

Nella prima forma avremo :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_z = \int_A (\eta x - \xi y) dA = \int_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \right) dA - \frac{1}{2} \int_A y^2 x dA + \\ + \frac{1}{2(m+1)} \int_A x^3 dA. \end{aligned}$$

Gli ultimi due integrali sono dei *momenti di terzo ordine* dell'area della sezione e si possono calcolare agevolmente, eventualmente per via grafica.

L'altro integrale che compare nella precedente espressione, verrà indicato con  $J$  e si potrà utilmente trasformare, per una significativa interpretazione, utilizzando le identità ovvie :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x = \frac{\partial}{\partial x} (x\Phi) - \Phi \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} y = \frac{\partial}{\partial y} (y\Phi) - \Phi$$

e sostituendo nell'espressione di  $J$  si trova :

$$J = \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x\Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y\Phi) \right] dA - 2 \int_A \Phi dA$$

Il primo di questi integrali si può trasformare mediante la nota *formula di GAUSS* [v. (29), pag. 37] in un integrale di linea, esteso a tutti i contorni esterno ed interni complessivamente indicati con  $s$ , essendo ben inteso  $n$  positiva verso l'interno dell'area netta ; e si trova :

$$J = - \int_s \Phi_n [x \cos(\eta x) + y \cos(\eta y)] ds - 2 \int_A \Phi dA ;$$

notando che questa espressione si presta ad ovvia interpretazione geometrica relativa al diagramma spaziale della funzione  $\Phi$  : su essa crediamo superfluo insistere.

Volendo esprimere  $\mathfrak{M}_z$  nella seconda forma, usando per le  $\xi$  ed  $\eta$  le espressioni (459 bis), l'integrale  $J$  ora definito viene espresso come segue :

$$J = \int_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} y - \frac{\partial \Phi}{\partial y} x \right) dA$$

E con procedimento analogo a quello usato con la nota *formula di GAUSS*, tale espressione si può trasformare in un integrale di linea esteso a tutti i contorni, complessivamente indicati con  $s$ , e per  $n$  positiva verso l'interno dell'area netta: e si ha:

$$J = - \int_s \Psi [y \cos(nx) - x \cos(ny)] ds$$

L'ultima trasformazione costituisce ciò che si potrebbe chiamare *il teorema del momento del gradiente* (a due dimensioni). Essa è senza dubbio utile per rendere più agevole il calcolo numerico dell'integrale  $J$  nei casi concreti.

Il momento  $\mathfrak{C}_z$ , calcolato come qui s'è detto, è *un termine di 5.<sup>o</sup> ordine rispetto alla lunghezza* (prodotto di 5 lunghezze).

Calcolato  $\mathfrak{C}_z$  è ovvio che l'ascissa  $x_r$  del punto in cui la retta d'azione del taglio risultante  $T$  incontra l'asse delle  $x$ , è espressa da:

$$x_r = \frac{\mathfrak{C}_z}{I_x}$$

(ed a titolo di verifica si noti che, essendo notoriamente  $I_x$  termine del 4.<sup>o</sup> ordine, il rapporto ora scritto è appunto una lunghezza).  
*Centro di taglio.* — *Procedimento analitico per trattare il taglio obliquo.*

Riprendiamo ora il concetto di *centro di taglio*, già introdotto a pag. 367, nella trattazione approssimata e precisiamone la determinazione in base al calcolo rigoroso qui studiato.

Si considerino applicati al nostro prisma elastico due distinti stati di tensione di flessione composta *pura*, definiti ciascuno da distribuzione di  $\tau_z$  secondo le (459) o (459 bis), corrispondenti a due distinti assi neutri  $x_1$  ed  $x_2$ , ed aventi come rette d'azione dei tagli risultanti due distinte rette  $t_1$  e  $t_2$ .

Combiniamo linearmente i due stati di tensione secondo due parametri  $\lambda_1, \lambda_2$  arbitrari, otteniamo la distribuzione di tensioni tangenziali caratterizzata da  $\bar{\tau}_z = \lambda_1 \bar{\tau}_{z1} + \lambda_2 \bar{\tau}_{z2}$ , e si avrà pure:

$$\text{rot } \bar{\tau}_z = \lambda_1 \text{rot } \bar{\tau}_{z1} + \lambda_2 \text{rot } \bar{\tau}_{z2}.$$

Essendo nel baricentro della sezione, (trattandosi di tagli *puri*),  $\text{rot } \bar{\tau}_{z1} = \text{rot } \bar{\tau}_{z2} = 0$  sarà pure  $\text{rot } \bar{\tau}_z = 0$  nello stesso baricentro, per l'azione risultante; perciò lo stato di tensione, combinazione lineare

dei due dati, è pure esso di *flessione composta pura*, ed al variare fra  $-\infty$  e  $+\infty$  del rapporto  $\lambda_1 : \lambda_2$  la detta combinazione lineare esaurisce *tutti* gli stati di tensione del tipo *flessione composta pura*.

D'altra parte la retta d'azione  $t$  del taglio risultante della distribuzione combinazione lineare deve passare per il punto  $C_i$  comune alle due rette  $t_1$  e  $t_2$ . Per questo punto passano dunque *tutte* le rette d'azione dei tagli risultanti per le sollecitazioni di flessione composta pura. Il punto stesso perciò si chiama *centro di taglio*. La sua definizione comprende anche l'indicazione del modo di ricavarlo.

Risulta anche ovvio che se la base libera del prisma viene sollecitata da una forza in essa contenuta, ma del resto in posizione generica, la forza stessa trasportata parallelamente a se stessa a passare per il centro di taglio  $C_i$  dà luogo a sollecitazione di flessione composta pura, mentre la sollecitazione a torsione pura è costituita dal *momento di trasporto*, che è il momento della forza assegnata, preso rispetto al centro di taglio  $C_i$ .

Da quanto precede risulta che per investigare in modo completo il comportamento di una sezione a varie sollecitazioni a taglio comunque obliquo o deviato, occorre e basta preventivamente determinare la distribuzione di  $\zeta$  secondo la (459) o la (459 bis) per due distinti assi neutri  $x_1$  ed  $x_2$ , indi ricavare le rette d'azione  $t_1$  e  $t_2$  dei rispettivi tagli risultanti, ed il centro di taglio  $C_i$  loro intersezione. Ciò posto, quando sia dato un taglio  $T$  generico, (passante per  $C_i$  così da eliminare la torsione) esso si scomporrà in due componenti  $T_1$  e  $T_2$  agenti secondo le rette  $t_1$  e  $t_2$ ; per ciascuno di questi si ricaverà (in base agli elementi preliminari già approntati) la distribuzione delle  $\bar{\tau}_z$  e poi si sovrapporranno gli effetti, sommando geometricamente in ogni punto le due tensioni tangenziali  $\bar{\tau}_{z_1}$  e  $\bar{\tau}_{z_2}$  ivi provocate rispettivamente dai due tagli componenti.

Così resta precisato anche per questo calcolo rigoroso il criterio per l'applicazione della sovrapposizione degli effetti, già esposto alle pag. 365 ÷ 367 a proposito della trattazione approssimata del taglio.

*Lavoro di deformazione. Fattore di taglio.*

Con riferimento a quanto su questi argomenti si è detto alle pag. 333 e 334, dobbiamo qui limitarci a stabilire l'espressione del *fattore di taglio*  $\gamma$  mediante le notazioni usate in questo paragrafo.

Com'è ben noto, si ha:

$$L_i = \frac{1}{2} \gamma \frac{T_y^2 l}{GA} = \frac{l}{2G} \int (\bar{\tau}_{z_1}^2 + \bar{\tau}_{z_2}^2) dA = \frac{T_y^2 l}{2GI_w} \int (\xi^2 + \eta^2) dA$$

e di qui si ricava :

$$\chi = \frac{1}{A\varphi_{\alpha^4}} \int (\xi^2 + \eta^2) dA$$

ove  $\xi$  ed  $\eta$  sono esprimibili secondo le (459) o le (459 bis).

