Identificando i coefficienti omologhi di sen $(m_n y)$ in questa serie ed in quella che compare nella (449) si trova ovviamente:

$$A_n = \frac{32}{\pi^3} b^2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3 \cosh(m_n a)} \tag{450}$$

Con ciò la funzione Φ espressa dalla (448) è perfettamente determinata.

Conforme alle (435), (446) e (447) si verifica che la Φ ora trovata è coniugata della Ψ riportata con la (275) nel N.° 53, a pag. 290.

Si deve notare che colà si è presentato un errore materiale, ripetuto poi nelle formule conseguenti; errore che viene poi indicato nell' « *errata corrige* » in fine del volume: *è errato il coefficiente* $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2$, *che deve essere corretto in* $\frac{32}{\pi^3}$ [com' è scritto nella (450)].

Si noti che per $y = \pm b$ è, per ogni m_n, $\cos(m_n b) = 0$, la Φ si riduce a $\Phi_c = \frac{1}{2}(b^2 - x^2)$ e perciò la F diviene:

$$F_c = b^2 \ ;$$

questo è dunque il valore che F assume sul contorno.

Naturalmente vale anche qui la permutabilità degli assi coordinati, al fine di determinare la Φ, analoga a quella già riconosciuta per la Ψ a pag. 290.

Data la relativa complicazione formale della funzione F, per il tracciamento delle traiettorie delle τ_z non riesce agevole il calcolo numerico delle equazioni $F = \text{cost.}$; può essere consigliabile invece calcolare i valori di F in molti punti opportunamente distribuiti sulla sezione, con tracciamento di diagrammi della F p. es. per $x = \text{cost}$ e poi per $y = \text{cost}$, e quindi, con inserzione sui detti diagrammi di ordinate uguali alla costante C fissata, ricavare in conseguenza varî punti in cui $F = C$, i quali punti verranno poi riuniti con una curva continua: il procedimento è analogo a quello in uso sui piani quotati, per ricavare le linee di livello.

Per brevità lasciamo al lettore la cura di ricavare, con opportuna integrazione, eventualmente approssimata o grafica, dall'esposta espressione di F, il valore del noto volume V, per le opportune sopra specificate applicazioni.

Altre generalità sulla determinazione approssimata delle fun-

zioni Φ e Ψ; — estensione al caso di sezioni a connessione multipla (con cavità interne).

Precisiamo ora ulteriormente quanto è esposto a pag. 469 sulla determinazione della funzione Φ (e conseguentemente dalla coniugata Ψ). Espressa dunque la Φ come combinazione lineare di un certo numero n di note funzioni armoniche, (convenientemente scelte, tenendo opportunamente conto delle eventuali condizioni di simmetria, o di altre particolarità del contorno), le n equazioni necessarie per il calcolo degli n coefficienti incogniti della detta combinazione lineare si possono ottenere esprimendo che la funzione $F = \Phi + \frac{1}{2} r^2$ debba assumere valori fra loro uguali in $n + 1$ punti del contorno convenientemente scelti (e spaziati) sul contorno stesso. Risolto il sistema delle n equazioni lineari e ricavati i valori degli n coefficienti che nella combinazione lineare moltiplicano le n funzioni armoniche *elementari* scelte come sopra, è facile calcolare, per sostituzione il valore sopra detto assunto dalla F nei detti $n + 1$ punti scelti sul contorno.

Tale valore rappresenta il valore F_c della F sul contorno: la F poi avrà un valore minimo F_{min} in un punto interno, nel quale si avrà $\tau_z = 0$; il flusso totale di τ_z circolante tra questo punto ed il contorno è proporzionale a $F_c - F_{min}$.

Sarà poi facile calcolare il valore di F in varî altri punti dal contorno, diversi da quelli scelti come sopra; sarà opportuno tracciare un diagramma della variazione di F sul contorno, riferito come ascisse alle lunghezze degli archi misurati sul contorno; il grado dell'approssimazione raggiunta si otterrà calcolando lo scarto massimo dei detti valori di F sul contorno rispetto ad F_c e poi facendo il rapporto tra questo scarto ed il valore $F_c - F_{min}$.

Sezioni a connessione multipla (con cavità interne). Sia m il numero dei contorni di cavità interne. Si dovranno scegliere, convenientemente distribuiti sui varî contorni (compreso l'esterno), più numerosi sui contorni più lunghi, $n + m + 1$ punti; e si otterranno n equazioni tra gli n coefficienti incogniti, imponendo che risultino uguali i valori della F nei punti scelti su uno stesso contorno. Risolto il sistema delle n equazioni lineari si calcoleranno i valori di F nei punti scelti: per ciascun contorno $i.^{simo}$ si avrà un valore F_{ci} (diverso per diversi contorni): anche qui si otterrà la misura dell'approssimazione raggiunta rapportando lo scarto massimo di F su ciascun contorno rispetto al relativo F_{ci}, alla differenza $F_{ce} - F_{min}$ (F_{ce} sul contorno esterno, ed F_{min} il minimo tra tutti i valori assunti da F in punti effettivi della sezione).

In caso di sezioni cave si possono assumere tra le funzioni armoniche elementari (costituenti della combinazione lineare), anche funzioni che diventino infinite in qualche punto, purchè questo punto singolare risulti p. es. interno ad una delle cavità interne e perciò *non* appartenente effettivamente alla sezione. Tali sono ad esempio le funzioni P_n e Q_n (v. pag. 469) per n negativo: il loro uso può essere vantaggioso insieme a quello delle corrispondenti funzioni per n positivo, in quanto r^n è crescente con r per n positivo e decrescente con r per n negativo, sicchè le due leggi di variazione tendono a compensarsi.

Un modo suggestivo ed elegante per stabilire le n equazioni lineari tra gli n coefficienti incogniti A_k si può ottenere come applicazione del noto *metodo dei minimi quadrati.* Applicando il noto concetto a base di questo metodo, si assumono come valori risolventi degli n coefficienti incogniti *quei valori che rendono minima la somma dei quadrati degli scostamenti di* F *dal valor medio* F_{ci} *di essa per ciascun contorno* $i.^{esimo}$; trattandosi di variazione continua della F sulle linee di contorno, la somma ora detta si realizza con tanti integrali rispetto all' arco s dei varî contorni, esteso ogni integrale al rispettivo contorno. Detta J tale somma di quadrati, si avrà:

$$J = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{s_i} (F - F_{ci})^2 \, d s_i$$

(estesa la Σ a tutti i contorni compreso quello esterno).

