

Storia del principio dei lavori virtuali

SERGIO CAVALLONE
Politecnico di Bari
Università di San Marino

"La memoria conserva i fatti osservati, le rappresentazioni li riproducono, i pensieri li ricostruiscono".

Ernst Mach

La Meccanica nel suo sviluppo storico-critico - 1883

SI VUOLE PARLARE della storia più che millenaria del "principio dei lavori virtuali": di come ne emergesse un caso particolare nell'antichità greca e di come, dopo un lungo silenzio, i casi si moltiplicassero nel '600 creando la convinzione che andassero tutti nella medesima direzione.

Si intende illustrare come, nel secolo successivo, con la scoperta dell'analisi infinitesimale, si pervenne alla sensazione di un principio generale che si potesse porre a fondamento di tutta la meccanica.

La storia che viene dopo presenta minori difficoltà interpretative, ma si cercherà di vedere dove siano andate oggi a collocarsi le difficoltà.

Moventi del lavoro sono, da un lato, l'opinione che si possiedano meglio le cose quando si sappia di dove e come si siano formate; dall'altro il desiderio di portare, nel cuore dell'ambiente dei pratici, emozioni delle quali talvolta mostrano il rimpianto, tornando a pensare alle loro vecchie scuole.

Forse anche questa è una componente della inesausta querelle "Università - Industria".

Se è così sia accetto l'apprezzamento per la Rivista dell'ANIMP, l'Associazione dove convivono "laici" e "scolasti", benché diversamente oppressi dalla perigliosità del vivere e, s'intende, diversamente incidenti sulle cose del mondo.

Soddisfatto un obbligo non di circostanza, l'Autore sente di dover prevenire i lettori della modestia di ciò che qui potranno trovare, sia perché l'argomento è difficile, sia perché egli si trova al caso che il Foscolo faceva pesare con cattiveria a Vincenzo Monti "Cavaliere", come scrisse, "gran traduttore dei traduttori d'Omero".

L'Autore può tuttavia assicurare che i traduttori che egli traduce sono quelli più accreditati e basterà verificarlo scorrendo la bibliografia di questo lavoro.

Vengono illustrati i difficili passi che portarono, nel corso dei secoli, alla definizione di un principio fondamentale di tutta la meccanica.

INQUADRAMENTO

Storia sincronica o diacronica?

La storiografia della scienza ha sempre sollevato problemi più delicati di quelli della storia della tecnologia (Kragh, 1987).

Nella concezione sincronica di Truesdell (1968 - 1980) la scienza del passato si studia alla luce delle conoscenze successive e ciò sembra inevitabile quando si vogliono rendere i contenuti antichi secondo il formalismo moderno.

L'ideale diacronico di Collingwood (1939) vuole invece rendere la scienza del passato alla luce delle effettive situazioni e concezioni dell'epoca.

In tal caso lo storico si comporta come un osservatore "nel passato" e non "del passato".

Herbert Butterfield (1951) chiama "whig interpretation" la storia sincronica che definisce, a renderne la singolarità, come "unhistorical history writing" come qui si procura di fare.

Ordinamento

Il discorso è così organizzato:

- antichi enunciati;
- analisti del secolo 18°;
- spostamenti virtuali di sistemi olonomi;
- fisici e ingegneri del secolo 19°;
- conservazione delle difficoltà.

ANTICHI ENUNCIATI

Orientamento

"Un principio è sempre l'osservazione di un fatto" (Mach, 1883). Mach rilevava che il compito di chi fonda una nuova scienza è del tutto diverso da quello di chi gli succede e richiede più ingegno di quanto si creda.

Egli pensava che le cause della rottura dell'equilibrio, cuore del problema dei lavori virtuali, non si lasciassero trovare per ragionamento ma soltanto dall'esperienza.

Ciò induce a pensare che gli antichi guardarono effettivamente le cose come stavano e non se le immaginarono soltanto anche se, dopo un lungo lavoro di pulitura, è risultato evidente che sbagliarono molto e spesso.

Chi venne dopo, invece, guardò la realtà fisica ridu-

cendola nella mente a oggetti ideali e teorici e pote andare più lontano.

Ci è difficile comprendere come gli uni e gli altri vedessero veramente le cose, ma noi, che siamo saliti sulle loro spalle, possiamo vedere un più ampio orizzonte e dobbiamo tenere in gran conto la raccomandazione di Kuhn di non chiedere loro, puerilmente, ciò che non potevano ancora aver visto.

L'antichità greca

I Greci si occuparono soprattutto di statica e in tale campo una figura eminente è certamente Archimede che studiò l'equilibrio della bilancia ma non poté evitare un sofisma introducendo nel ragionamento ciò che intendeva dimostrare cioè, nel linguaggio odierno, l'eguaglianza dei momenti.

Il fatto è che il suo modo di pensare era statico e il procedimento di trasportare pesi collocandoli a egual distanza dal fulcro, se non modificava l'equilibrio della bilancia, avrebbe ben modificato il periodo di oscillazione del pendolo composto.

Un secolo più tardi Aristotele considerava lo stesso problema in modo assai differente, passando da una geometria statica a un criterio dinamico.

"Il peso che è mosso - scrisse - sta al peso motore in ragione inversa dei bracci della leva".

Con brevità classica concludeva: "Le proprietà della bilancia sono ricondotte a quelle del cerchio, le proprietà della leva a quelle della bilancia; infine, la maggior parte delle altre proprietà dei movimenti meccanici alle proprietà della leva".

Seguendo questo enunciato si sarebbe giunti, dopo 2000 anni, al teorema (in verità principio) dei lavori virtuali.

Aristotele, come Euclide, aveva introdotto nei problemi dell'equilibrio lo spazio.

Tuttavia, la dinamica antica fu rudimentale: Aristotele affermava cose inconciliabili e tali, o pressappoco, rimasero almeno fin verso il termine del secolo 16°.

Il secolo 17°

A meno di alcune intuizioni dinamiche medioevali (Giordano Nemorario) il primo passo serio si verificò con Galileo. La sua creazione della meccanica (Padova, 1543 - 1599) non si svolse proprio nel vuoto se Duhem (1905 - 1906) ritenne di poter considerare Giordano

Nemorario un precursore di Leonardo, il quale considerava la meccanica una scienza matematica.