Non facciamo qui la relativa sostituzione, poichè nel caso generale l'integrale a secondo membro non si presta ad alcuna semplificazione degna di nota.

Così, per ciò che riguarda la legge di variazione di  $\chi$  al variare dell'asse neutro, (o di quello di sollecitazione), non c'è qui nulla da aggiungere a quello che s'è detto alle pag. 368 ÷ 373.

*Esempi di applicazioni a forme particolari di sezioni.*

Vogliamo ora a titolo d'esempio applicare questa teoria rigorosa del taglio ad alcune forme particolari di sezioni del prisma, le quali siano in pari tempo comuni nella pratica ed atte ad illustrare, esemplificando, le varie modalità applicative dei metodi esposti poco più sopra, per determinare la funzione  $\Phi$ .

Incominciamo a studiare il caso della

*Sezione rettangolare (sollecitata a taglio lungo una mediana).*

Adoperiamo ancora le stesse notazioni già usate al N. 53, alle pag. 289 e seguenti e fig. 20, come anche alle pag. 476 e seguenti. Sia  $y$  l'asse di sollecitazione ed  $x$  l'asse neutro (entrambi mediane per il rettangolo).

Assunte le  $\xi$  ed  $\eta$  nella forma (459), vogliamo determinare la funzione  $\Phi$ . Per ovvie ragioni di simmetria del contorno, la  $\Phi$  deve essere dispari in  $x$  e pari in  $y$ . Inoltre per  $x = \pm a$  e  $-b < y < b$  deve essere  $\xi = 0$ , e quindi  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ , e cioè  $\Phi = \text{costante}$ .

Tenuta presente l'ultima delle (447), si verifica facilmente che queste condizioni sono soddisfatte se si pone:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh \left( \frac{n\pi}{a} y \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) + Bx$$

ove  $A_n$  e  $B$  sono costanti da determinare in base alle condizioni sugli altri due lati del rettangolo. Ed invero per  $y = \pm b$  e  $-a < x < a$  deve essere  $\eta = 0$  e cioè:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{b^2}{2} - \frac{x^2}{2(n+1)}$$

pag. 510  
 Fig. 20  
 p. 126

e cioè:

$$\frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) + B = \frac{b^2}{2} - \frac{x^2}{2(m+1)} \quad (461)$$

Nell'analisi è nota la *serie di FOURIER*;

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) \quad \text{per } -\pi < x < \pi$$

la quale notoriamente è convergente per ogni valore di  $x$  interno al detto intervallo, *esclusi gli estremi*.

Integrando rispetto ad  $x$  si ottiene, per lo stesso intervallo:

$$\frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} [1 - \cos(nx)]$$

e poichè il valor medio del 1.<sup>o</sup> membro tra  $-\pi$  e  $+\pi$  è  $\frac{\pi^2}{12}$ , si ritrova una nota identità:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

e quindi, sostituendo:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx);$$

in questa espressione si può porre poi  $\frac{\pi}{a} x$  in luogo di  $x$  ed infine si può dividere tutto per  $\frac{\pi^2}{2a^2}$ , e si ottiene:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{6} - \frac{2a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

Si sostituisca questo valore a secondo membro della (461), la quale così diviene:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) + B = \\ & = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{6(m+1)} + \frac{2a^2}{\pi^2(m+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right). \end{aligned}$$

Identificando i coefficienti dei termini omologhi nei due membri si ottiene:

$$A_n = \frac{2a^3 (-1)^{n+1}}{\pi^3 (m+1) n^3} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)}$$

$$e \quad B = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{6(m+1)}$$

e con ciò la funzione  $\Phi$  assume la forma definitiva:

$$\Phi = \frac{2a^3}{\pi^3(m+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} + \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{6(m+1)}\right) x.$$

Passiamo ora a trattare il caso della

*Sezione a corona circolare.*

Per questa sezione, importante nella pratica, perchè comune negli alberi cavi delle macchine, il problema del taglio fu già risolto con trattazione approssimata alle pag.º da 399 a 403: vogliamo darne ora la soluzione rigorosa, dalla quale, come caso particolare, potremo ritrovare — per verifica — la distribuzione delle tensioni tangenziali provocate dal taglio nella sezione circolare piena, distribuzione già studiata per altra via alle pag.º 334 ÷ 341.

Siano  $R_e$  ed  $R_i$  i raggi esterno ed interno rispettivamente, ( $R_e > R_i$ ).

Ci proponiamo di determinare anzitutto la funzione  $\Phi$ , secondo le (459) e (460): l'origine è assunta nel centro della corona; l'asse  $x$  è l'asse neutro e quello  $y$  è l'asse di sollecitazione. A causa della

*A causa della sezione sempre ortogonale.*

simmetria, per  $x=0$  deve essere  $\xi=0$ , e perciò  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$ , cioè  $\Phi=$   
 $= \text{cost.}$  e potremo porre ivi  $\Phi=0$ .

Ricordiamo che sul contorno esterno si ha:  $y^2=R_e^2-x^2$  e su  
 quello interno:  $y^2=R_i^2-x^2$ .

Perciò, secondo la (460), per  $\Phi_0=0$ , si deve avere:  
 sul contorno esterno:

$$\Phi_{ce} = \frac{1}{2} R_e^2 x - \frac{x^3}{6} \left( 1 + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{1}{2} R_e^2 x - \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{x^3}{6}$$

$\left( \frac{1}{2} R_e^2 x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{2} \left[ R_e^2 x - \frac{x^3}{6} \right] - \frac{x^3}{6(m+1)}$

e sul contorno interno:

$$\Phi_{ci} = \frac{1}{2} R_i^2 x - \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{x^3}{6}$$

Ne risulta che in punti dei due contorni, situati su uno stesso  
 raggio, i valori  $\Phi_{ce}$  e  $\Phi_{ci}$  stanno tra loro nel rapporto  $R_e^3 : R_i^3$ .  
 Ancora in virtù della simmetria risulta che la  $\Phi$  deve essere  
 dispari in  $x$  e pari in  $y$ : inoltre, calcolata sui contorni, essa deve  
 contenere termini in  $x$  ed in  $x^3$ . Queste condizioni risultano soddi-  
 sfatte se si pone:

$$\Phi = \left( Ar + \frac{A'}{r} \right) \cos \varphi + Br^3 \cos (3\varphi),$$

ove  $A, A'$  e  $B$  sono coefficienti da determinare.

Per soddisfare la condizione sopra stabilita:  $\Phi_{ce} : \Phi_{ci} = R_e^3 : R_i^3$   
 per uno stesso valore di  $\varphi$ , occorre e basta che:

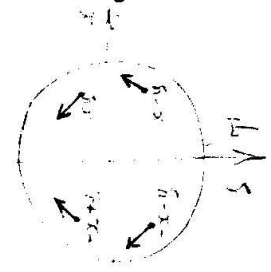
$$\left( AR_e + \frac{A'}{R_e} \right) R_i^3 = \left( AR_i + \frac{A'}{R_i} \right) R_e^3,$$

da cui si può esprimere  $A'$  in funzione di  $A$ :

$$A' = -A \cdot \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 + R_i^2}$$

e con ciò i coefficienti da determinare si riducono ai due  $A$  e  $B$  e  
 la  $\Phi$  si esprime così:

$$\Phi = A \left[ r - \frac{R_e^2 R_i^2}{(R_e^2 + R_i^2)r} \right] \cos \varphi + Br^3 \cos (3\varphi).$$



*Handwritten notes:*  
 La condizione di simmetria  $\Phi(x, y) = \Phi(x, -y) = \Phi(-x, y) = \Phi(-x, -y)$   
 richiede che  $\Phi$  sia una funzione pari in  $x$  e  $y$ .  
 La condizione di annullamento di  $\Phi$  sui contorni  $x = \pm R_e$  e  $x = \pm R_i$   
 richiede che  $\Phi$  sia una funzione dispari in  $x$ .  
 La condizione di annullamento di  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  sui contorni  $x = \pm R_e$  e  $x = \pm R_i$   
 richiede che  $\Phi$  sia una funzione pari in  $y$ .  
 La condizione di annullamento di  $\Phi$  nel centro  $(0, 0)$  richiede che  $\Phi$  sia una  
 funzione dispari in  $x$  e pari in  $y$ .