La F si deve intendere espressa da:

$$F = \sum_{k=1}^{n} A_k \, \Phi'_k + \frac{1}{2} r^2 \quad , \tag{451}$$

ove Φ'_k è la generica tra le n funzioni armoniche scelte a costituire la combinazione lineare.

Le incognite in questo caso sono gli n coefficienti A_k e le equazioni determinatrici sono le n seguenti:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial J}{\partial A_j} = \sum_{i=1}^{m+1} \int_{s_i} (F - F_{ci}) \frac{\partial F}{\partial A_j} \, d s_i = 0 \tag{452}$$

ove, secondo la (451), si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial A_j} = \Phi'_j \quad . \quad \text{ed } j \text{ varia tra 1 ed } n, \text{ (come } k).$$

D' altra parte, ponendo:

$$\Phi'_{k\,mi} = \frac{1}{s_i} \int_{s_i} \Phi'_k \, d s_i \qquad \text{e} \qquad (r^2)_{mi} = \frac{1}{s_i} \int_{s_i} r^2 \, d s_i \ ,$$

si ha:

$$F_{ci} = \frac{1}{s_i} \int_{s_i} F \, d s_i = \sum_{i=1} A_k \Phi'_{k\,mi} + \frac{1}{2} (r^2)_{mi}$$

e quindi, sostituendo nelle (452), dopo ovvie riduzioni, si trova:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{i=1}^{m+1} \int_{s_i} (\Phi'_k - \Phi_{k\,mi}) \Phi'_j \, d s_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m+1} \int_{s_i} [r^2 - (r^2)_{mi}] \Phi'_j \, d s_i = 0 \qquad (453)$$

Questa è la forma definitiva delle n equazioni determinatrici (una per ciascun valore di j), le quali sono lineari nelle A_k. Gli integrali che ivi compaiono, se presentano difficoltà analitiche, si possono eseguire per approssimazione, eventualmente per via grafica.

Contorni con punti angolosi. Siffatti contorni presentano alcune difficoltà, lo studio delle quali esorbita dai limiti di questo libro: basti qui indicare che i mezzi e gli avvedimenti per superare tali difficoltà sono indicati ed illustrati nel secondo dei miei lavori che verranno citati più innanzi: ad esso potrà far ricorso il lettore che volesse approfondire l'argomento.

Esempio di sezione doppiamente connessa: Sezione cava compresa tra due ellissi concentriche e coassiali, non omotetiche.

Il caso particolare qui considerato serve quale esempio della determinazione approssimata della funzione Φ, espressa come combinazione lineare di funzioni armoniche opportunamente scelte, secondo ciò che è esposto più sopra. I coefficienti della combinazione lineare verranno qui determinati nel primo (e più semplice ed elementare) dei modi testè esposti, cioè uguagliando i valori di F in punti opportunamente scelti sull' uno e sull' altro dei due contorni.

Siano m_e ed n_e i due semiassi (distesi su x ed y) dell' ellisse contorno esterno, e siano m_i ed n_i gli analoghi semiassi dell'ellisse contorno interno, e sia $\frac{m_e}{n_e} \neq \frac{m_i}{n_i}$.

Per ciascuno dei due contorni il raggio vettore uscente dal centro è funzione periodica dell'*anomalia* φ contata da $+x$, con periodo π; cioè con due periodi per ogni giro.

Inoltre le funzioni che uguagliate a costante costituiscono le equazioni dei contorni, sono *pari* in x ed in y. Ne consegue che, volendo scegliere come funzioni componenti la combinazione lineare, delle funzioni razionali, queste dovranno essere P di indice pari, cioè P_2, P_{-2}, P_4, P_{-4}, ecc. — Per contorni non eccessivamente allungati si può ottenere buona approssimazione con i soli polinomî di ordine 2 e -2.

Si ponga dunque:

$$F = \left(Ar^2 + \frac{B}{r^2}\right)\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}r^2 \tag{454}$$

Le costanti A e B si possono determinare con le condizioni che la F assuma valori uguali nei vertici dell'ellisse contorno esterno e valori uguali fra loro, (ma diversi dai primi) nei vertici dell'ellisse contorno interno.

Le equazioni determinatrici di A e B saranno dunque: per l'ellisse esterna:

$$A m_e^2 + \frac{B}{m_e^2} + \frac{1}{2}m_e^2 = -An_e^2 - \frac{B}{n_e^2} + \frac{1}{2}n_e^2 \tag{455}$$

e cioè:

$$A(m_e^2 + n_e^2) + B\left(\frac{1}{m_e^2} + \frac{1}{n_e^2}\right) = \frac{1}{2}(n_e^2 - m_e^2) \tag{455 bis}$$

ed analogamente, per l'ellisse interna:

$$A(m_i^2 + n_i^2) + B\left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{1}{2}(n_i^2 - m_i^2) \tag{455 ter}$$

e semplificando:

$$\left.\begin{aligned} A + \frac{B}{m_e^2 n_e^2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n_e^2 - m_e^2}{m_e^2 + n_e^2} \\ A + \frac{B}{m_i^2 n_i^2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n_i^2 - m_i^2}{m_i^2 + n_i^2} \end{aligned}\right\} \tag{456}$$

dalle quali è facile ricavare i due coefficienti A e B, che sostituiti nella (454) ci dànno la F risolvente.

Sostituite le A e B nella (455) e nella sua analoga per il contorno interno, si trovano i valori F_{ve} ed F_{vi} assunti dalla F nei vertici delle ellissi esterna ed interna rispettivamente.

È necessario poi studiare (eventualmente a mezzo di diagrammi) la legge secondo cui la F trovata come sopra, varia lungo ciascuno dei contorni (limitatamente però ad un quadrante compreso tra due vertici, e ciò in virtù della simmetria così dei contorni come della funzione), e calcolare i massimi scostamenti $(\Delta F)_{me}$ e $(\Delta F)_{mi}$ della F rispettivamente dai valori F_{ve} ed F_{vi}. Indi si dovranno assumere come valori costanti della F sui due contorni i valori:

$$F_{ce} = F_{ve} + \frac{1}{2}(\Delta F)_{me} \qquad \text{e}$$

$$F_{ci} = F_{vi} + \frac{1}{2}(\Delta F)_{mi}$$

Si noti poi che la differenza $F_{ce} - F_{ci}$ è proporzionale al flusso totale di $\bar{\tau}_z$ circolante tra i due contorni.

Quindi la misura del grado dell'approssimazione raggiunta si otterrà calcolando i rapporti:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta F)_{me}}{F_{ce} - F_{ci}} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta F)_{mi}}{F_{ce} - F_{ci}}$$

e l'approssimazione si potrà ritenere soddisfacente se questi rapporti risulteranno abbastanza piccoli.