Benché non si conoscano tutte le letture di Galileo, alcune sue riflessioni del genere: "Quanto si guadagna in forza si scapita nel tempo e nella velocità" si trovano anche in Leonardo (Lecornu, 1922), che vedeva una forza accrescersi durante il rallentamento di un movimento: di ruota in ruota, di leva in leva e di vite in vite. Leonardo riesaminò anche, nel suo modo molto personale, commettendo del resto qualche notevole errore, l'antico problema del piano inclinato (Pappo), una delle cosiddette potenze (macchine) di Erone, i cui comportamenti trovarono una sistemazione impeccabile e razionale in Galileo, che ebbe due meriti principali.

Il primo è di aver correttamente espresso le condizioni di equilibrio di due pesi diseguali: l'uno poggiato sul piano inclinato liscio, l'altro (il peso motore) pendente dal piano (Figura 1):

"Essendo che se intenderemo, nel triangolo ABC la linea AB essere il piano dell'orizzonte, AC piano elevato la cui altezza sia misurata dalla perpendicolare CB, un mobile posto sopra il piano AC, e ad esso legata la corda EDF, e posta in F una forza od un peso, il quale alla gravità del peso E abbia la medesima proporzione che la linea BC alla CA, [...] il peso F calerà al basso tirando sopra il piano elevato il mobile. E, né maggior spazio misurerà detto grave F nel calare al basso di quello che si misuri il mobile E sopra la linea BC. Ma qui però si deve avvertire che, se bene il mobile E avrà passata tutta la linea AC, nel tempo medesimo che l'altro grave si sarà per eguale intervallo abbassato, niente di meno il grave E non si sarà discostato dal centro comune delle cose gravi più di quello che sia la perpendicolare CB; ma però il grave F, discendendo a perpendicolo, si sarà abbassato per spazio uguale a tutta la linea AC.

E [...] però potremo meritatamente dire, il viaggio della forza F al viaggio della forza E mantenere quella istessa proporzione, che ha la linea AC alla CB, cioè il peso E al peso F".

Il secondo è di aver chiaramente identificato nel lavoro l'elemento di rottura dell'equilibrio benché la nozione stessa non ne fosse ancora stata proposta.

Il famoso Stevino, ingegnere militare olandese, collocò lo stesso antico problema di Pappo Alessandrino in un più ampio contesto ed espresse a suo modo ciò che

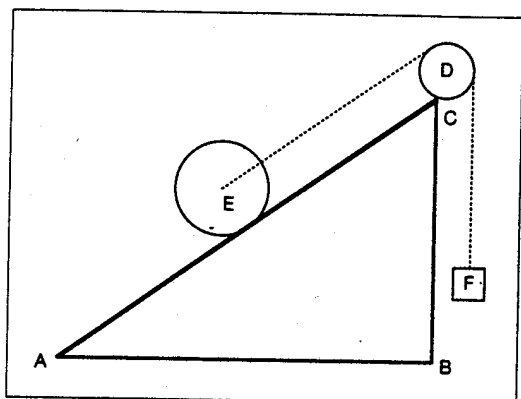


Figura 1 Galileo: "Le Meccaniche", -Padova, 1593 - 1599.

avevano detto Aristotele e Galileo: "ut spatium agentis ad spatium patientis sic potentia patientis ad potentiam agentis".

Il trattato di Torricelli del 1644 sul moto discendente dei gravi e dei proiettili espresse, in un nuovo linguaggio (nel frattempo Huygens aveva precisato il concetto di baricentro) sempre ancora la stessa cosa, affermando ciò che Galileo aveva chiamato la "regola d'oro della meccanica".

Egli disse (Principio di Torricelli): "Due gravi legati insieme non possono muoversi spontaneamente a meno che il loro [comune] centro di gravità non discenda".

Finora, qui e là ci si accostava abbastanza occasionalmente alle velocità e dunque agli infinitesimi, peraltro non ancora definiti. Una novità in questo senso si ebbe con Cartesio, quando identificava (Benvenuto, 1981) il moto incipiente in una sua lettera del 1647 a Huygens: "Notate che io dico cominciare a discendere e non semplicemente discendere, poiché è l'inizio della discesa quel che deve essere considerato".

Cosa accadde veramente?

Non è tanto facile rispondere.

Se si adotta, come in effetti si dovrebbe, un'attitudine diacronica, si resta privi della luce di Newton.

Tuttavia, ... tuttavia ci si può aiutare rivolgendosi a ciò che pensavano, del moto sotto l'azione di forze, Aristotele e Galileo.

Galileo identificava in modo netto il principio di inerzia, mentre Aristotele aveva trasmesso, fino a Pappo e ben oltre nel tempo, l'idea che una forza dovesse costantemente spingere un corpo in movimento che,

in mancanza di essa, si sarebbe subito fermato anche su di un piano orizzontale.

Il fatto è che Aristotele mancava della percezione astratta del moto depurato delle resistenze passive e la differenza è proprio incolumabile.

Non si può andare al fondo del principio dei lavori virtuali senza la visione di Galileo che egli, con il suo immenso prestigio, diffuse energicamente in tutta l'Europa. Non senza resistenze, talvolta inconsapevoli: le dimostrazioni di stile medioevale (caso per caso e per lo più geometriche) di Stevino non piacevano a Mach, che le riteneva un fossile dei secoli precedenti.

Di maggiore interesse è l'intuizione di Cartesio.

Di dove la trasse se, ci dicono gli storici, il suo rapporto con la meccanica fu sempre piuttosto sterile per la pretesa di considerarla alla stregua di una mera questione di logica?

Il suo solo criterio di verità fu l'evidenza di ragione ma questo, ci dice Mach, non basta a scoprire le proprietà del mondo materiale attraverso ragionamenti a priori.

Si deve allora ritenere che contemplando l'equilibrio dei congegni meccanici del suo tempo egli si sforzasse di perturbarlo mentalmente, in modo da non riuscirci, per coglierne la natura? In tal caso, il moto incipiente (atto di moto) su cui insisteva sarebbe al suo posto e, di più, saremmo entrati nello spirito stesso della forma che il principio avrebbe finito per prendere.