Ricordando che  $r^3 \cos(3\varphi) = x^3 - 3xy^2$  e  $r \cos \varphi = x$ , sul contorno esterno per  $r = R_e$  la  $\Phi$  diviene:

$$\Phi_{ec} = A \frac{R_e^2}{R_e^2 + R_i^2} x + B(x^3 - 3R_e^2 x + 3x^3).$$

Questa espressione di  $\Phi_{ec}$  si può identificare con l'altra sopra ricavata in base alla condizione al contorno (460): a tale scopo occorre e basta uguagliare i coefficienti dei termini simili (in  $x$  ed in  $x^3$ ).

Si ottengono così due equazioni lineari tra le due incognite  $A$  e  $B$ ; e da esse, risolvendo, si trova:

$$A = \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} (R_e^2 + R_i^2) \quad ; \quad B = -\frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1}.$$

Sostituendo questi valori nella precedente espressione di  $\Phi$ , si trova infine:

$$\Phi = \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} (R_e^2 + R_i^2) \left( r - \frac{R_e^2 R_i^2}{(R_e^2 + R_i^2) r} \right) \cos \varphi - \frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1} r^3 \cos(3\varphi)$$

ovvero, sotto forma cartesiana:

$$\Phi = \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} (R_e^2 + R_i^2) \left[ x - \frac{R_e^2 R_i^2}{(R_e^2 + R_i^2)} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right] - \frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1} (x^3 - 3xy^2).$$

Di qui, secondo le (459), ricaviamo le  $\xi$  ed  $\eta$ ; dopo facili riduzioni si trova:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4} \cdot \frac{xy}{m+1} \left[ m+2 + (3m+2) R_e^2 R_i^2 \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \eta &= \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} (R_e^2 + R_i^2) \left[ 1 - \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 + R_i^2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{8} \cdot \frac{m+2}{m+1} (x^2 - y^2) + \frac{x^2}{2(m+1)} - \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$



E' facile verificare che per  $R_i=0$  e  $R_r=r$ , moltiplicando queste ultime espressioni per

$$\frac{T_y}{I_x} = \frac{4T}{\pi r^4}$$

si ritrovano le (325) già ricavate per altra via a pag. 337.

In modo perfettamente analogo a quello qui seguito, si può trattare il caso più generale, della

*Corona ellittica, compresa tra due ellissi omotetiche, sollecitata a taglio secondo uno degli assi.*

Basta seguire il procedimento qui sopra esposto, tenendo presente che nel caso ora esaminato su ciascuno dei contorni ellittici si ha:  $y^2 = n^2 \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$ , ove  $m$  ed  $n$  sono i semiasse del contorno stesso. Tutto

il resto del calcolo si svolge su concetti identici a quelli testè usati. Naturalmente per investigare completamente il comportamento a taglio della sezione ora detta occorrerà calcolare separatamente l'effetto del taglio agente lungo ciascuno degli assi, (ed uno di questi effetti si potrà ottenere dall'altro con opportuna permutazione di  $x$  con  $y$  e di  $m$  con  $n$ ), e poi per un taglio obliquo o deviato, farne le componenti secondo gli assi, di esse valutare singolarmente e quindi sovrapporre gli effetti, secondo il criterio già illustrato.

Ovviamente come casi particolari si ha quello dell'ellisse piena e quello della corona circolare, che abbiamo preferito trattare direttamente, perchè più importante e comune nelle applicazioni tecniche. Passiamo ora a studiare le altre sezioni cave già considerate anche per la sollecitazione a torsione.

*Sezione cava compresa tra due ellissi concentriche e coassiali, NON omotetiche.*

L'asse di sollecitazione coincide con una degli assi (che assumiamo come  $y$ ) dei due contorni.

Per ovvie ragioni, in questo caso la funzione deve essere *monodroma*, dispari in  $x$  e pari in  $y$ ; inoltre sarà costante sull'asse  $y$  ed anzi potremo imporre che per  $x=0$  sia  $\Phi = \Phi_0 = 0$ .

Sui due contorni si ha rispettivamente:

$$\text{sull' interno: } y^2 = n_i^2 \left(1 - \frac{x^2}{m_i^2}\right)$$

$$\text{sull' esterno: } y^2 = n_e^2 \left(1 - \frac{x^2}{m_e^2}\right)$$

$$\left(\text{essendo poi } \frac{m_e}{n_e} \neq \frac{m_i}{n_i}\right).$$

I valori che la  $\Phi$  deve assumere sui due contorni, secondo la 460), sono :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ce} &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_e^2 x - \frac{1}{6} \left( \frac{\mathbf{n}_e^2}{\mathbf{m}^2} + \frac{1}{m+1} \right) x^3 \\ \Phi_{ci} &= \frac{1}{2} \mathbf{n}_i^2 x - \frac{1}{6} \left( \frac{\mathbf{n}_i^2}{\mathbf{m}_i^2} + \frac{1}{m+1} \right) x^3 \end{aligned} \right\} \quad (461)$$

Per quanto segue è opportuno tener presente che per ciascuno dei contorni l'equazione polare assume la nota forma :

$$r^2 \left[ 1 - \frac{\mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2}{\mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2} \cos(2\varphi) \right] = \frac{2\mathbf{m}^2 \mathbf{n}^2}{\mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2}$$

In una prima approssimazione limitiamoci ad operare con quattro coefficienti incogniti, e perciò poniamo la funzione approssimata  $\Phi_a$  espressa come segue :

$$\Phi_a = \left( Ar + \frac{A'}{r} \right) \cos \varphi + \left( Br^3 + \frac{B'}{r^3} \right) \cos(3\varphi) \quad (462)$$

(che soddisfa alle condizioni poco più sopra indicate).

Le equazioni determinatrici dei quattro coefficienti incogniti si possono stabilire mediante il criterio seguente, che tiene conto dell'effettivo andamento del vettore  $\bar{\zeta}$  su ciascun contorno.

Per ognuno dei due contorni nel punto  $r = \mathbf{n}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  deve essere evidentemente  $\eta = 0$  e perciò si dovranno avere le due equazioni seguenti, (indicate simbolicamente) :

$$\left( \frac{\partial \Phi_a}{\partial x} \right) \left. \begin{array}{l} r = \mathbf{n}_e \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| - \frac{\mathbf{n}_e^2}{2} = 0$$

$$\left( \frac{\partial \Phi_a}{\partial x} \right) \left. \begin{array}{l} r = \mathbf{n}_i \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| - \frac{\mathbf{n}_i^2}{2} = 0.$$

Inoltre si deve osservare che per ovvie ragioni di simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , su ciascun contorno nel punto  $r = \mathbf{m}$  e  $\varphi = 0$  si deve avere uguale a zero la deviazione angolare tra la  $\zeta$  ed il

contorno (definita a pag. 503). Ciò posto, con ovvie considerazioni sulla variazione della detta deviazione angolare lungo il quadrante da  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , (cfr. analisi armonica), si deduce che la « ottima » approssimazione si ottiene molto prossimamente imponendo che tale deviazione sia nulla anche nel punto del contorno per  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  ( $\equiv 60^\circ$ ).