Poi, per $F_{ci} < C < F_{ce}$, la F calcolata secondo le (454) e (456) uguagliata a C, fornisce l'equazione $F = C$ di una generica traiettoria di τ_z; in particolare le equazioni $F = F_{ce}$ ed $F = F_{ci}$ rappresentano linee che, ove si sia raggiunta una sufficiente approssimazione, si scostano pochissimo dai contorni esterno ed interno rispettivamente.

Lo scostamento δ_n secondo la normale in un punto generico di un contorno è ovviamente espresso da:

$$\delta_n = \frac{F_c - F}{\dfrac{dF}{dn}} = \frac{F_c - F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

Altra significativa verifica è quella della tangente (o del seno) dell'angolo ϑ tra la tangente al contorno in un punto e la direzione della τ_z deducibile nello stesso punto dalla F (approssimata) secondo le (431) o (431 bis), pag. 454.

Se $f =$ cost. è l'equazione del contorno, si ha notoriamente, secondo le usuali notazioni del calcolo vettoriale:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{|\operatorname{grad} f \wedge \operatorname{grad} F|}{\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} F}$$

(ricordiamo che $\wedge$ significa *prodotto vettoriale* o *esterno* e $\times$ significa *prodotto scalare* o *interno*, e $|v|$ significa *modulo* del vettore v.).

L'espressione ora scritta si potrà eventualmente trasformare mediante le relazioni note nella geometria analitica e differenziale, facendo comparire le derivate parziali delle due funzioni f ed F.

La tang ϑ è interessante perchè rappresenta l'*errore relativo dal punto di vista statico*, in quanto esprime il rapporto tra la componente normale della τ_z dedotta dalla F (componente che dovrebbe essere nulla) e la grandezza della stessa $\overline{\tau_z}$. Sarà opportuno ricercare i valori massimi di tang ϑ lungo il contorno considerato.

Quando si voglia realizzare nel calcolo della F una maggiore approssimazione si potranno aggiungere nell'espressione di F anche dei termini di quarto ordine [contenenti $\cos(4\varphi)$], e cioè porre:

$$F = \left(A r^2 + \frac{B}{r^2}\right)\cos(2\varphi) + \left(C r^4 + \frac{D}{r^4}\right)\cos(4\varphi) + \frac{1}{2} r^2 \qquad (454\text{ bis})$$

Per determinare i coefficienti $A, B, C, D,$ occorrono quattro equazioni che conviene scegliere con il criterio seguente:

Il modo migliore e più opportuno per realizzare approssimativamente su ciascun contorno la condizione $F =$ costante, (con un assegnato numero di parametri o coefficienti incogniti) evidentemente consiste nell'ottenere che i valori massimi geometrici assunti dalla F sul contorno stesso siano tutti uguali tra loro e così pure i minimi siano tutti uguali tra loro. In tal caso la semisomma dei due valori così realizzati si assumerà come valore F_c approssimato della F sul contorno, e la semidifferenza tra gli stessi valori rappresenterà lo scostamento massimo della F dal valore F_c che compete al contorno. *Ciò vale evidentemente in generale*, se pure qui è enunciato occasionalmente a proposito dell'esempio ora trattato.

Nel caso particolare qui studiato, la funzione F su ciascun contorno, per evidenti ragioni di simmetria, è periodica rispetto a φ, con periodo π.

In base ai noti concetti relativi all'*analisi armonica* di una funzione periodica ed al suo *sviluppo in serie di* FOURIER, risulta che, avendo nella (454 bis) introdotto termini di 2.° ordine (in 2φ) e di 4.° ordine (in 4φ), la più opportuna determinazione dei coefficienti incogniti (da effettuarsi in base a due equazione su ciascun contorno), dovrà ottenere che su ciascun contorno lo scostamento della F dal suo valor medio (per lo stesso contorno), sia una funzione periodica sviluppabile con termini dal 6.° ordine in poi (— i termini successivi saranno pure di ordine pari —); con ciò la sua *prima armonica* è di periodo $\frac{\pi}{3}$, e perciò il quadrante da $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ corrisponde ad *un'onda e mezza.*

Con grande approssimazione si può ritenere che i massimi e minimi si abbiano in corrispondenza dei « ventri » della detta *prima armonica*; d'altra parte, ancora per la simmetria si devono avere « ventri » nei vertici (dell'ellisse), per $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$; e quindi altri « ventri » si dovranno avere per $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

La condizione di ottima approssimazione si otterrà imponendo che i valori di F nei « ventri » di ordine pari siano uguali tra loro e lo stesso accada nei « ventri » di ordine dispari. — (E' importante notare che un eventuale errore nella valutazione ora detta della esatta posizione degli effettivi « ventri », è destinato ad avere effetto trascurabile su questo calcolo, in quanto nei detti punti la F è in condizione di massimo o di minimo, ed i valori ivi da essa assunti sono pochissimo influenzati da un eventuale scostamento del punto del contorno, nel quale ogni singolo valore viene calcolato).

Le condizioni ora dette, su ciascun contorno si possono esprimere simbolicamente così:

$$F_{(0)} = F_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad F_{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = F_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} .$$

E complessivamente per i due contorni, si hanno in tutto quattro equazioni lineari, dalle quali restano determinati i quattro coefficienti A, B, C, D. — Considerazioni analoghe a quelle svolte più sopra, si possono qui ripetere a proposito di ciò che riguarda la definitiva determinazione delle F_{ce} ed F_{ci}, le verifiche dell'approssimazione realizzata, le equazioni delle traiettore di τ_z ed in particolare dei due *contorni approssimati* risultanti dal calcolo svolto.

Si deve notare che se uno dei due contorni è circolare di raggio R, su di esso la condizione al contorno può essere soddisfatta esattamente in tutti i punti: ossia si può ottenere che in ogni punto del contorno stesso la F sia costantemente uguale a $\frac{1}{2} R^2$; ciò si realizza evidentemente ponendo:

$$A + \frac{B}{R^4} = 0 \qquad \text{e} \qquad C + \frac{D}{R^8} = 0 \quad ;$$

perciò il numero dei coefficienti incogniti si riduce a metà di quello del caso generale. Notiamo che la prima di queste due relazioni coincide con una delle (456), p. es. con la seconda per $m_i = n_i = R$.

Come istruttivo esempio, riportiamo i risultati numerici relativi ad un caso particolare: sarà agevole al lettore riprodurre e verificare i calcoli qui accennati.

Si è posto:

$$m_e = 3 \qquad n_e = 2 \qquad m_i = n_i = R_i = 1.$$

Ci limitiamo all'approssimazione consentita dalla (454) con i soli termini di secondo ordine.

