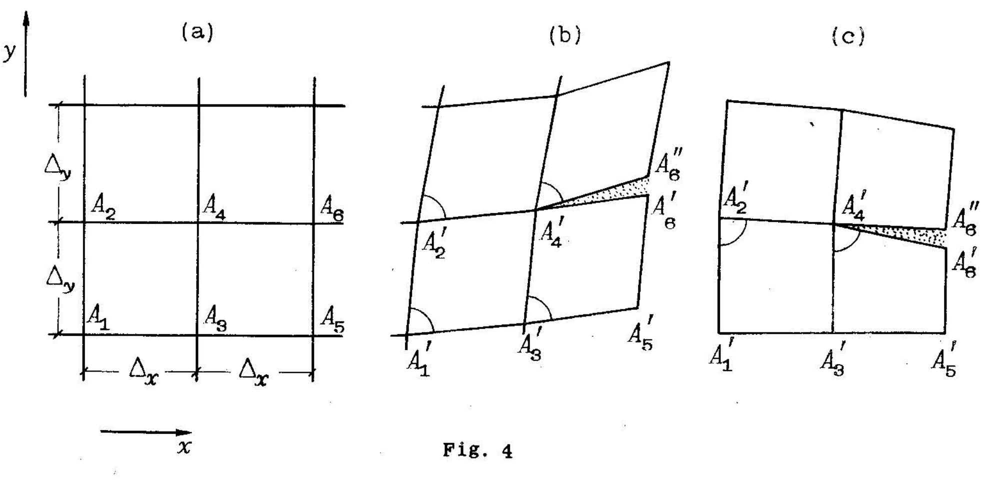

Fig. 4

Scomposto il corpo in cubetti elementari, si imprima ad ognuno di essi, preso isolatamente, la deformazione corrispondente ad assegnate funzioni ϵ, γ di x, y, z. In generale gli elementi deformati non potranno essere giustapposti in modo da formare un corpo continuo: si dovra' consentire la formazione di vani o di penetrazioni qualora le condizioni di congruenza non siano soddisfatte. La condizione [A22] ad es., vale ad assicurare che fra le facce dei cubetti situate in un piano z = costante non si producano sconnessioni come quelle indicate nelle figg.4b e 4c (*). La [A25] assicura che fra le facce normali a x non si produca la sconnessione rappresentata nella fig.5.

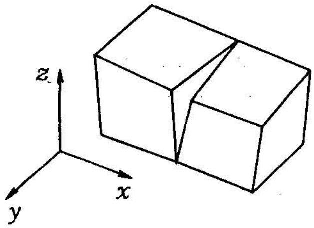

Fig. 5

Un'osservazione scaturisce immediata dalla ispezione delle equazioni [A22]-[A27]: queste sono relazioni omogenee fra le derivate seconde delle componenti della deformazione; quindi qualsiasi situazione per la quale tali componenti siano funzioni lineari delle coordinate x, y, z rappresenta una deformazione congruente. Ad es., in un corpo omogeneo una variazione di temperatura rappresentata dalla legge

$$t = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \qquad (c_0, c_1, c_2, c_3 = \text{costanti})$$

(*) Si consideri anzitutto l'effetto dello scorrimento γ_{xy} sulle facce situate in un piano z = costante (fig.4). Queste si trasformeranno in parallelogrammi (fig.4b). Indichiamo con γ_1 il complemento dell'angolo marcato presso A_1'; e cosi'per gli altri vertici. L'angolo di sconnessione punteggiato in figura ha il valore $\gamma_4 - \gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_3$; dividendolo per le lunghezze Δ_x, Δ_y e facendo tendere queste a zero si trova

$$\frac{\gamma_4 - \gamma_2}{\Delta_x \Delta_y} - \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\Delta_x \Delta_y} \rightarrow \frac{1}{\Delta_y}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}$$

Consideriamo ora gli effetti della dilatazione ϵ_y dando al lato $A_1 A_2$ la dilatazione ϵ_1 e mantenendo retto l'angolo in A_1'; e similmente nei corrispondenti vertici delle altre maglie (fig.4c). Si trova cosi' che il complemento dell'angolo marcato presso A_2' vale $\Delta_y(\epsilon_1 - \epsilon_3)/\Delta_x$ e quello presso A_4' e' $\Delta_y(\epsilon_3 - \epsilon_5)/\Delta_x$. Dividendo quindi per $\Delta_x \Delta_y$ l'angolo di sconnessione punteggiato nella fig.4c si ha il valore, al limite

$$\frac{2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_5}{\Delta_x^2} \rightarrow - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

Sovrapponendo gli effetti delle varie componenti di deformazione, si trova che il rapporto fra l'angolo di sconnessione risultante e il prodotto $\Delta_x \Delta_y$ e' dato al limite da $\partial^2 \gamma_{xy}/\partial x \, \partial y - \partial^2 \epsilon_y/\partial x^2 - \partial^2 \epsilon_y/\partial y^2$. Tale interferenza si annulla se e' verificata l'equazione [A22].

da' luogo ad una deformazione che, se non e' ostacolata dai vincoli, si puo' produrre da sola, senza coazioni.

Le sei equazioni [A22]-[A27] sono da considerare condizioni necessarie nel senso che se si mancasse di soddisfare ad una di esse non sarebbe possibile trovare un sistema di spostamenti u,v,w che attui siffatta deformazione. D'altra parte e' facile controllare che, se le [A25]-[A27] sono verificate in ogni punto, bastera' che la [A22] sia soddisfatta in un certo punto perche' essa sussista lungo tutta la parallela a z che passa per il punto stesso. Percio' potremmo considerare solo le [A25]-[A27] come condizioni ***indefinite*** di congruenza, da verificare in ogni punto, mentre, per quanto riguarda le [A22]-[A24] basterebbe controllare che ciascuna di esse sia soddisfatta sul contorno del corpo.

Quando si conoscano le componenti della deformazione e queste verifichino le [A22]-[A27], si puo' procedere mediante integrazioni al calcolo degli spostamenti. Questi restano definiti a meno di un moto rigido.

Le proprieta' sopra indicate sussistono, come s'e' detto, qualunque sia la natura del corpo che si deforma e qualunque sia la causa che origina la deformazione, sempre che u,v,w e derivate, siano quantita' cosi' piccole da giustificare la linearizzazione attuata.