E del resto, l'analisi infinitesimale era nell'aria, stava già per prendere forma nelle menti di Newton e di Leibnitz e questo passaggio agli spazi e agli intervalli di tempo piccolissimi si sarebbe, in un modo o nell'altro, verificato.

ANALISTI DEL 18° SECOLO

L'atmosfera delle idee

Scoperta l'analisi infinitesimale tutto cambiò nel modo di esprimersi e di pensare.

Naturalmente, non la sola analisi ne fu responsabile, ma essa vi apportò un notevole contributo quando ci si convinse di poterne ottenere buone rappresentazioni dei fatti della natura: rappresentazioni dalle quali, soprattutto, era possibile trarre conseguenze certe.

La nuova analisi, si è detto, non fece tutto da sola, ché si ebbero anche effetti vistosi di un modo affatto nuovo di rappresentarsi le verità di ragione, un fatto grandioso

che qui basterà evocare, ricordando che questo è il secolo dei lumi e che culminò nella rivoluzione francese.

Si vedrà subito come i modi dell'indagine scientifica del '600 si mutassero nell'attitudine a far discendere ogni cosa da un qualche principio che, per essere ritenuto efficiente in un gran numero di casi particolari, si potesse ragionevolmente assumere come comportamento costante della natura, anche se non si fosse riusciti a farsene sempre una ragione matematicamente provata per necessità e sufficienza.

Quest'ultima aspirazione fu comunque presente fin dall'inizio e si rafforzò nel periodo che, dalle convinzioni religiose di Cartesio, attraverso le idee metafisiche e tardive di Maupertuis, sarebbe giunto, prima del termine del secolo, con Eulero, Legendre e Lagrange, a una tendenza verso la generalità e la dimostrazione.

La convinzione di una intrinseca stabilità del mondo naturale, secondo il modello dell'orologio, assicurava tuttavia gli studiosi del significato ultimo e permanente delle loro indagini.

La meccanica analitica di Lagrange

Il principio dei lavori virtuali non prese a respirare davvero nella generalità che gli si poteva accordare fino al 1715 (o 1717), quando Jean Bernoulli rispondeva con queste parole a un quesito postogli da Varignon:

"Immaginate molte forze differenti che agiscono secondo differenti direzioni per tenere in equilibrio un punto, una linea, una superficie o un corpo. Immaginate di imprimere a tutto il sistema di queste forze un piccolo movimento [...] sia di traslazione, sia di rotazione e vi sarà facile comprendere che per questo movimento ognuna di tali forze avanzerà o si ritrarrà nella sua direzione, a meno che qualcuna delle forze non abbia direzione perpendicolare a quella del piccolo movimento, nel qual caso non si sposterà".

Jean Bernoulli chiamava "velocità virtuali" questi avanzamenti ed "energie" il prodotto della forza per la velocità virtuale corrispondente concludendo: "Ebbene io pongo questa proposizione generale: in ogni equilibrio di forze qualunque [...], la somma delle énergies positive sarà eguale alla somma delle énergies negative prese positivamente".

Questa lettera, pubblicata nell'edizione del 1725 della "Nouvelle Mécanique" di Varignon, non sfuggì all'at-

tenzione di Lagrange e con lui si arrivò di colpo alla formulazione completa e, per quanto era allora possibile, generale.

È bene dire subito che Lagrange eresse il principio dei lavori virtuali, che è un principio di equilibrio, (intorno alla metà del Secolo D'Alembert aveva dato le ragioni per la riduzione della Dinamica alla Statica) a sostegno dell'intera meccanica di cui delineava la facies e l'ordinamento che noi conosciamo.

Nel 1788 Lagrange, che aveva lasciato, per Parigi, l'Accademia delle Scienze di Berlino, pubblicava la "Mécanica Analytique", che aveva fatto rivedere a Legendre. Come vi figurava il principio, come lo chiamava, delle "velocità virtuali?"

"Il principio delle velocità virtuali - scrisse - può essere reso generalissimo enunciandolo nel seguente modo: se un sistema qualsiasi, composto di un numero qualsiasi di punti o di corpi, sollecitati ciascuno da forze qualunque è in equilibrio; e se si dà a questo sistema un piccolo movimento qualsiasi, in virtù del quale ciascun punto percorrerà uno spazio infinitamente piccolo, che esprimerà la sua velocità virtuale, allora la somma delle forze, moltiplicate ciascuna per lo spazio percorso (nella sua direzione) dal suo punto di applicazione, sarà sempre uguale a zero; considerando come positivi i piccoli spazi percorsi nello stesso senso; e come negativi gli spazi percorsi in senso opposto.

Giovanni Bernoulli è il primo, ch'io sappia, che abbia intuito questa grande generalità del principio delle velocità virtuali [...] è ciò che si vede in una delle sue lettere a Varignon, in data 1717 [...].

Questo stesso principio ha dato luogo in seguito a quella che Maupertuis ha proposto [...] nel 1740 sotto il nome di "Lois du repos" e che Eulero ha sviluppato in seguito e reso più generale [...].

Credo di poter sostenere che tutti i principi generali che si potessero ancora scoprire nella scienza dell'equilibrio non sarebbero che questo stesso principio delle velocità virtuali, diversamente considerato.

[...] Ma questo principio non è soltanto semplicissimo e generalissimo: esso presenta, in più, il vantaggio unico di potersi tradurre in una formula generale, la quale contiene tutti i problemi che si possono proporre sull'equilibrio dei corpi [...].

Quanto alla natura del principio delle velocità virtuali,

bisogna convenire ch'esso non è abbastanza evidente in se stesso per poter essere assunto come principio positivo; ma si può considerarlo come l'espressione generale delle leggi dell'equilibrio, dedotte dai due principi che abbiamo ora ricordati [...]"