Perciò, indicando con  $i_n$  l'inclinazione del contorno, si avranno le altre due equazioni:

$$(i_{nr})\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\gamma_i}{\xi}\right)_{nr} \left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad (i_{ni})\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\gamma_i}{\xi}\right)_{ni} \left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right)$$

La verifica dell'approssimazione raggiunta si dovrà eseguire nei modi indicati poco più sopra alle pag. 502 e 503.

Quando si volesse ottenere un'approssimazione anche maggiore, si dovrebbero nell'espressione (462) di  $\Phi_a$  aggiungere altri termini del tipo  $P_n$ , per  $n$  dispari, positivo e negativo, come:

$$\left(Cr^5 + \frac{C'}{r^5}\right) \cos(5\varphi) \quad ; \quad \left(Dr^7 + \frac{D'}{r^7}\right) \cos(7\varphi), \quad \text{ecc. ....};$$

si avrebbe così un numero maggiore di coefficienti incogniti: le ulteriori equazioni lineari determinatrici si dovrebbero stabilire imponendo che sia nulla la deviazione angolare tra la  $\zeta$  ed il contorno anche in punti i quali, secondo la citata analisi armonica, risultino « nodi » della predetta deviazione angolare.

Una semplificazione degna di nota si presenta quando uno dei contorni sia circolare: in tal caso è facile ottenere che sullo stesso contorno la nota condizione sia soddisfatta esattamente in tutti i punti, (limitandosi ancora a realizzarla per approssimazione sull'altro contorno ellittico).

Supponiamo p. es. che sia circolare il contorno interno per  $\mathbf{m}$ ,  $= \mathbf{n}_i = R_i$  (minore del più piccolo dei due semiassi  $\mathbf{m}_r$  ed  $\mathbf{n}_r$ ).

In tal caso la seconda delle (461) diviene:

$$\Phi_{ni} = \frac{1}{2} R_i^2 x - \frac{1}{6} \cdot \frac{m+2}{m+1} x^3 = \frac{1}{2} R_i^3 \cos \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{m+2}{m+1} R_i^3 \cos^3 \varphi \quad (461 \text{ bis})$$

e sullo stesso contorno interno circolare la  $\Phi_a$ , espressa dalla (462),

assume l'espressione:

$$\Phi_{\alpha i} = \left( AR_i + \frac{A'}{R_i} \right) \cos \varphi + \left( BR_i^3 + \frac{B'}{R_i^3} \right) \cos(3\varphi)$$

ed essendo notoriamente:  $\cos(3\varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ ,

si ha:

$$\Phi_{\alpha i} = \left[ AR_i + \frac{A'}{R_i} - 3 \left( BR_i^3 + \frac{B'}{R_i^3} \right) \right] \cos \varphi + 4 \left( BR_i^3 + \frac{B'}{R_i^3} \right) \cos^3 \varphi.$$

Questa espressione si può identificare con quella di  $\Phi_{\alpha j}$  secondo la (461 bis) quando si ponga:

$$AR_i + \frac{A'}{R_i} - 3 \left( BR_i^3 + \frac{B'}{R_i^3} \right) = \frac{1}{2} R_i^3$$

$$BR_i^3 + \frac{B'}{R_i^3} = -\frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1} R_i^3$$

ed eliminando  $B$  e  $B'$  si ha:

$$AR_i + \frac{A'}{R_i} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} R_i^3.$$

Si può così esprimere  $A'$  in funzione di  $A$  e  $B'$  in funzione di  $B$ , come segue:

$$A' = -AR_i^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} R_i^4$$

$$B' = -BR_i^6 - \frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1} R_i^6.$$

Con ciò i coefficienti incogniti, che compaiono nella  $\Phi_{\alpha}$  secondo la (462), si riducono alle sole due  $A$  e  $B$ . Le equazioni atte a determinarle sono quelle che realizzano per approssimazione la nota condizione sul contorno esterno e che si stabiliscono nel modo indicato a pag. 513 e 514.

Per l'investigazione completa del comportamento di questa sezione sotto l'azione di un qualunque taglio obliquo o deviato vale naturalmente anche qui ciò che si è scritto a pag. 512 a proposito dell'esempio precedente.

Passiamo ora a studiare un altro esempio, la

*Sezione a corona circolare eccentrica*, (cioè compresa tra due contorni circolari non concentrici).

Naturalmente dovremo studiare separatamente il caso del taglio agente normalmente alla retta dei centri ed il caso del taglio agente lungo la stessa retta dei centri.

a) — *Taglio agente normalmente alla retta dei centri.*

L'asse neutro  $x$  sarà la stessa retta dei centri. Siano al solito  $R_e$  ed  $R_i$  i raggi dei due cerchi esterno ed interno rispettivamente. Si assuma l'origine  $O$  nel centro  $C_i$  del cerchio interno e sia  $a = C_i C_e$  l'ascissa del centro  $C_e$  del cerchio esterno (eccentricità), tale che sia, con sensibile margine,  $a < R_e - R_i$ .

Sia poi  $b_g$  l'ascissa del baricentro  $G$  dell'area *netta* della corona; e sarà:

$$b_g = a \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}.$$

Secondo la (460), sul contorno esterno, di equazione  $y^2 = R_e^2 - (x - a)^2$ , la  $\Phi$  deve assumere i valori:

$$\Phi_{ce} = \Phi_{e0} + \frac{1}{2} \int_0^a y' dx - \frac{(x - b_g)^3 + b_g^3}{6(m + 1)}$$

e sviluppando i calcoli, tenuta presente l'equazione del cerchio esterno, si ha:

$$\Phi_{ce} = \Phi_{e0} + \frac{1}{2} R_e^2 x - \frac{1}{6} (x^3 - 3ax^2 + 3a^2x) - \frac{1}{6(m + 1)} (x^3 - 3b_g x^2 + 3b_g^2 x)$$

ove  $\Phi_{e0}$  è il valore, da determinarsi, nei punti sull'asse  $y$  (per  $x = 0$  ed  $y = \pm \sqrt{R_e^2 - a^2}$ ).

Analogamente, sul contorno interno, di equazione  $y^2 = R_i^2 - x^2$ ,

la  $\Phi$  dovrà assumere i valori :

$$\Phi_{ci} = \Phi_{io} + \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx - \frac{(x - b_y)^3 + b_y^3}{6(m + 1)}$$

ed eseguiti i calcoli, tenendo conto dell'equazione del cerchio interno, si ha :

$$\Phi_{ci} = \Phi_{io} + \frac{1}{2} R_i^2 x - \frac{1}{6} \cdot \frac{m + 2}{m + 1} x^3 + \frac{1}{6(m + 1)} (3b_y x^2 - 3b_y^2 x)$$

ove  $\Phi_{io}$  è il valore, da determinarsi, assunto da  $\Phi$  nei punti  $x = 0$ ,  $y = \pm R_i$ .

Dato che l'asse  $x$  contiene i centri di due cerchi, la funzione  $\Phi$  deve essere *monodroma*.

Poichè la sezione è simmetrica rispetto all'asse  $x$ , la  $\Phi$  deve essere pari in  $y$ ; poichè non esiste simmetria rispetto all'asse  $y$ , non risulta definita la parità di  $\Phi$  in  $x$ : perciò le varie funzioni elementari costituenti la  $\Phi$  devono contenere coseni di multipli di  $\varphi$  pari e dispari. Poichè nelle espressioni dei valori sui contorni compaiono potenze di  $x$  fino alla terza, nell'espressione di  $\Phi_a$  approssimata si dovranno avere *almeno* termini in  $\cos \varphi$ ,  $\cos(2\varphi)$  e  $\cos(3\varphi)$ .