Dalla seconda delle (456) risulta:

$$B = -A R_i^4 = -A$$

e dalla prima delle stesse (456), eseguite le operazioni numeriche, si trova:

$$A = -\frac{18}{91} = -0{,}1978022\ldots$$

da cui:

$$F = -0{,}1978022\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\cos(2\varphi) + \frac{1}{2} r^2 \tag{457}$$

mentre d'altra parte l'equazione polare dell'ellisse contorno esterno (cfr. anche pag. 470 e 471) è:

$$\left|\frac{1}{2} - 0{,}19230769 \cos(2\varphi)\right| r^2 = 2{,}76923077 \tag{458}$$

Il valore di F nei vertici dell' ellisse esterna è:

$$F_{ve} = 2{,}7417583\ldots\ldots$$

Studiando la legge di variazione della F secondo la (457) sul contorno ellittico esterno, è facile riscontrare che si ha un massimo di F per φ all'incirca uguale a 42^0. Questo valore F_{me} per ragioni ovvie risulta moltissimo prossimo al valore che F assume sul contorno per $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $[\cos(2\varphi) = 0]$, il quale secondo le (457) e (458) è

$$F_{me} = 2{,}76923077$$

onde:

$$(\Delta F)_{me} = 0{,}0274724$$

e perciò il valore di F sul contorno esterno si dovrà assumere:

$$F_{ce} = F_{ve} + \frac{1}{2}(\Delta F)_{me} = 2{,}7554945 \quad ,$$

mentre poi si ha sul contorno interno, esattamente in ogni punto:

$$F_{ci} = 0{,}5$$

Il flusso totale di τ_z circolante tra i due contorni è dunque proporzionale a:

$$F_{ce} - F_{ci} = 2{,}2554945$$

Il grado dell'approssimazione raggiunta è dato quindi dal rapporto:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta F)_{me}}{F_{ce} - F_{ci}} = \frac{0{,}0137362}{2{,}2554945} = \sim 0{,}0061$$

L'approssimazione è dunque ottima, con i soli termini di secondo ordine, e quindi con un solo coefficiente incognito A.

Si può anche calcolare lo scostamento del contorno esterno approssimato $F = F_{ce}$ rispetto all'ellisse primitiva assegnata: ciò si fa mediante la formula esposta a pag. 483; conviene calcolare di tale scostamento i valori massimi in valore assoluto, due dei quali si verificano nei vertici, per $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ed un altro molto prossimamente per $\varphi = \frac{\pi}{2}$. La formula ora citata, qui si trasforma così:

$$\delta_n = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta F)_{me}}{\frac{dF}{dn}}$$

ove il segno + vale per i vertici $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (scostamento verso l'esterno), ed il — vale per il punto per $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (scostamento verso l'interno).

Eseguendo i calcoli numerici si trova:

$$\text{per } \varphi = 0 \qquad \delta_n = \frac{0{,}0137362}{1{,}7985348} = 0{,}00763743$$

$$\text{per } \varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \delta_n = \frac{-0{,}0137362}{2{,}5214563} = 0{,}00544773$$

$$\text{per } \varphi = 3\frac{\pi}{8} \qquad \delta_n = \frac{0{,}0137362}{2{,}8406593} = 0{,}004835567$$

Occorre ricordare che l'unità di lunghezza è il raggio del cerchio interno. Gli scostamenti sono dunque piccolissimi e l'approssimazione è ottima.

Si è calcolato pure, nel modo indicato a pag. 484 lo *scostamento angolare* dei due contorni (dato ed approssimato) nei punti per $\varphi = \frac{\pi}{8}$ e $\varphi = 3\frac{\pi}{8}$, nei quali esso molto prossimamente raggiunge i valori assoluti massimi, e si è trovato:

$$\text{per } \varphi = \frac{\pi}{8} \qquad \text{tang } \vartheta = 0{,}00932221$$

$$\text{per } \varphi = 3\frac{\pi}{8} \qquad \text{»} \quad = 0{,}00794315$$

Anche sotto questo punto di vista l'approssimazione raggiunta è pienamente soddisfacente.

Per brevità omettiamo di riportare esplicitamente il tracciamento delle traiettorie $F = C$: esso si può fare facilmente in via grafica con l'ausilio di varî diagrammi della F al variare di r, tenendo fisso per ogni diagramma l'angolo φ: con l'inserzione di ordinate di valore C in ciascun diagramma, si possono facilmente riportare sulla sulla sezione i punti in cui $F = C$ e tracciare quindi per punti la corrispondente traiettoria.

Così pure omettiamo di eseguire la determinazione del noto volume V; notiamo però che il suo calcolo può essere semplificato appunto dal predetto tracciamento delle traiettorie, e dalla misura delle aree comprese nelle singole traiettorie chiuse.

Ancora a titolo d'esempio, e per illustrare la possibilità di ottenere agevolmente un'approssimazione anche maggiore di quella già raggiunta, abbiamo eseguita, per lo stesso caso particolare qui trattato, la determinazione della F, secondo l'espressione (454 bis) ed applicando, per il calcolo dei coefficienti, il criterio esposto a pag. 484 e seg.[1]

Si è trovato:

$$F = -0{,}19905782\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\cos(2\varphi) + 0{,}00035839\left(r^4 - \frac{1}{r^4}\right)\cos(4\varphi) + \frac{1}{2}r^2 \qquad (475\ \text{bis})$$

Con ciò, sul contorno ellittico esterno si hanno per F valori massimi, uguali tra loro, per $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{3}$:

$$F_{(0)} = F_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2{,}75962231$$

e valori minimi, uguali tra loro, per $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$F_{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = F_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2{,}75217866.$$

La semisomma di questi valori è:

$$F_{ce} = 2{,}755900485$$

La loro semidifferenza è:

$$\frac{1}{2}(\Delta F_{me}) = 0{,}003721825.$$

Quindi, in modo analogo a quello seguíto più sopra, si calcola il grado di approssimazione raggiunta, (scarto relativo del flusso sul contorno esterno, riferito al flusso totale), nel rapporto:

$$\frac{\frac{1}{2}(\Delta F)_{me}}{F_{ce} - F_{ci}} = \frac{0{,}003721825}{2{,}255900485} = 0{,}00164982 \qquad (F_{ci} = 0{,}5)$$

Questo rapporto è dunque $\sim 0{,}271$ volte l'analogo rapporto trovato nel calcolo precedente: lo scarto relativo si trova così ridotto *a meno di un terzo* di quello della prima approssimazione precedente.