Vanno notate subito alcune cose:

- si incontra per la prima volta, in questo resoconto, la legge "del riposo" (oggi principio di minima azione) di Maupertuis, una tra le numerosissime conseguenze del principio;
- a perfezionamento dell'impostazione di Jean Bernoulli si parte ora da un sistema di punti sollecitati da forze, creando un modello che sarà utilizzato per la dimostrazione sul tipo di quelle, successive, di Fourier e Cournot;
- tutti i Principi generali dell'equilibrio che si potessero ancora enunciare (lo fecero successivamente, per esempio, Gauss ed Hertz) sarebbero sempre e soltanto espressioni diverse di quello stesso principio delle velocità virtuali;

• il principio "non è abbastanza evidente in se stesso". Questi pochi cenni danno un'idea del grande progresso compiuto dal matematico italiano, il quale affermava che si poteva considerare il principio: "[...] come una specie di assioma della meccanica".

Nella prima edizione del suo lavoro egli non ne dette alcuna dimostrazione.

Lo fece però nella edizione del 1811.

La dimostrazione di Lagrange e le distinzioni di Fourier

Per stabilire la verità del principio delle velocità virtuali Lagrange ebbe l'idea, ingegnosa ma un po' complicata, di sostituire tutte le forze applicate a un sistema con le trazioni dovute a delle pulegge o taglie, disposte in modo da poter agire secondo direzioni e con intensità a piacere.

Tutte le taglie sono tese da un unico cavo ancorato a un punto fisso A mentre l'altro estremo sostiene un peso Q (Figura 2).

Fatto ciò Lagrange trovava che in un tale sistema, nel quale la sola forza esterna è il peso sospeso, la condizione di equilibrio è che il peso Q non potesse ulteriormente abbassarsi. In tal modo egli si riportava al principio di Torricelli, benché l'equivalenza tra i due

principi non sia completa come si vorrebbe. Infatti, a seconda del tipo di equilibrio, questo può determinarsi sia quando il peso si trova nella posizione più elevata possibile (e l'equilibrio è instabile) sia quando il peso si trova nella posizione più bassa (l'equilibrio è stabile), ma, si sa, il principio è insensibile alla particolare natura dell'equilibrio e la stabilità, instabilità o indifferenza erano ancora in attesa dell'analisi di Dirichlet (per le forze derivanti da un potenziale).

L'enunciato di Lagrange presuppone legami bilaterali (il moto può invertirsi) e privi di attrito.

L'ingegnosità della dimostrazione consisteva nella possibilità di far variare mentalmente l'assetto delle taglie e così dislocare variamente il peso in altezza, identificando le diverse situazioni di equilibrio o di non equilibrio nel quale ultimo caso il sistema avrebbe raggiunto la più prossima posizione stabile o indifferente (in tal modo Mach, nel suo famoso libro del 1883, presentava i ragionamenti sulla varietà fenomenologica del caso lagrangiano).

La scelta di Lagrange presenta anche il pregio di essersi orientata alle macchine semplici nelle quali gli spostamenti dei punti del sistema seguono, allo spostarsi del peso motore, traiettorie ben definite sicché gli spostamenti sono reversibili, come già si è notato, e univocamente determinati.

Ma l'importanza del principio è tale che si sentì presto la necessità di darne una dimostrazione più completa e il modello capostipite di ogni presentazione venne stabilito da Fourier (1768-1830).

Egli considerò dapprima un sistema di punti affatto liberi, osservando come la condizione di equilibrio del

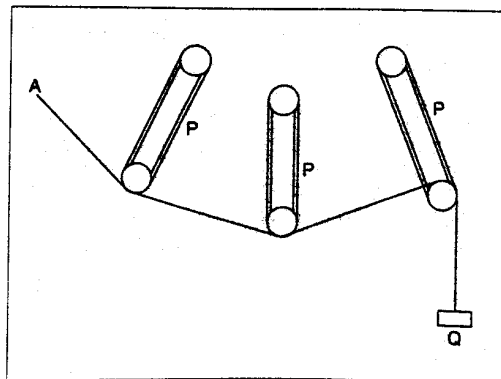


Figura 2 Lagrange: "Meccanica analitica", Parigi. 1788 - 1811.

del sistema esigesse che i singoli sistemi di forze loro applicati si risolvessero ognuno in una risultante nulla, cioè, con un diverso modo di parlare (non di pensare), che fosse nullo il lavoro di quelle forze per ogni spostamento "immaginabile" (e dunque "virtuale"). In questo primo passo si ammettono semplicemente il principio d'inerzia e l'indipendenza degli effetti delle forze.

Il secondo passo considera invece punti collegati da legami che chiameremo ormai "vincoli".

Che cosa succede quando si provi ad ammettere che nelle condizioni di equilibrio del sistema di punti vincolati sia nullo il lavoro complessivo delle forze vincolari in tutti gli spostamenti pensabili, dunque "virtuali?"

Al tenue prezzo di estendere il sistema di forze fino a includervi le forze vincolari, si è ricondotti al caso precedente e, pertanto, alle condizioni di equilibrio (del sistema di punti liberi).

Ma l'ipotesi di nullità del complessivo lavoro virtuale delle forze vincolari è giustificata?

Fourier rispose che ciò si verifica nei tre casi seguenti:

- 1) punti vincolati a una superficie, o linea perfettamente rigida e liscia;
- 2) punti mantenuti a distanza rigidamente invariabile;
- 3) solidi rigidi a contatto attraverso superfici perfettamente lisce.

Si noti che i casi 2) e 3) presuppongono la legge newtoniana di azione e reazione: tutti i vincoli sono bilaterali e privi di attrito, tutti i corpi sono considerati rigidi. Posti questi limiti si può effettivamente parlare di un teorema che si configura pertanto in termini fortemente idealizzati.

Per questa e, in verità, per qualche altra ragione più sottile, le dimostrazioni del teorema non sono mai pienamente soddisfacenti, mancando dei requisiti della necessità mentre, fin dai tempi di Lagrange, sono più conversevoli con i requisiti della sufficienza (Armillini, 1945).

Si giustifica quindi che sia più corretto, come largamente si usa fare, parlare di un principio nel senso (Moretti, 1956) che: "Una legge fondamentale, alla quale si possa applicare il processo deduttivo per trarne logicamente tutte le conseguenze in tutti i casi particolari possibili, prende il nome di principio appunto perché è l'inizio di una catena di deduzioni".