Ciò posto, l'espressione approssimata  $\Phi_a$  potrà venir assunta nella forma seguente :

$$\Phi_a = \left( \lambda_1 r + \frac{\lambda'_1}{r} \right) \cos \varphi + \left( \lambda_2 r^2 + \frac{\lambda'_2}{r^2} \right) \cos(2\varphi) + \left( \lambda_3 r^3 + \frac{\lambda'_3}{r^3} \right) \cos(3\varphi)$$

ove le  $\lambda$  sono i coefficienti-parametri incogniti da determinarsi in modo da soddisfare la nota condizione sui contorni.

E' facile constatare che detta condizione può venir soddisfatta esattamente su tutto il contorno interno, esprimendo con equazioni lineari *separate* ciascuna delle  $\lambda'$  in funzione dell'omologa  $\lambda$ .

Infatti sul contorno interno, per  $r = R_i$  la  $\Phi_a$  assume l'espressione :

$$\begin{aligned} \Phi_{ai} = & \left( \lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} \right) R_i \cos \varphi + \left( \lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} \right) R_i^2 \cos(2\varphi) + \\ & + \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^3 \cos(3\varphi). \end{aligned}$$

Ricordando ora le note identità :

$$\cos(2\varphi) = 2 \cos^2 \varphi - 1 \quad ; \quad \cos(3\varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi ,$$

sostituendo e raccogliendo i termini simili, si trova :

$$\begin{aligned} \Phi_{ni} = & - \left( \lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} \right) R_i^2 + \left[ \lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} - 3 \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^2 \right] R_i \cos \varphi + \\ & + 2 \left( \lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} \right) R_i^2 \cos^2 \varphi + 4 \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^3 \cos^3 \varphi . \end{aligned}$$

Questa espressione si può identificare con quella di  $\Phi_{ei}$  poco più sopra ricavata, e si deve tener presente che sul detto contorno interno è :  $x = R_i \cos \varphi$ .

Uguagliando due a due i coefficienti rispettivi dei termini omologhi nelle due espressioni, si ha :

$$\begin{aligned} \Phi_{in} = & - \left( \lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} \right) R_i^2 \\ \lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} - 3 \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^2 = & \frac{1}{2} R_i^2 - \frac{b_y^2}{2(m+1)} \\ \lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} = & \frac{b_y}{4(m+1)} \quad ; \quad \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} = - \frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1} ; \end{aligned}$$

e con opportuna eliminazione tra la 1.<sup>a</sup> e la 3.<sup>a</sup> e tra la 2.<sup>a</sup> e la 4.<sup>a</sup> di queste relazioni, si trova ancora :

$$\begin{aligned} \Phi_{in} = & - \frac{b_y R_i^2}{4(m+1)} \\ \lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} = & \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} R_i^2 - \frac{b_y^2}{2(m+1)} . \end{aligned}$$

La prima di queste due relazioni ci esprime il valore, sinora incognito, di  $\Phi_{ni}$ ; la seconda di esse e le ultime due del gruppo precedente costituiscono le preannunziate equazioni lineari permettenti di esprimere *separatamente* ciascuna delle  $\lambda'$  mediante l'omologa  $\lambda$ . Restano così ancora incogniti i soli tre coefficienti  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ .

Le relative equazioni lineari determinatrici si devono stabilire coll'intento di soddisfare la nota condizione sul contorno circolare esterno, applicando opportunamente al caso di tre parametri il criterio già sopra illustrato ed applicato per casi con due soli parametri. Infatti qui coll'introduzione di tre parametri si potrà riuscire a compensare i termini dei primi tre ordini, e perciò il « resto » (o l'errore) deve risultare con la sua prima armonica di « frequenza » (o « ordine ») 4; d'altra parte per ragioni di simmetria si avranno per il « resto » due « ventri » agli estremi del diametro giacente sull'asse neutro  $x$ . Quindi, se indichiamo con  $\psi$  l'anomalia del punto generico del contorno circolare esterno, riferita al centro  $C_e$  di esso e contata da  $+x$ , per il « resto » avremo dei « ventri » consecutivi per i valori di  $\psi$ :

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi. \text{ (Ivi si hanno « nodi » di deviazione).}$$

Indichiamo poi con  $\delta_{(\psi)} = \Phi_{a(\psi)} - \Phi_{a(\psi)}$  il « resto » (o l'errore) nel punto generico, di anomalia  $\psi$ , sul contorno circolare esterno.

In conseguenza le equazioni, stabilite nel modo più conveniente, saranno simbolicamente espresse:

$$\delta_0 = \delta_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \delta_{\pi} = -\delta_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{ove risulti } \left| \delta_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| > \left| \delta_{\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right|$$

ovvero:

$$\delta_0 = \delta_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \delta_{(\pi)} = -\delta_{\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \quad \text{ove risulti } \left| \delta_{\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right| > \left| \delta_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right|$$

ovvero ancora:

$$\delta_0 = \delta_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \delta_{\pi} \quad \text{e} \quad \delta_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \delta_{\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

tollerando una lieve differenza tra i moduli dei valori qui indicati.

Si tenga presente che il valore  $\Phi_{e_0}$  che compare nell'espressione di  $\Phi_{e_0}$ , a pag. 516, conforme all'espressione di  $\Phi_a$  di pag. 517, è:

$$\Phi_{e_0} = -\lambda_2(R_e^2 - a^2) - \frac{\lambda_2'}{R_e^2 - a^2}.$$

Se l'eccentricità  $a$  è piccola rispetto al raggio  $R_e$ , si può senza sensibile influenza sui risultati, ma invece con notevole semplificazione nei calcoli numerici, porre  $\varphi$  in luogo di  $\psi$ .

Per opportuna verifica è facile constatare che per  $a = 0$ , (e quindi anche  $b_\varphi = 0$ ) si ritrovano, — come deve essere, — le espressioni sopra ricavate per la sezione a corona circolare centrata.



Se per ottenere una maggiore approssimazione, nell'espressione approssimata  $\Phi_n$ , si introducono altri termini (che dovranno contenere i coseni di multipli successivi pari e dispari di  $\varphi$ ), le ulteriori equazioni ricavate dalla nota condizione sul contorno interno, (per determinare separatamente le  $\lambda'$  in funzione delle omologhe  $\lambda$ ), saranno omogenee.

*Osservazioni sulle tensioni massime, sul centro di taglio, e su una condizione di ottima utilizzazione della sezione, per sollecitazione di taglio e torsione.*

Se dopo determinata la  $\Phi$  si ricavano  $\xi$  ed  $\eta$  mediante le (459) è facile constatare che sull'asse neutro  $x$  la  $\xi$  risulta nulla; sul più breve dei due segmenti staccati dai contorni sullo stesso asse neutro  $x$  il valor medio della  $\eta$  è maggiore dell'analogo valor medio sul più lungo dei detti segmenti; inoltre si verifica che sullo stesso asse  $x$  la  $\eta$  è funzione decrescente di  $|x|$ , sicchè le tensioni  $\eta$  più grandi si hanno agli estremi del diametro su  $x$  del contorno interno. — Ciò posto, se allo stato di tensione qui considerato si sovrappone un momento torcente di verso tale da provocare tensione tangenziale cospirante con la  $\eta$  nel più lungo dei detti segmenti e perciò contraria alla  $\eta$  sul più breve di essi, e dato che notoriamente nella torsione la tensione è in valore assoluto funzione decrescente di  $|x|$ , si vede come la sovrapposizione qui descritta tenda a rendere prossima all'uniformità la distribuzione della  $\eta$  sull'asse  $x$ . Da ciò risulta come la eccentricità conferisce alla corona circolare la proprietà di una migliore utilizzazione del materiale alla sollecitazione di flessione composta completa (flessione taglio e torsione). Crediamo superfluo soffermarci qui sulla relazione quantitativa tra l'eccentricità ed il rapporto  $M : T$ ; stimiamo sufficiente aver segnalato il fenomeno dal lato qualitativo.