Poichè i valori della $\frac{dF}{dn}$ restano ora molto prossimamente e praticamente gli stessi di quelli del calcolo precedente, gli scostamenti lineari normali del profilo approssimato nei vertici assumeranno i valori determinati nell'approssimazione precedente, ridotti secondo lo stesso coefficiente testè calcolato; si avrà dunque:

$$\text{per } \varphi = 0 \qquad \delta_n = 0{,}00763743 \times 0{,}271 = \sim 0{,}00207$$

$$\text{per } \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \delta_n = 0{,}004835567 \times 0{,}271 = \sim 0{,}001337$$

Per $\varphi = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ si hanno prossimamente altri due « ventri » di scostamento ed ivi δ_n assumerà valori intermedî tra i due estremi ora calcolati.

I massimi *scostamenti angolari*, che si verificano prossimamente nei « nodi » di scostamento lineare normale e cioè per $\varphi = \frac{\pi}{8}$, $\varphi = \frac{3\pi}{8}$, $\varphi = \frac{5\pi}{8}$, *come ordine di grandezza* saranno, rispetto ai precedenti, ridotti nel rapporto $\frac{3}{2} \times 0{,}271$ perchè la *lunghezza d'onda* dell'errore (o « resto ») si trova in questo caso ridotta ai $\frac{2}{3}$ dell'analoga lunghezza valevole nell'approssimazione precedente.

Resta dunque constatato come, con calcoli relativamente semplici, si possa realizzare una funzione F, la quale soddisfi la condizione al contorno con approssimazione grandissima.

Altro esempio. Corona circolare eccentrica. — Il contorno esterno sia un cerchio di raggio R_e e di centro C_e; si abbia poi una cavità interna avente per contorno un altro cerchio di raggio R_i e di centro C_i, diverso da C_e; sia a l'eccentricità: $C_i C_e = a$, ed evidentemente dovrà essere, con un congruo margine $R_e > R_i + a$, cioè $a < R_e - R_i$.

Si assuma come origine O il centro C_i del cerchio contorno interno, e l'asse x coincidente con la retta dei centri $C_i C_e$, col verso positivo dalla parte di C_e (in modo che le coordinate di questo siano a e 0).

L'equazione polare del contorno esterno sarà dunque:

$$r = a \cos \varphi + R_e \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_e^2} \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

Per evidenti ragioni di simmetria la F dovrà essere periodica in φ con periodo $= 2\pi$, dovrà essere pari in y, e di parità non definita in x: perciò le funzioni armoniche elementari della combinazione lineare già citata devono essere P_n, per n intero pari e dispari, positivo e negativo.

Perchè si possa ottenere buona approssimazione con pochi parametri occorrerà che l'eccentricità a sia relativamente piccola in confronto con la differenza dei raggi $R_e - R_i$; ciò è verificato nei casi più comuni che possono interessare nella pratica.

Ciò posto, limitandoci, per fare un esempio semplice, a due soli parametri incogniti, dovremo porre:

$$F = \lambda_1 \left(r - \frac{R_i^2}{r} \right) \cos \varphi + \lambda_2 \left(r^2 - \frac{R_i^4}{r^2} \right) \cos (2\varphi) + \frac{1}{2} r^2$$

ove le parentesi si annullano per $r = R_i$, e perciò la condizione al contorno è soddisfatta esattamente su tutto il contorno interno.

Per soddisfarla per approssimazione sul contorno esterno, si procede in modo analogo a quello seguíto nell'esempio precedente. E cioè, se i parametri λ_1 e λ_2 vengono determinati in modo da operare la « compensazione » dei termini periodici di primo e di secondo ordine, lo scostamento residuo della F dal suo valor medio, sul contorno esterno, dovrà essere una funzione periodica in φ con *prima armonica* del terzo ordine, e perciò con « ventri » per $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ e $\varphi = \pi$; perciò le condizioni determinatrici di λ_1 e λ_2 si otterranno uguagliando i valori di F nei « ventri » non consecutivi (cioè quelli di posto pari uguali fra loro, e così pure uguali fra loro quelli di posto dispari). Ciò si indica simbolicamente come segue:

$$F_{(0)} = F_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \qquad \text{e} \qquad F_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} = F_{(\pi)}.$$

Si è fatto il calcolo numerico per $R_e = 90$ $R_i = 45$ ed $a = 15$ (i numeri possono indicare p. es. millimetri).

Con ciò l'equazione polare del contorno esterno diviene:

$$r = 15 \cos\varphi + 90 \sqrt{1 - 0{,}277778 \operatorname{sen}^2\varphi}$$

e l'espressione della F è:

$$F = \lambda_1 \left(r - \frac{2025}{r}\right) \cos\varphi + \lambda_2 \left(r^2 - \frac{4100625}{r^2}\right) \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} r^2.$$

Si sono risolte per questo caso le due equazioni (determinatrici di λ_1 e λ_2) sopra espresse, e con calcoli numerici ovvî, che qui si omettono per brevità, si è trovato:

$$\lambda_1 = -20{,}4211469 \qquad \lambda_2 = 0{,}01045565$$

ed in conseguenza:

$$F_{(0)} = F_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \sim 3868{,}11$$

$$F_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} = F_{(\pi)} = \sim 3844{,}44.$$

Da un diagramma eseguito per i valori di F al variare di φ si è avuto conferma che i valori massimi e minimi di F coincidono praticamente con quelli ora calcolati.

La loro semisomma costituisce il valore F_{ce} da assumere per la F sul contorno esterno:

$$F_{ce} = \frac{1}{2}(3868{,}11 + 3844{,}44) = 3856{,}275$$

mentre sul contorno interno si ha esattamente il valore

$$F_{ci} = \frac{1}{2} R_i^2 = \frac{1}{2} 2025 = 1012{,}50.$$

L'incremento di F tra il contorno interno e quello esterno è:

$$F_{ce} - F_{ci} = 3856{,}275 - 1012{,}500 = 2843{,}775.$$

Frattanto lo scarto massimo di F sul contorno esterno, rispetto al valore F_{ce} è:

$$\frac{1}{2}(\Delta F)_{me} = \pm \frac{1}{2}(3868{,}11 - 3844{,}44) = \pm 11{,}835.$$

E quindi l'errore relativo del flusso sul contorno esterno, rispetto al flusso totale circolante tra i due contorni è:

$$\frac{11{,}835}{2843{,}775} = 0{,}004165 \sim$$

e ciò prova che l'approssimazione raggiunta è molto grande.