Cosa accadde veramente?

Due sono gli eventi principali nascosti dietro la cronaca: la diffusione dell'analisi infinitesimale e il sorgere del nuovo calcolo delle variazioni.

Questo, come onestamente riconobbe Eulero, nacque con Lagrange intorno alla metà del secolo e si sviluppò con il lavoro suo, di Eulero e di Legendre.

Il calcolo delle variazioni, sorto dai problemi isoperimetrici e di max-min (cercare l'area massima chiusa in un dato perimetro), voleva stabilire la forma da dare a una funzione affinché una particolare entità (detta funzionale) facente parte del problema, assumesse un valore estremale (max o min). L'impostazione originaria di Lagrange di un processo sistematico di selezione della forma della funzione, che sostituisse le precedenti soluzioni caso per caso che si erano avute, per esempio, al tempo del concorso dell'Accademia delle Scienze sulla brachistocrona (Jacques e Jean Bernoulli, L'Hospital, Newton) venne mantenuta e portò gli studiosi alla convinzione che certi comportamenti della natura fossero soltanto conseguenze della struttura matematica della questione e non, come si pensava prima, conseguenze di istanze religiose o metafisiche.

Questo orientamento del pensiero era un fatto nuovo e se ne coglie bene la formazione in Eulero ("Methodus inveniendi lineas curvas"):

"Poiché i corpi, in virtù della loro inerzia, resistono ad ogni cambiamento di stato, essi tendono ad obbedire il meno possibile alle forze agenti, se essi sono liberi. Dunque, nel moto prodotto l'effetto delle forze dovrà essere il minore possibile. La forza di questo ragionamento non è decisiva; siccome però si accorda con la verità, io non dubito che una metafisica più sana ci permetta di metterlo in maggiore evidenza. Ma io lascio questo impegno ad altri che si occupano di metafisica". Eulero ragionava così; Maupertuis, con idee che stavano invecchiando rapidamente, argomentava diversamente se, nel formulare la sua legge del "riposo", aveva intitolato il suo lavoro: "Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique", incorrendo nel sarcasmo di Voltaire, che l'aveva chiamato, per le sue inaudite pretese di sorprendere, nonché l'essenza, l'operosità quotidiana di Dio "le docteur Akakia".

"Insomma, mentre, prima di Lagrange, ogni problema di meccanica doveva venir trattato con un metodo dif-

ferente (ora il teorema della composizione delle forze, ora quello della leva ecc.) Lagrange, con la sua deduzione generale dal solo principio dei lavori virtuali, mostrava che qualsiasi problema poteva così porsi immediatamente in equazione, seguendo sempre le stesse regole e la questione è automaticamente ridotta a risolvere le equazioni che se ne ottengono, cioè al campo analitico, donde il nome di "meccanica analitica" dato al suo lavoro" (Armellini, 1945).

Benché in meccanica si usi procedere, quando conveniente, appellandosi direttamente a teoremi particolari, va ricordato che tutto proviene, dopo Lagrange, dalle sue equazioni che garantiscono quei particolari teoremi sicché, anche se non lo si vede nell'immediato, è il principio dei lavori virtuali ad assicurare la coerenza del tutto.

In quanto al calcolo delle variazioni esso chiarisce che il principio dei lavori virtuali ha carattere estremo, sicché i funzionali che vi sono collegati raggiungono valori min-max e non sempre e soltanto min come aveva pensato Maupertuis.

Tali condizioni comportano poi diverse categorie di equilibrio (stabile, instabile, indifferente) come fu poi chiarito da Dirichlet.

Il principio, tuttavia, non rileva le differenze: per esso l'equilibrio (di qualunque tipo) è l'equilibrio e basta.

SPOSTAMENTI VIRTUALI DI SISTEMI OLONOMI

Finora si sono incontrati personaggi i quali, con un lungo processo, e lasciando per strada molte aspirazioni, avevano infine trovato il modo di modellare matematicamente la realtà affinché la sua forma, intelligentemente idealizzata, muovendosi con operazioni sicure nella loro mente, si accordasse ai comportamenti del mondo osservato e la percezione di uno stato di equilibrio apparisse loro per ogni caso possibile, come non aveva potuto essere prima, in luogo di una inspiegabile constatazione, una convinzione ottenuta attraverso ragionamenti, di forma prestabilita, su enti teorici.

Compendiato ciò che finora si è visto, è bene notare che tutto, o quasi, si imperniava sui sistemi olonomi i cui esempi emblematici sono il punto e il corpo rigido (suddivisibile in punti vincolati).

Con un salto sincronico al poi un sistema è olonomo

se la configurazione spaziale dei punti che lo costituiscono può essere individuata da un numero limitato di parametri comuni a tutto il sistema.

Quando vi siano delle restrizioni per le posizioni reciproche di alcuni di essi, il numero di tali parametri (o gradi di libertà) viene ridotto e ciò comporta l'esistenza di un certo numero di equazioni che oggi si chiamano "vincoli".

In generale i "vincoli" così intesi possono essere, o meno, dipendenti dal tempo (reonomi o scleronomi).

Nel caso di vincoli variabili nel tempo per un sistema olonomo ad n gradi di libertà, quindi n coordinate lagrangiane q_k ($K = 1, 2, \dots, n$), il vettore posizione di un punto (t è il tempo) è espresso nella forma:

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

e la sua velocità sarà:

$$V_i = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt}$$

posto:

$$v_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt}$$

si ottiene:

$$V_i = \frac{\partial P_i}{\partial t} + v_i \quad (V_i = v_i \text{ nel caso scleronomo})$$

Allora la velocità "effettiva" V_i di un punto del sistema olonomo è la somma di due vettori, il secondo dei quali (v_i) è la velocità che il punto P_i assumerebbe qualora i vincoli rimanessero, in un piccolo intervallo intorno all'istante t , gli stessi che nell'istante t stesso.

Se il punto è vincolato a percorrere una linea, v è la sua velocità sulla linea che resta eguale a se stessa.