Tornando alla sollecitazione a taglio puro, dobbiamo osservare che nel caso qui studiato, il centro di taglio, per evidenti ragioni di simmetria, si deve trovare sulla retta dei centri, ed inoltre rispetto al baricentro dell'area netta, deve essere spostato dalla parte del maggiore dei due segmenti sopra citati, staccati sull'asse neutro tra i due contorni.

Per la determinazione del detto centro di taglio  $v$ , ciò che s'è detto in generale a pag. 505 e 506.

b) — *Taglio agente lungo la retta dei centri.*

Assumiamo, anche per questo caso, l'origine  $O$  nel centro  $C_i$  del cerchio interno; la retta dei centri venga assunta come asse  $y$  e sia

$a = C_i C_r$ , l'ordinata del centro  $C_r$ . Sia poi  $b_y$  l'ordinata del baricentro  $G$  dell'area netta della corona, e sarà pure qui:

$$b_y = a \frac{R_r^2}{R_r^2 - R_i^2}$$

e l'asse neutro sarà la parallela  $n$  per  $G$  all'asse delle  $x$ . Data la simmetria della sezione rispetto all'asse  $y$ , essendo  $\bar{z} = 0$  e perciò  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  sullo stesso asse  $y$ , ivi la  $\Phi$  sarà costante, e si potrà assumere uguale a zero; inoltre la  $\Phi$  dovrà essere dispari in  $x$ , e d'altra parte, non esistendo simmetria rispetto all'asse  $x$ , la parità di  $\Phi$  in  $y$  non deve essere definita: in conseguenza la  $\Phi_n$  deve contenere dei  $P_n$ , per  $n$  dispari, positivo o negativo, e dei  $Q_n$ , per  $n$  pari, pure positivo o negativo.

Inoltre, secondo quanto s'è visto in generale, poichè i baricentri delle aree racchiuse nei due contorni non stanno sull'asse neutro  $n$ , la funzione  $\Phi$  deve essere *polidroma*, in modo da presentare su ciascuno dei due contorni un « incremento periodico » (o « residuo ») pari a  $-\pi R_i^2 b_y = -\pi R_r^2 (b_y - a)$ , e ciò evidentemente si può ottenere introducendo nell'espressione di  $\Phi$  un termine  $-\frac{R_i^2 b_y}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ , costituito in modo da risultare antisimmetrico rispetto all'asse  $y$ .

Secondo la (460), sul contorno interno, di equazione  $y^2 = R_i^2 - x^2$ , la  $\Phi$  deve assumere i valori:

$$\begin{aligned} \Phi_{ci} &= \frac{1}{2} \int_0^x (y - b_y)^2 dx - \frac{x^3}{6(m+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx - b_y \int_0^x y dx + \frac{1}{2} b_y^2 x - \frac{x^3}{6(m+1)}. \end{aligned}$$

Per eseguire gli integrali, teniamo presente che  $x = R_i \cos \varphi$  e richiamiamo che per il cerchio di raggio  $R_i$ , si ha notoriamente:

$$\int_0^x y dx = \frac{1}{2} R_i^2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{1}{2} R_i^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi.$$

Sicchè, fatte le sostituzioni e raccolti i termini simili, si trova infine :

$$\Phi_{ca} = \frac{1}{2} (R_i^2 + b_y^2) R_i \cos \varphi - \frac{1}{6} \cdot \frac{m+2}{m+1} R_i^3 \cos^3 \varphi - \frac{1}{2} b_y R_i^2 \sin \varphi \cos \varphi - \\ - \frac{1}{2} b_y R_i^2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Sul contorno esterno di centro  $C_c$  e raggio  $R_c$ , di equazione  $(y-a)^2 = R_c^2 - x^2$ , la  $\Phi$  deve assumere i valori

$$\Phi_{cc} = \frac{1}{2} \int_0^x (y-b_y)^2 dx - \frac{x^3}{6(m+1)} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx - b_y \int_0^x y dx + \frac{1}{2} b_y^2 x - \frac{x^3}{6(m+1)}.$$

Per eseguire gli integrali, oltre a tener conto della equazione al contorno, si introduca l'anomalia  $\psi$  del punto generico del cerchio esterno, riferita al centro  $C_c$  di questo e contata a partire dall'asse  $x$  (parallelo a quello neutro), in modo che sia sul detto contorno:  $x = R_c \cos \psi$  ed  $(y-a) = R_c \sin \psi$ ; inoltre si tenga presente l'ovvia espressione:

$$\int_0^x y dx = ax + \int_0^x (y-a) dx = \\ = ax + \frac{1}{2} R_c^2 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) + \frac{1}{2} R_c^2 \sin \psi \cos \psi.$$

Ciò posto, con opportune sostituzioni e facili riduzioni, si trova:

$$\Phi_{cc} = \frac{1}{2} [R_c^2 + (b_y - a)^2] R_c \cos \psi - \frac{1}{6} \cdot \frac{m+2}{m+1} R_c^3 \cos^3 \psi - \\ - \frac{1}{2} (b_y - a) R_c^2 \sin \psi \cos \psi - \frac{1}{2} (b_y - a) R_c^2 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right).$$

Per l'espressione approssimata di  $\Phi$ , limitandoci, come nel caso precedente, a termini dei primi tre ordini e tenuto presente quanto poco più sopra è detto in proposito, avremo:

$$\Phi_a = -\frac{1}{2} R_i^2 b_g \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \left( \lambda_1 r + \frac{\lambda'_1}{r} \right) \cos \varphi + \left( \lambda_2 r^2 + \frac{\lambda'_2}{r^2} \right) \operatorname{sen}(2\varphi) + \left( \lambda_3 r^3 + \frac{\lambda'_3}{r^3} \right) \cos(3\varphi).$$

Si tengano presenti le note identità:

$$\operatorname{sen}(2\varphi) = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \quad \text{e} \quad \cos(3\varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$$

Per  $r = R_i$  la  $\Phi_a$  assume sul contorno interno i valori:

$$\Phi_{ai} = -\frac{1}{2} b_g R_i^2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \left[ \lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} - 3 \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^2 \right] R_i \cos \varphi + \left[ 2 \left( \lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} \right) R_i^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 4 \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^3 \cos^3 \varphi \right].$$

Questa espressione si può identificare con quella di  $\Phi_{ei}$  sopra ricavata; infatti i termini *polidromi* in  $\left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$  già sono identici, e per i rimanenti basta uguagliare due a due i coefficienti dei termini simili: si ottiene così:

$$\lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} - 3 \left( \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} \right) R_i^2 = \frac{1}{2} (R_i^2 + b_g^2) ;$$

$$\lambda_2 + \frac{\lambda'_2}{R_i^4} = -\frac{1}{4} b_g \quad ; \quad \lambda_3 + \frac{\lambda'_3}{R_i^6} = -\frac{1}{24} \cdot \frac{m+2}{m+1}$$

e con opportuna eliminazione tra la prima e la terza di queste ultime, si trova:

$$\lambda_1 + \frac{\lambda'_1}{R_i^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3m+2}{m+1} R_i^2 + \frac{1}{2} b_g^2 .$$

Le ultime tre equazioni ora qui scritte sono le relazioni necessarie e sufficienti perchè la nota condizione sia esattamente soddisfatta in tutti i punti del contorno circolare interno. Esse permettono di esprimere separatamente ciascuno dei coefficienti  $\lambda'$  in funzione lineare dell'omologo  $\lambda$ . Rimangono così solamente incogniti i tre coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Le relative equazioni determinatrici si devono stabilire in modo da realizzare con la maggiore possibile approssimazione la nota condizione sul contorno esterno.