Lo scostamento lineare del contorno esterno approssimato $F = F_{ce}$ rispetto a quello effettivo dato sarà massimo per $\varphi = 0$, ove la $\frac{dF}{dn}$ (che ivi coincide con la $\frac{\partial F}{\partial r}$) ha il valore minimo, che, eseguite le operazioni numeriche si trova pari a $\sim 83{,}12$: quindi risulta, secondo la formula a pag. 483;

$$\delta_n = -\frac{11{,}835}{83{,}12} = -0{,}1423$$

pari a 0,00158 volte il raggio esterno.

Per ulteriore verifica si è calcolata la deviazione angolare definita a pag. 484; il calcolo fu eseguito per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ove si ha molto prossimamente « nodo » per lo scostamento di F e perciò « ventre » per la detta deviazione angolare; e si è ivi trovato: $\operatorname{tang} \vartheta = 0{,}00583 \sim$.

Questi valori, davvero assai esigui, confermano ancora come ottima l'approssimazione raggiunta pur con soli due parametri.

Con gli esempî che precedono riteniamo di avere a sufficienza illustrato il modo di risolvere numericamente con buona approssimazione il problema di Dirichlet, quale si presenta per lo studio della torsione.

Dobbiamo ora passare a fare analogo studio per il caso della sollecitazione a sforzo di taglio, fornendo in pari tempo alcune nozioni complementari.

II. Flessione composta pura *(flessione e taglio senza torsione)*.

Ci riferiamo qui a ciò che si disse alle pag.e 332 a proposito della div τ_z e della rot $\bar{\tau}_z$.

Sappiamo anche, com'è stato illustrato a pag. 331 in virtù della (319), che il caso di *flessione composta pura (flessione e taglio senza torsione)* è caratterizzato dall'essere nulla la costante C che compare nella (322) (con l'origine degli assi, ben inteso, coincidente col baricentro della sezione).

Per semplicità di notazione porremo:

$$\bar{\tau}_z = \frac{T_y}{I_x}\,\bar{\zeta}$$

e chiameremo ξ e η le componenti del vettore ζ.

Con ciò, conforme alle (320) e (322), per (il caso di torsione nulla, $C = 0$), avremo:

$$\operatorname{div} \zeta = -y \qquad (320 \text{ bis})$$

$$\operatorname{rot} \zeta = \frac{x}{2(m+1)} \qquad (322 \text{ bis})$$

Vogliamo rilevare qui un'altra ragione che c'induce a riguardare queste caso come quello della *flessione composta pura* (senza *torsione*). Infatti, limitandoci per ora ad una sezione semplicemente connessa (con un solo contorno chiuso, senza cavità interne), se applichiamo il teorema di Stokes a calcolare la circuitazione del vettore ζ lungo il contorno, abbiamo che tale circuitazione è data da:

$$\frac{1}{m+1}\int_A x\,dA$$

ed essendo, per l'ipotesi fatta, l'asse y baricentrico, l'integrale ora scritto è zero, e perciò pure nulla è la circuitazione.

Questa proprietà vige ancora nel caso di una sezione a connessione multipla, con una o più cavità interne: in tal caso, com'è facile verificare, risulta nulla la somma delle circuitazioni lungo tutti i contorni, prese positive percorrendo ciascun contorno in modo da

Dalla (320 bis) si ricava, in base alle ξ ed η ora scritte:

$$\operatorname{div} \zeta = \frac{\partial f}{\partial y} = -y$$

da cui:

$$f = -\frac{y^2}{2} + g_{(x)}$$

ove $g_{(x)}$ è una funzione della sola x, da determinarsi in base alla (322 bis), dalla quale, (ricordando che $\Delta_2\Phi = 0$), si deduce:

$$2 \operatorname{rot} \zeta = \frac{dg}{dx} = \frac{x}{m+1},$$

da cui, integrando:

$$g = \frac{x^2}{2(m+1)},$$

ove per semplicità si pone uguale a zero la costante arbitraria di integrazione.

Con ciò le ξ ed η assumono le espressioni definitive:

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \eta &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2(m+1)} \end{aligned}}\right\} \qquad (459)$$

Resta da esprimere la condizione a cui la funzione Φ deve soddisfare sul contorno.

Poichè notoriamente in ogni punto del contorno il vettore ζ deve essere tangente al contorno stesso, si deve avere:

$$\xi \frac{dx}{dn} + \eta \frac{dy}{dn} = 0$$

ove $\frac{dx}{dn}$ e $\frac{dy}{dn}$ sono i coseni direttori della normale al contorno nel punto generico.

Conviene introdurre i coseni direttori della tangente, che sono:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn}.$$

Con ciò si ha:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y^2}{2} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{x^2}{2(m+1)} \frac{dx}{ds}.$$

Sopprimendo il denominatore comune ds, il primo membro è l'incremento $d\Phi$ assunto dalla Φ per uno spostamento infinitesimo lungo il contorno, e si ha:

$$d\Phi = \frac{y^2}{2} dx - \frac{x^2}{2(m+1)} dx.$$

Da ciò, integrando lungo un arco generico del contorno, si ottiene:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} y^2 dx - \frac{x^3 - x_0^3}{6(m+1)} \qquad (460)$$

essendo Φ_0 il valore (arbitrario) assunto da Φ in un punto del contorno, di ascissa x_0, preso come punto di partenza per eseguire l'integrazione.

L'integrale che compare al secondo membro è notoriamente il momento statico, rispetto all'asse neutro x, dell'area compresa tra lo stesso asse, l'arco (del contorno) a cui è estesa l'integrazione, e le due ordinate estreme dello stesso arco.

La (460) ci fornisce i valori che la funzione Φ deve assumere sul contorno. Siamo così, anche in questo caso, ricondotti al *problema di* Dirichlet.

Per una sezione semplicemente connessa, essendo l'asse x baricentrico, estendendo a tutto il contorno l'integrazione secondo la (460), essendo nullo il momento statico di tutta l'area rispetto all'asse neutro x, la funzione Φ riprende il valore iniziale Φ_0, e perciò la funzione Φ deve essere *ad un solo valore* o *monodroma*. Lo stesso accade per sezione a connessione multipla o con cavità interne, se i baricentri delle aree racchiuse nei varî contorni si trovano tutti sull'asse x: se invece quest'ultima condizione non è soddisfatta, la funzione Φ dovrà essere *a più valori* o *polidroma*.

Le componenti ξ ed η del vettore ζ si possono pure esprimere mediante la funzione Ψ *coniugata* della Φ: con ciò le (459) divengono

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \eta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2(m+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (459 \text{ bis})$$

Da opportuno confronto con le (316), ed anche da ciò che diremo nel paragrafo III successivo, risulta che la Ψ qui ora introdotta deve comparire nell'espressione della componente w di spostamento secondo l'asse z (cioè dell'ingobbimento della sezione): perciò per ragioni di continuità dello spostamento (congruenza) la funzione Ψ deve sempre essere *ad un solo valore* o *monodroma*.