Se la linea varia col tempo occorre aggiungere a v il vettore $\partial P/\partial t$, che essendo tangente alla traiettoria effettiva del punto non può essere, in generale, tangente alla linea.

Moltiplicata per dt , l'ultima relazione diventa:

$$dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial t} \cdot dt + \delta P_i$$

che è una relazione fra spostamenti in cui:

- dP_i è lo spostamento "effettivo";
- δP_i è (in notazione lagrangiana) lo spostamento "virtuale".

Si vede che lo spostamento virtuale è, in generale, una parte di quello effettivo e coincide con quello effettivo solo nel caso (scleronomo) di vincolo invariabile nel tempo (dunque rigido). Ciò che importa è che lo spostamento virtuale, in quanto spostamento elementare, compatibile con i vincoli quali sono in un certo istante t , può essere concepito in modo affatto indipendente da quello che è, o sarà, il moto del punto.

Le seguenti riflessioni chiariranno meglio le differenze tra spostamenti virtuali ed effettivi.

1) Sia un Punto vincolato a muoversi su di una superficie fissa: ogni spostamento elementare a partire da una posizione data nel piano tangente è compatibile con il vincolo quale esso è in quell'istante, dunque è virtuale; esso è anche reversibile perché al punto è consentito di muoversi in ogni direzione. In un moto effettivo qualsiasi spostamento elementare si svolgerà nel piano tangente, allora uno spostamento effettivo coinciderà con uno degli infiniti spostamenti virtuali.

2) Sia un punto vincolato a non attraversare una superficie fissa (il vincolo è unilaterale): a partire da una posizione iniziale non a contatto con il vincolo ogni spostamento elementare è compatibile con il vincolo ed è dunque virtuale e naturalmente reversibile. In un moto effettivo uno spostamento elementare coinciderà con uno degli ∞^2 spostamenti virtuali. A partire dalla superficie di contorno si danno due tipi di spostamenti virtuali: reversibili sul piano tangente alla superficie di contorno, come nel caso 1); gli altri spostamenti sono irreversibili e allontanano il punto dalla superficie di contorno. Anche in questi casi uno spostamento elementare effettivo coincide con uno degli spostamenti virtuali.

3) Sia, infine, un punto vincolato a muoversi su una superficie in movimento (per esempio di traslazione): a partire da una posizione iniziale data ogni spostamento elementare nel piano tangente alla superficie è virtuale e reversibile ricorrendo il caso 1). In generale,

però, nessuno spostamento elementare effettivo coincide con uno spostamento virtuale. Il moto effettivo del punto consiste infatti di un moto relativo e di un moto di trascinamento e solo nel moto relativo lo spostamento effettivo coincide con uno degli spostamenti virtuali. Poiché la velocità di trascinamento non è in generale tangente alla superficie, lo spostamento effettivo composto non è tangente alla superficie e differisce pertanto da qualsiasi spostamento virtuale.

Ora si comprende meglio perché Cartesio avesse parlato di cominciamento del moto, Jean Bernoulli e Lagrange di spostamenti piccolissimi e di velocità virtuali. Il fatto è che queste raffinatezze non erano tanto funzionali all'uso dell'analisi quanto intrinseche alla natura del problema ("non abbastanza evidente in se stesso" aveva detto Lagrange) e l'analisi permetteva di trattarlo come si deve.

Certamente si può supporre che chi fosse esercitato nell'analisi ne avesse ritratto l'abito a guardare nelle vecchie cose con nuova e straordinaria acutezza.

FISICI MATEMATICI E INGEGNERI DEL SECOLO 19°

Il principio e la teoria dell'elasticità

Mentre si succedevano gli eventi di cui si è parlato era in sviluppo, per dirla alla Lakatos, un altro grandioso programma di ricerca che aveva preso le mosse dai "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" di Galileo.

In questo testo in forma di dialogo la "Scienza nuova prima" di cui si discorreva verteva "sulla resistenza dei corpi solidi all'essere spezzati", resistenza che acutamente si identificava nei vari casi ricercandone le ragioni.

Si trattava (attenzione al sincronismo!) della teoria dell'elasticità, una disciplina piuttosto ardua che, mentre stentava a fornire risultati immediatamente agibili per gli ingegneri sul campo, doveva poi rivelarsi preziosa per la costruzione di quegli enti teorici, o "costrutti" come li chiamava Carnap, che ne potessero orientare il pensiero e disciplinare l'immaginazione.

Non è il caso di seguirne, neppure in modo approssimativo, il lungo e faticoso cammino che l'avrebbe portata, verso la metà del secolo nel quale siamo venuti a trovarci, a congiungersi con il principio dei lavori vir-

tuali benché, a dire il vero, nessuno avrebbe potuto facilmente pensarlo.

La via seguita dal principio aveva avuto bisogno di corpi rigidi e vincoli lisci, mentre in quest'altra disciplina i corpi erano deformabili e al più, ed entro certi limiti piuttosto stretti, elastici e quanto ai vincoli certamente non si avevano le stesse semplici idee del passato.

Infatti, con l'irrompere della rivoluzione industriale, più o meno dalla metà del secolo precedente, l'Inghilterra, piuttosto incurante della meccanica razionale, aveva audacemente messo mano a costruzioni grandiose di tutti i generi, incontrando sia scacchi sia risultati notevoli che avevano già profondamente mutato il campo di osservazione dei congegni e dei casi di equilibrio.

Frattanto la Francia delle grandi Scuole perseverava nelle sue tradizioni di alta cultura matematica e creava certi ingegneri (se così li si può veramente chiamare dal momento che essi erano contemporanei di ingegneri inglesi assai diversi) che assomigliavano molto, nei casi migliori, a dei fisici matematici.

A dirla tutta, qui la storia sincronica mette in evidenza i suoi limiti giacché chi sarebbe capace di discernere un ingegnere come noi oggi lo intendiamo in figure come Cauchy (1789 - 1857) o Navier (1785 - 1836)?

Per fortuna nessuno ha chiesto, né chiederà, all'Autore di pronunciarsi su una questione forse non tanto importante ma di notevole fascino.