La scelta ottima di queste equazioni si fa come segue.

Anzitutto si deve osservare che nei due punti del contorno esterno situati sull'asse  $y$  (retta dei centri) — cioè nei punti per  $x=0$  e per  $y=R_c+a$  ed  $y=a-R_c$  rispettivamente — si deve avere per ragioni di evidente simmetria, oltre che  $\xi=0$ , anche  $\eta=0$ , e cioè:

$$\left(\frac{\partial\Phi_{ac}}{\partial x}\right)_{\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{(R_c+a)^2}{2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_{ac}}{\partial x}\right)_{\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{(R_c-a)^2}{2} = 0.$$

Sono così stabilite due equazioni.

La terza si potrà stabilire imponendo che nei punti del cerchio contorno esterno situati sul diametro parallelo all'asse  $x$ , sia nulla la deviazione angolare della  $\bar{\xi}$  rispetto al contorno: ciò, nel caso particolare qui trattato, si ottiene se si ha:

$$\text{per } \psi = 0 \quad \xi = -\frac{\partial\Phi_{ac}}{\partial y} = 0.$$

Quando si volesse una ancor maggiore approssimazione, occorrerebbe aggiungere nell'espressione di  $\Phi_n$  altri due termini analoghi ai precedenti, e cioè:

$$\left(\lambda_4 r^4 + \frac{\lambda'_4}{r^4}\right) \text{sen}(4\varphi) \quad \text{e} \quad \left(\lambda_5 r^5 + \frac{\lambda'_5}{r^5}\right) \cos(5\varphi).$$

Occorreranno così altre due equazioni, che si potranno stabilire imponendo che la detta deviazione angolare della  $\bar{\xi}$  rispetto al con-

torno esterno sia nulla nei punti del cerchio esterno per  $\psi = -\frac{\pi}{4}$  e  $\psi = +\frac{\pi}{4}$ .

Anche qui vale ciò che s'è detto per l'esempio a) precedente, a pag. 519 riguardo ad opportuna semplificazione, quando l'eccentricità sia piccola, ed a proposito del ritrovare per verifica come caso particolare quello della corona circolare centrata.

Abbiamo con quanto qui precede, esposti gli esempi più significativi per la flessione composta pura.

*Osservazione sui contorni con punti angolosi.* Anche nel caso del taglio, come già s'è detto per il caso della torsione, siffatti contorni presentano qualche difficoltà; su ciò non dobbiamo che richiamare l'osservazione sullo stesso argomento formulata a pag. 481.

III. FLESSIONE COMPOSTA COMPLETA (*Flessione, taglio e torsione simultanei*) DISTRIBUZIONE DI TENSIONI E DEDUZIONE DA ESSA DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO.

Vogliamo esporre qui le espressioni delle tensioni tangenziali che competono al caso più generale, in cui la torsione coesista con la flessione e il taglio.

Con le notazioni già usate nel precedente paragrafo II, avremo:

$$\tau_x = \frac{T_y}{I_x} \zeta = G\bar{\gamma}_x \quad \text{ossia:} \quad \tau_{xy} = \frac{T_y}{I_x} \xi = G\gamma_{xy} \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{T_y}{I_x} \eta = G\gamma_{yz}$$

e teniamo presenti le note relazioni.  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$   $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0$   $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$   $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0$

$$\text{div } \bar{\zeta} = -y \quad \text{rot } \bar{\zeta} = \frac{x + \delta}{2(m+1)}$$

ove  $\delta$  è, cambiata di segno, l'ascissa dei punti della retta  $x + \delta = 0$  parallela all'asse  $y$ , sulla quale si ha  $\text{rot } \bar{\zeta} = 0$ .

In modo analogo a quello seguito in principio del precedente paragrafo II, si trova che soddisfano alle due condizioni ora scritte le espressioni:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\delta}{2(m+1)} y \\ \eta &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 + \delta \cdot x}{2(m+1)} \end{aligned} \right. \quad (463)$$

ove  $\Phi$  deve essere armonica ( $\Delta_2 \Phi = 0$ ) e sul contorno deve assumere

i valori:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx - \frac{x^3 - x_0^3}{6(m+1)} - \frac{\bar{\epsilon}}{2(m+1)} \cdot \frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) \quad (464)$$

ove è  $r^2 = x^2 + y^2$ , ed i valori con l'indice 0 sono quelli che competono al punto arbitrario del contorno, preso come punto di partenza.

Queste sono le formule per la distribuzione della  $\bar{\zeta}$  nel caso più generale della *flessione composta completa* (flessione, taglio e torsione simultanei). Si ha  $\bar{\zeta} = 0$  in  $\bar{\zeta} = 0$  e  $\bar{\zeta}_2 = 0$ .

Vogliamo ora dimostrare come da queste espressioni delle tensioni tangenziali, nonché dalle notissime espressioni delle dilatazioni e dovute alla flessione, si possa, con accorgimenti e con opportune integrazioni, risalire alle componenti  $u, v, w$  dello spostamento di un punto generico del prisma elastico. Questo procedimento è certo utile ed opportuno come risulterà direttamente dal séguito.

Calcoliamoci anzitutto le componenti  $p, q, r$  della rotazione di spostamento. Incominciamo dalla  $r$ , notoriamente espressa da:

$$2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

e teniamo presenti le note espressioni delle  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ , ricordando che quest'ultima è sempre nulla nel nostro problema.

Si trova facilmente:

$$2 \operatorname{rot} \gamma_z = 2 \frac{\partial r}{\partial z}; \quad (465)$$

mentre, d'altra parte, dalla sopra riportata espressione di

$$\operatorname{rot} \bar{\zeta} = \frac{I_x}{T_y} \operatorname{rot} \tau_z \quad \text{si ricava:}$$

$$\operatorname{rot} \bar{\zeta} = \frac{T_y}{mEI_x} (x + \bar{\epsilon}).$$

Teniamo anche presenti le

$$\epsilon_x = \epsilon_y = - \frac{T_y}{mEI_x} (z - b)y \quad \epsilon_z = \frac{T_y}{EI_x} (z - b)y.$$

Essendo  $\gamma_{xy} = 0$ , risulta, dalla definizione di  $r$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = r$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{T_y}{mEI_x} (z - l)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = 0$$

e per la (465)

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{T_y}{mEI_x} (x + \delta).$$

Dalle tre ultime relazioni, per integrazione, tenendo in conto che per  $x = y = z = 0$  deve essere  $r = 0$ , si ottiene:

$$r = \frac{T_y}{mEI_x} [(z - l)x + \delta \cdot z]$$

(466)

*Si vede che per  $z = l$ ,  $r = \frac{T_y \delta}{mEI_x}$  e se  $\delta = 0$ ,  $r = 0$  cioè in corrispondenza con le espressioni (463) di  $\xi$  ed  $\eta$  introdurre la funzione  $\Psi$  coniugata della  $\Phi$ , cioè tale che: non vada in errore nel tratto  $z = l$  e  $z = 0$  dove  $r = 0$ .*

da confrontare con la (319), a pag. 331.