Ne consegue che per una linea chiusa s generica dovrà sempre essere:

$$\int_s \frac{d\Psi}{ds}\, ds = \int_s \frac{d\Phi}{dn}\, ds = 0 \, .$$

Inoltre, se per la stessa linea s si calcola la circuitazione del vettore ζ, si ha:

$$\int_s (\xi dx + \eta dy) = \left(\int_s \frac{d\Psi}{ds}\, ds = \int_s \frac{d\Phi}{dn}\, ds = 0\right) + \frac{1}{2(m+1)} \int_s x^2 dy =$$

$$= \frac{1}{m+1} \int_A x dA$$

esteso l'ultimo $\int$ all'area A racchiusa nella detta linea s.

Ciò chiarisce e conferma quanto s'è detto a pag.e 494 e 495 a proposito della circuitazione lungo i contorni, nei casi delle sezioni cave (od a connessione multipla).

Esprimendo per la funzione Ψ la condizione al contorno, abbiamo:

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{m+1} - y^2\right)\frac{dy}{dn} \qquad (460 \text{ bis})$$

La determinazione della Ψ è dunque ricondotta al *problema di* NEUMANN. p. 263

Analogia di GRIFFITH *e* TAYLOR. — Anche per la funzione Φ qui definita si può realizzare sperimentalmente il diagramma mediante la superficie di equilibrio di una laminetta (o membrana) flessibile e retrattile (bolla di sapone o simile), senza differenza di pressione sulle due faccie, in modo analogo a quello minutamente descritto a proposito della torsione.

L'unica differenza sostanziale consiste nei diversi valori che la funzione Φ deve assumere al contorno [valori che sono espressi dalla (460)].

La realizzazione concreta del detto diagramma è relativamente agevole nel caso in cui Φ sia *monodroma*, cioè per sezione semplicemente connessa, ed anche in caso di connessione multipla (cavità interne), solo però quando sia soddisfatta la particolare condizione già specificata sopra: e cioè quando tutte le aree racchiuse nei varî contorni abbiano i baricentri tutti situati sull'asse neutro x.

Per Φ *polidroma*, la realizzazione sperimentale del relativo diagramma presenta varie difficoltà operative, che non crediamo opportuno esaminare qui, in quanto riteniamo che il loro studio esorbiti dai limiti e dagli scopi tecnici di questo libro.

Cenni sulla determinazione approssimata delle funzioni Φ *e* Ψ.

Le funzioni Φ e Ψ anche in questo caso si possono realizzare con procedimenti analitici di approssimazione, analoghi a quelli esposti per il caso della torsione.

La funzione da determinarsi verrà anche qui espressa come combinazione lineare di varie funzioni armoniche note, convenientemente scelte, con opportune proprietà di parità e di periodicità suggerite od imposte dalle modalità di forma ed eventualmente di simmetria dei contorni.

Osservazioni sulle funzioni polidrome che si presentano per sezioni a connessione multipla.

Poichè abbiamo constatato che per una sezione con cavità interne, salvo quando sia soddisfatta una particolarissima condizione, la funzione Φ deve essere *polidroma*, mentre la funzione Ψ, coniugata di Φ, deve essere monodroma, (per la continuità dello spostamento ossia per la *congruenza*), occorre ora vedere quali funzioni armoniche elementari sia necessario ed opportuno introdurre nella sopra descritta combinazione lineare, per ottenere il risultato ora specificato.

A tal fine consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$\log z = \log (re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi.$$

Constatiamo così che le due funzioni $\log r$ e φ sono armoniche coniugate. Inoltre, mentre la prima, $\log r$, è evidentemente monodroma, la seconda, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \arccos \dfrac{x}{r} = \operatorname{arcsen} \dfrac{y}{r}$ è *polidroma*, con *incremento periodico* (o *residuo*) uguale a 2π: infatti se immaginiamo che il punto P generico, nel quale calcoliamo la stessa funzione φ, parta da una posizione P_0 (ove $\varphi = \varphi_0$) e compia un circuito chiuso, il quale racchiuda nel suo interno il polo-origine O delle funzioni qui considerate $\bar{z}$, r, φ, ritornato P nel punto di partenza P_0, la funzione φ assume il valore $\varphi_0 + 2\pi$; quindi, dopo percorso il descritto circuito chiuso, essa subisce un *incremento periodico* 2π, (il quale nell'analisi si dice anche « *residuo* »).

Ciò posto, è chiaro che per una sezione con cavità interne, tra le funzioni armoniche elementari, che con la loro opportuna combinazione lineare debbono costituire la funzione Φ, occorre e basta per il contorno interno i^{esimo}, con *polo* in un punto *interno* a questo contorno, (a sensibile distanza dal contorno stesso), introdurre la funzione $\dfrac{\mathfrak{M}_{xi}}{2\pi}\,\varphi$ ove $\mathfrak{M}_{xi}$ è il momento statico dell'area racchiusa nel detto contorno i^{esimo} rispetto all'asse neutro x. Con ciò l'*incremento periodico* che viene così a competere al contorno esterno sarà, come deve essere, la somma dei momenti statici rispetto ad x, delle aree racchiuse in tutti i contorni interni, pari al momento statico $\mathfrak{M}_{xe}$, pure rispetto ad x, dell'area totale (o « *lorda* ») racchiusa nello stesso contorno esterno. Le funzioni coniugate di quelle qui introdotte, che sono del tipo $\dfrac{\mathfrak{M}_{xi}}{2\pi} \log r$, sono invece tutte *monodrome*.

E' superfluo precisare che tutte le altre funzioni armoniche elementari da introdurre a costituire la Φ, dovranno, insieme con tutte le loro coniugate, essere monodrome.

A titolo di confronto analogico, ricordiamo che le funzioni $\log r$ e φ si incontrano pure nella *fluidodinamica piana*, nello studio di moti permanenti piani di un fluido di densità costante, in quanto esse sono rispettivamente *funzione potenziale* e *funzione di flusso* per una *sorgente* (con centro nel polo-origine), od anche (inversamente) *funzione di flusso* e *funzione potenziale* di un *vortice elementare* (concentrato nel polo origine). — Ed anzi questo punto di vista ci permette di giustificare in altro modo significativo ed istruttivo l'introduzione di dette funzioni nel problema che qui ci interessa.