Non se ne sono voluti occupare né Timoshenko (1953) né Benvenuto (1981) e non oserò occuparmene io.

Frattanto la Francia, come si stava dicendo, continuava con inesauribile costanza nel suo lavoro scientifico e un illustre Professore della celeberrima École Polytechnique di Parigi perveniva a un risultato notevolissimo: il grande teorema, come lo chiama Benvenuto, enunciato da Cauchy nel 1827.

Mentre Navier non era riuscito nel suo tentativo di dedurre la tensione da un modello fisico della costituzione interna dei corpi elastici, vi riusciva Cauchy, che tale costituzione aveva completamente ignorato ma aveva scelto di studiare le condizioni dell'equilibrio delle tensioni interne a un corpo sollecitato, pervenendo anche a dare la descrizione matematica, secondo tre giaciture, dello stato di tensione intorno a un punto del corpo elastico.

Si può ben dire che tutto, da quel momento, comin-

ciasse a muoversi molto velocemente.

Cauchy aveva reso possibile, come dice Benvenuto con felice espressione, un procedimento di indagine condotta per "pure operazioni concettuali".

Non è molto chiaro in qual modo, con l'avanzare del secolo, ci si rendesse conto dell'analogia formale tra la geometria delle deformazioni (congruenza) e la statica delle tensioni (equilibrio).

Certo è che in questo momento si rese possibile il congiungimento tra il principio dei lavori virtuali e la nascente teoria dell'elasticità.

Il principio e l'ingegneria scientifica

Agli ingegneri che agivano in campo occorrevo dei metodi sicuri per determinare le incognite iperstatiche e le deformazioni strutturali.

Ora questi problemi emergevano continuamente nelle strutture reticolari, largamente adottate e diffuse ancora prima che si fosse imparato ad analizzarle con effettiva competenza e a interpretarne correttamente i comportamenti nelle varie applicazioni, in primo luogo nei ponti ferroviari.

Poiché si procedeva, e si discuteva, secondo i metodi e le assunzioni più fantasiose, temperate da esperienze professionali variabili, è probabile che qualcuno abbia pensato di risalire alle fonti incontaminate dell'equilibrio, alla meccanica che, nelle opinioni dominanti fin verso la fine del secolo, appariva a tutti la regina della fisica.

Uno dei più illustri personaggi che indulgeva a questo gusto fu Maxwell, un grandissimo fisico che avrebbe inconsapevolmente indebolito il trono della sua regina ma che, fortunatamente, aveva anche la passione di prendere in mano, di tanto in tanto, qualche problema imbarazzante per gli ingegneri del suo tempo. Così come si occupò dei regolatori ("On the Governors") delle motrici a vapore, si appassionò, nel 1864, all'equilibrio e alla rigidezza delle strutture reticolari ("On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames"). In questo memorabile lavoro egli enunciava il suo famoso teorema di reciprocità e delineava nettamente il cosiddetto metodo delle forze.

La sua indagine, che apriva un'epoca di grandi conseguimenti scientifici, era stata impostata sul principio di conservazione dell'energia, nelle forme di Clapeyron di cui si parlava nelle Leçons sur l'Elasticité di Lamé

del 1852. Il metodo di Maxwell ricevette da Mohr una chiara interpretazione come conseguenza del principio dei lavori virtuali, da cui traeva un suo metodo di calcolo delle iperstatiche che Müller-Breslau valutava, nel 1883, prossimo al metodo che Castigliano (teorema delle derivate del lavoro) aveva dedotto, nel 1879, dal teorema di Menabrea (1857 - 58) del minimo lavoro di deformazione. Purtroppo la cosa non garbò affatto a Mohr e si ebbero fastidi che durarono fino all'inizio di questo secolo e non hanno qui nessun interesse.

Il tempo degli ingegneri come corpo dottrinale autonomo era veramente arrivato se essi si appropriavano di tutte le prerogative dei corpi scientifici: in primo luogo, naturalmente, della litigiosità.

Cosa accadde veramente?

L'Autore ritiene che il mutamento di clima intellettuale sia già venuto in luce: si continuava a pensare molto ma si costruiva anche molto e in modo nuovo, mentre mentalità diverse si incontrarono e si confrontarono nelle scuole di ingegneria sorte dovunque sul modello francese.

Piuttosto: come avvenne che da spostamenti "virtuali" cioè "pensati", si pervenisse a trattare con disinvoltura come virtuali gli spostamenti elastici, generalmente reali, cioè a passare dai corpi rigidi a quelli elastici?

La spiegazione sta nella già accennata analogia formale fra l'equilibrio e la congruenza.

Questa circostanza permette di asserire che esistono simultaneamente tre condizioni, verificandosi due delle quali la terza è vera necessariamente:

- il principio dei lavori virtuali;
- la congruenza;
- l'equilibrio delle forze.

Vi sono naturalmente molti modi (in linea di principio almeno 4) di porre le equazioni risoltrici, e molti accorgimenti per risolverle, per cui il riferimento ai lavori virtuali può ben essere oscurato apparendo remoto e, talvolta, insospettabile nei singoli procedimenti.

Malgrado ciò il principio è il perno intorno a cui ruota, dal tempo di Lagrange, ogni problema dell'equilibrio.

CONSERVAZIONE DELLE DIFFICOLTÀ

Nel suo trattato di meccanica elementare Gallavotti (1980) accenna a un Principio di "Conservazione delle

difficoltà". Risolto qualcosa, egli pensa, le difficoltà, indistruttibili come l'energia, vanno a collocarsi in qualche altra cosa e, come le rane di Dante, si "abbicano" ad altri territori.

Dopo la verifica sperimentale (Hertz) delle equazioni del campo elettromagnetico di Maxwell, molti sentirono che i rapporti della meccanica con le altre discipline fisiche erano ormai completamente mutati.

Hertz si mise al lavoro e nel 1894 pubblicò una nuova meccanica dalla quale erano state fatte sparire le forze in quanto "non osservabili" nel senso della fisica evoluta e moderna.

Beninteso le forze avevano sempre avuto uno status fisico ambiguo fin dalle leggi della gravitazione di Newton e non soddisfacevano nessuno.