Per quello che segue può essere opportuno nelle espressioni (463) di  $\xi$  ed  $\eta$  introdurre la funzione  $\Psi$  coniugata della  $\Phi$ , cioè tale che:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Essa al contorno deve soddisfare alla condizione:

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{m+1} - \frac{y^2}{2} \right) \frac{dy}{dn} - \frac{\xi}{2(m+1)} \left( y \frac{dx}{dn} - x \frac{dy}{dn} \right) \quad (464 \text{ bis})$$

Ciò posto, proponiamoci ora di determinare anche le  $p$  e  $q$ .  
Dalla nota relazione:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} + p$$



derivando rispetto a  $z$  e tenendo presente che  $\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z$  e che le  $\gamma$  sono indipendenti da  $z$ , si trova:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = \frac{T_y}{EI_x} (z - l).$$

Deriviamo rispetto ad  $y$  la nota relazione:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} - p;$$

si ottiene:

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{yz} - \frac{\partial p}{\partial y};$$

di qui, tenendo presenti le note espressioni di  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{yz}$ , si trova:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{T_y}{EI_x} \left[ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + y \right].$$

Deriviamo ora rispetto ad  $x$  la nota relazione:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} + q$$

e si trova:

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{zx} + \frac{\partial q}{\partial x}$$

da cui si deduce:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{T_y}{EI_x} \left[ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{y}{m} \right].$$

Dalla nota relazione:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} - q$$

derivata rispetto a  $z$ , essendo notoriamente le  $\varepsilon$  indipendenti da  $x$  e

le  $\gamma$  indipendenti da  $z$ , si deduce :

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Dalla nota relazione:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

e dalla sopra ricavata espressione di  $r$  si ottiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{T_y}{mEI_x} (x + \hat{z}).$$

La differenza tra le stesse derivate qui a primo membro si può ottenere derivando rispetto ad  $x$  la

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} - p$$

e rispetto ad  $y$  la

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} + q,$$

sommando membro a membro, e ricordando che  $\gamma_{xy} = 0$ , si trova così:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right)$$

e per le note espressioni delle  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$  si trova:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{T_y}{mEI_x} \left| x - 2(m+1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right|;$$

e quindi, dalla somma e dalla differenza delle due derivate, si ricava infine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{T_y}{mEI_x} \left| (m+1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\hat{z}}{2} \right| \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= -\frac{T_y}{mEI_x} \left| -(m+1) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + x + \frac{\hat{z}}{2} \right|. \end{aligned}$$

Le due funzioni  $p$  e  $q$ , di ciascuna delle quali sono ora note le tre derivate parziali, si possono determinare, con opportune integra-

zioni, tenendo presenti le condizioni di vincolo che sono :

$$\text{per } x = y = z = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \text{ cioè: } p = -\frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{-T_y}{EI_x} \cdot \frac{b_2}{2};$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \text{ cioè: } q = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{T_y}{EI_x} \cdot \frac{a_2}{2};$$

essendo :

$$a_2 = -\frac{2(m+1)}{m} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{(00)},$$

$$b_2 = -\frac{2(m+1)}{m} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{(00)},$$

Per questa via, dopo facili calcoli, si trova :

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{T_y}{EI_x} \left[ -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{z^2 - y^2}{2} - lz - \frac{\partial}{\partial m} x - b_2 \right] \\ q &= \frac{T_y}{EI_x} \left[ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \left( x + \frac{\partial}{\partial 2} \right) \frac{y}{m} + a_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (466 \text{ bis})$$

Così restano determinate le  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .

Mediante le note relazioni (19) pag. 26, tenute presenti le espressioni delle  $\varepsilon \dots$  e  $\gamma \dots$ , si possono esprimere le tre derivate parziali di ciascuna delle tre componenti di spostamento  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Perciò queste si possono determinare con separate integrazioni rispetto alle tre coordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , tenendo conto delle note condizioni di vincolo, espresse dalle (164) a pag. 199.

Con queste direttive, dopo agevoli calcoli, che qui omettiamo per brevità, si trova :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{T_y}{EI_x} \left[ \frac{xy}{m} (l-z) - \left( \frac{\partial}{m} x - a_2 \right) z \right] \\ v &= \frac{T_y}{EI_x} \left[ \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) \frac{l}{2} - \left( \frac{z^2}{6} - \frac{x^2 - y^2}{2m} - \frac{\partial}{m} x - b_2 \right) z \right] \\ w &= \frac{T_y}{EI_x} \left[ \frac{yz^2}{1} - yx^2 - lyz - \frac{2(m+1)}{m} \Psi + \frac{2m+1}{6m} (3x^2y - y^3) + \right. \\ &\quad \left. - a_2x - b_2y \right]. \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

Queste espressioni si devono confrontare con le (311) a pag. 386. Le prime due delle (467) differiscono dalle due omologhe delle (311) soltanto per l'introduzione dei termini contenenti  $\hat{z}$ , (i quali rappresentano l'effetto della torsione), e poi per il diverso valore delle  $a$  e  $b$ , (che qui sono  $a_2$  e  $b_2$ ): differenza questa dovuta pure al fatto che esiste la torsione, ed inoltre che la funzione  $\Psi'$  qui introdotta tiene nell'espressioni di  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  un ruolo diverso da quello della  $\Psi'$  introdotta nella (316) a pag. 328. La differenza però è solamente formale, com'è facile verificare mediante ovvie relazioni che devono intercedere tra le due funzioni armoniche qui indicate.

L'impostazione del problema qui fatta si deve ritenere più opportuna di quella esposta nelle trattazioni precedenti, sia per la maggiore generalità, (avendo riunito vari casi di sollecitazione in un'unica rappresentazione) sia in quanto è molto più naturale e didatticamente convincente ricavare la distribuzione delle tensioni dalle ovvie condizioni di equilibrio e di congruenza e poi dalle tensioni stesse dedurre, con note relazioni, la natura e la configurazione della deformazione.

Il procedimento è analogo a quello (molto più semplice), già esposto a pag. 225 a proposito della flessione semplice.

## BIBLIOGRAFIA

### SUGLI ARGOMENTI DI QUESTA APPENDICE

Segniamo qui le citazioni precise dei lavori già accennati nel corso di questa *Appendice*.

- A. A. G. GRIFFITH and G. J. TAYLOR. *The application of soap film to the determination of the torsion and flexure shafts*. — Technical report of the Advisory Committee for Aeronautics for 1917-18. London. Reports and Memoranda, n. 392.
- Idem. *The problem of flexure and its solution by the soap film method*. Ibidem. Reports and Memoranda n. 399.
- GIUSEPPE ALBENGA. *Estensione dell' analogia di Prandtl*. Annali dei Lavori Pubblici, Roma, agosto 1927-V.
- CARLO LUIGI RICCI. *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione*. — Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Società Reale) di Napoli. Serie 4.<sup>a</sup> Vol. V, 1935-XII.
- Idem. *Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione od a taglio*. — *Speciali avvertenze per i casi di sezioni presentanti punti angolosi (in particolare rettangolari)*. — Ibidem. Serie 4.<sup>a</sup> Vol. VI, 1937-XIV.
- Idem. *Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione*. — *Precisazione e generalizzazione del concetto di centro di taglio*. — Ibidem. Serie 4.<sup>a</sup>, Vol. VI, 1937-XIV.
- Idem. *Ulteriori complementi allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a flessione composta*. — Ibidem. Serie 4.<sup>a</sup> vol. IX, 1938-39-XVII.

### NOTA

La memoria citata a pag. 429 è la seguente:

CARLO LUIGI RICCI. *Calcolo rigoroso delle tensioni ideali massime in un cilindro circolare soggetto a flessione torsione e taglio*.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Società Reale) di Napoli, novembre 1941, XX.

Sul progetto diretto delle sezioni soggette a sollecitazione composta si può confrontare:

CARLO LUIGI RICCI. *Sui solidi di eguale resistenza a flessione*. Annali della Società degli Ingegneri ed Architetti Italiani, 1913, Roma.