Infatti per il vettore ζ definito dalle (459), se la Φ è monodroma, dal noto teorema della divergenza o del flusso si deduce che attraverso ad un circuito chiuso, comprendente nell'interno un'area avente rispetto all'asse neutro x un momento statico $\mathfrak{M}_x$, si deve avere un flusso di ζ *entrante*, pari appunto ad $\mathfrak{M}_x$. Ma se il circuito chiuso che si considera è il contorno (interno od esterno) i^{esimo}, il flusso totale di ζ deve essere zero (essendo il contorno una traiettoria di ζ), e perciò il contorno considerato deve racchiudere o contornare una « sorgente » (se interno) o più « sorgenti » (se esterno) di flusso *uscente* pari appunto a $\mathfrak{M}_{xi}$; e ciò precisamente spiega e giustifica l'introduzione sopradescritta delle funzioni del tipo $\frac{\mathfrak{M}_{xi}}{2\pi}\varphi$ per formare la Φ, e conseguentemente delle loro coniugate (del tipo $\frac{\mathfrak{M}_{xi}}{2\pi}\log r$) per formare la Ψ.

Questi concetti verranno illustrati in un esempio concreto, che verrà esposto più innanzi.

Determinazione dei coefficienti o parametri incogniti della combinazione lineare.

Questa determinazione si dovrà fare ricavando dalla condizione al contorno, (che la funzione cercata dovrà soddisfare con la migliore possibile approssimazione), tante equazioni lineari quanti sono i detti coefficienti incogniti.

Ciò si può realizzare in varî modi: uno di questi consiste nell'applicazione del noto *metodo dei minimi quadrati*, in guisa del tutto analoga a quella già vista per la torsione. Limitiamoci a titolo d'esempio alla determinazione della funzione Φ col *problema di* DIRICHLET. Si dovrà rendere minima la quantità:

$$I = \int_{s_i} (\Phi - \Phi_{ci})^2 \, ds_i$$

esteso l'integrale a tutti gli $m+1$ contorni ed ove Φ_{ci} è il valore esatto della Φ in un punto generico di un contorno qualsiasi, valore noto secondo la (460). La Φ si esprimerà come combinazione lineare di n funzioni elementari Φ'_k, secondo n parametri λ_k, più le m funzioni polidrome relative ai contorni interni.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi'_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{M}_{xj} \varphi_j$$

e quindi si avrà:

$$\Phi_{ci} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi'_{kio} + \Phi_{1ci} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{M}_{xj} \varphi_{oi}$$

ove le sommatorie rappresentano il termine Φ_0 della (460) applicata al contorno i^{esimo}, e la Φ_{1ci} sintetizza gli altri due termini della stessa espressione (460), i quali sono noti ed indipendenti dai parametri λ_k.

Ciò posto, le equazioni determinatrici sono della forma:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\,I = \int_s (\Phi - \Phi_{ci})\,(\Phi'_j - \Phi'_{j0})\,ds = 0$$

esteso l'integrale a tutti i contorni, notando che Φ_{j0}' è il valore di Φ'_j nel punto in cui si calcola Φ_0 su un contorno generico.

In modo analogo, che non esponiamo, per brevità, si può procedere quando si voglia impostare la questione sul *problema di* NEUMANN.

Più semplicemente le equazioni determinatrici potranno essere stabilite, in modi perfettamente analoghi a quelli esposti per il caso della torsione, alle pag.ne 479 e 480, a cui rimandiamo, richiamando particolarmente il criterio esposto alle pag.ne 484 e 485 in occasione di un esempio particolare, ma già riconosciuto valido ed utile in generale, — criterio basato sui noti concetti dell'analisi armonica di una funzione periodica, in relazione con il suo *sviluppo in serie di* FOURIER. — La funzione che in questo caso va considerata è lo scostamento del valore della Φ approssimata in un punto di un contorno, rispetto al valore esatto di Φ_{ci} nello stesso punto, valore noto secondo la (460). Il procedimento verrà ulteriormente dilucidato ed illustrato in alcuni esempî particolari che saranno esposti più innanzi.

Verifica dell'approssimazione raggiunta.

Sarà poi conveniente studiare — anche mediante diagrammi, — la variazione di Φ e di Φ_{ci} sul contorno i^{esimo} considerato: il grado di approssimazione raggiunto si potrà ottenere facendo il rapporto tra il massimo dello scostamento $\Phi - \Phi_{ci}$ e la differenza tra i valori massimo e minimo assunti dalla Φ_{ci} sul contorno considerato: detto grado sarà dunque:

$$\frac{[\Phi - \Phi_{ci}]_{max}}{\Phi_{ci\,max} - \Phi_{ci\,min}}$$

rapporto che è tanto più piccolo quanto più grande è l'approssimazione raggiunta.

Più aderente alla natura fisica e meccanica del problema è la verifica della deviazione della $\overline{\zeta}$, ricavabile dalle (459), con la Φ approssimata, rispetto alla tangente al contorno, la quale verifica si dovrà fare nei « nodi » di scostamento $(\Phi - \Phi_{ci})$, i quali molto prossimamente devono essere « ventri » per la detta deviazione.

Se $f =$ cost. è l'equazione del contorno i coseni direttori della tangente ad esso sono proporzionali a $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $-\frac{\partial f}{\partial x}$; pertanto l'angolo ϑ compreso tra questa tangente ed il vettore $\overline{\zeta}$, di componenti ξ ed η è espresso da:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}}{\xi \frac{\partial f}{\partial y} - \eta \frac{\partial f}{\partial x}}$$

e questa tang ϑ ci dà, come già visto nel caso della torsione, la misura dell'errore relativo, dal punto di vista meccanico.

Risultante e momento risultante delle forze tangenziali.

Poichè la ricerca della $\overline{\zeta}$, (o delle sue componenti), è stata fatta soddisfacendo alle condizioni di equilibrio, deve essere identicamente:

$$\frac{T_y}{I_x} \int \overline{\zeta}\, dA = \overline{T}$$

e prendendo le componenti secondo i due assi, si deve avere:

$$\int_A \xi\, dA = \frac{T_x}{T_y} I_x = I_{xy} \qquad \text{[cfr. (336) a pag. 254]}$$

$$\int_A \eta\, dA = I_x$$

Si hanno così delle significative identità, che possono essere utili per la verifica dell'esattezza dei calcoli nei casi particolari concreti.

L'intensità e la direzione del taglio risultante sono dunque note *a priori*; resta da determinarne la retta d'azione, o — ciò che fa lo stesso — il momento M_z intorno all'asse z. Per semplicità calcoleremo $\mathfrak{M}_z = \frac{M_z}{T_y} I_x$.

Tale momento si potrà calcolare in duplice forma, esprimendo le ξ ed η secondo le (459) o le (459 bis).