Tuttavia, rimasero nei trattati come entità comode per i ragionamenti, entrando a poco a poco nell'ombra, che avrebbe tutto inghiottito, dei modelli matematici (in senso proprio e non meramente numerico, che molti scambiano erroneamente per i primi).

Cosa accadde ai vincoli?

Già si è avuto modo di considerarli, in modo tipicamente diacronico, dapprima come effetti fisici, più tardi come relazioni matematiche.

Finora ci si è limitati ai vincoli olonomi ma con Voss (1884) ed Hertz (1894) l'attenzione si portò anche sui vincoli anolonomi, assai più elusivi e sui quali il discorso si farebbe più lungo.

Qui si ricorderà soltanto che mentre i primi si esprimono, per definizione, con relazioni finite o integrabili fra le coordinate dei punti del sistema e il tempo, sono anolonomi tutti quei vincoli che non si possono esprimere in tal modo, bensì soltanto mediante relazioni differenziali fra le coordinate e il tempo.

Bisogna convenire che, spiegata in tal modo, la differenza resta abbastanza oscura.

Il chiarimento comincia a prodursi quando si facciano emergere le conseguenze di una tale distinzione: nei vincoli olonomi una variazione elementare delle coordinate è del tutto arbitraria ed è sempre possibile (le relazioni differenziali sono integrabili) arrivare a uno schema in cui il numero delle coordinate lagrangiane eguaglia quello dei gradi di libertà del sistema mentre ciò non si verifica per i vincoli non olonomi.

Per questi ultimi, invece, definita la configurazione del

sistema accade che le variazioni elementari delle coordinate lagrangiane non siano del tutto arbitrarie, in quanto intervengono i vincoli (non integrabili) fra le coordinate cartesiane.

Il risultato è che un sistema non olonomo con f gradi di libertà nel campo finito ne ha solo $f - r$ nel campo infinitesimo, per cui il numero di coordinate lagrangiane è sempre superiore ai gradi di libertà del sistema.

I vincoli anolonomi, infatti, non si curano di imporre una relazione fra le posizioni delle varie parti del sistema, ma fra tali posizioni (complessivamente designate come configurazione o conformazione) e i possibili spostamenti dei suoi componenti.

In forza di ciò un disco che rotoli senza strisciare su di un piano costituisce un sistema anolonomo perché il disco può progredire soltanto nella direzione che ha a ogni istante determinato (libertà nell'infinitesimo), mentre non gli è impedito di raggiungere qualsiasi punto del piano (libertà nel finito).

Se invece il disco rotola senza strisciare su di una retta fissa sul piano il vincolo sarà olonomo (integrabile), perché il numero di gradi di libertà nel campo finito e infinitesimo è lo stesso.

Insomma, nei sistemi non olonomi accade che una variazione elementare delle coordinate lagrangiane non è affatto arbitraria come nei sistemi olonomi, in quanto intervengono le relazioni non integrabili fra le variazioni delle coordinate cartesiane dei singoli punti.

La conseguenza più tediosa di tutto questo è che nei sistemi anolonomi le relazioni differenziali (nel caso del disco sul piano la condizione di "velocità") possono essere messe sotto forma di integrale solo "dopo" aver risolto il problema (con i moltiplicatori indeterminati di Lagrange).

Ma cosa ha da dire il Principio di Gallavotti?

Essenzialmente che la nozione di vincolo, che era parlante per chi ci ha preceduto, è diventata sempre più artificiosa ed è conseguentemente sparita dai trattati di fisica.

La miglior definizione ancora marginalmente accettabile è oggi, dice Gallavotti, quella di Arnold (1979), che la fa derivare (per i soli vincoli olonomi) da un procedimento al limite di un potenziale di grande intensità che dia luogo a forze che costringano il corpo su di una certa traiettoria...

Si entra così pienamente nel clima della modellistica matematica moderna: vincoli ideali matematici, vincoli matematici reali e, in fondo a tutto questo raffinato apparato, la domanda cruciale: "di quale fatto fisico i predetti vincoli (variamente) ideali saranno un (buon) modello matematico?"

Conosciamo già le risposte della pratica: modellazione, simulazione, sperimentazione, interpretazione..., correzione... e così via in modo euristico e sorvegliatissimo. Abbiamo scoperto dove si erano abbicate le nostre rane. Infatti, i vincoli reali sono generati da forze che non sono generalmente né semplici né conservative (dipendenti da un potenziale) ma dipendono spesso dalla velocità e posizione dei punti.

CONGEDO

L'Autore spera che chi abbia avvertito il tedio di una lettura pesante si sia valso della sua libertà, passando subito a qualche lettura più gradevole, forse, addirittura, alla televisione.

Si augura di non essere incorso nella riprovazione dei giovani studenti e ingegneri presenti in buon numero nell'ANIMP e, quanto ai dirigenti agès dell'Associazione, si augura di aver risvegliato in essi, al modo di Proust, le antiche emozioni dei loro studi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Armellini G: *Lezioni di meccanica razionale*. Hoepli, Milano 1945.
- [2] Arnold VI: *Metodi matematici della meccanica classica*. Mir, Mosca 1979.
- [3] Benvenuto E: *La scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico*. Sansoni, Firenze 1981.
- [4] Carnap R: *I fondamenti filosofici della fisica* (1966). Il Saggiatore, Milano 1971.
- [5] Collingwood RG: *An Autobiography*. Oxford University Press, 1939.
- [6] Gallavotti G: *Meccanica elementare*. Boringhieri, Torino 1980.
- [7] Lecornu L: *La mécanique*. Flammarion, Parigi 1922.
- [8] Mach E: *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (1883). Boringhieri, Torino 1968.
- [9] Moretti G: *Meccanica razionale*. Hoepli, Milano 1956.
- [10] Kragh H: *An introduction to the Historiography of Science*. Cambridge University Press, 1987.
- [11] Timoshenko SP: *History of strength of materials* (1953). Dover Publication Inc., New York 1983.
- [12] Truesdell C: *Essay in the History of Mechanics* (1968). *The Trajectory of the History of Thermodynamics* (1822-1854). Springer-Verlag, Berlino 1980.