

APPENDICE

COMPLEMENTI SULLA FLESSIONE COMPOSTA COMPLETA (FLESSIONE, TAGLIO E TORSIONE) E SUI CASI PARTICOLARI SEMPLICI.

Conforme a quanto è stato preannunziato precedentemente in più punti, (v. pag. 319, 322, 333, 346, 405), debbo ora qui esporre alcuni argomenti complementari sulla trattazione rigorosa del caso generale della *flessione composta completa* (flessione, taglio e torsione simultanei), studiando pure dapprima separatamente i due casi particolari di *torsione semplice* e di *flessione composta pura* (flessione e taglio senza torsione); si esporranno alcune istruttive ed utili analogie e si faranno esempi con applicazioni ad alcune speciali forme della sezione trasversale del prisma considerato.

X I. — TORSIONE PURA, (o semplice). — *Ulteriori espressioni delle tensioni tangenziali.* — *Equazioni delle traiettorie.* — *Analogia di Prandtl, o della lamina flessibile.*

Il problema della distribuzione delle τ_z per la torsione semplice si può impostare e risolvere in una forma anche più semplice di quella esposta al N. 53, pag. 261 e seguenti.

A tal uopo richiamiamo la (254 ter) pag. 269, ricavata dalla 3.^a delle equazioni indefinite dell'equilibrio, per $\sigma_z = 0$:

$$\operatorname{div} \tau_z = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (254 \text{ ter})$$

Inoltre ricordiamo la (322), pag. 332, ricavata dalle condizioni di congruenza: essa per $T_y = 0$ ci dà, per la torsione pura: $\tau_z = C$ (254)

$$\operatorname{rot} \tau_z = C = \text{costante.} \quad (322 \text{ bis})$$

Dalla (254 ter), per il noto teorema della divergenza, o del flusso (v. pag. 38) risulta che il flusso di τ_z attraverso un arco di linea di estremi A e B , dipende solo dalle posizioni di questi estremi e non dalla forma dell'arco stesso.

però, in ogni caso, il flusso di τ_z è costante e dipende solo dalle posizioni di A e B .

Ciò dimostra che per la τ_z dovuta alla torsione semplice esiste quella che nel calcolo vettoriale si chiama la *funzione di flusso*: cioè una funzione ad un sol valore (monodroma) tale che il suo incremento dal punto A al punto B rappresenta il flusso di τ_z attraverso un arco di linea aventi gli estremi in A e B .

Esiste dunque una funzione di F , tale che si possa scrivere:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= -C \frac{\partial F}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= C \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (431)$$

È infatti ovvio verificare che queste espressioni soddisfano alla (254 ter).

Per la (332 bis) si trova poi che deve essere:

$$\Delta_z F = 2 \quad (432)$$

Poichè CF è la funzione di flusso della τ_z , ne consegue che lungo una traiettoria delle τ_z (linea di flusso) deve essere: $dF = 0$, e perciò le dette traiettorie sono individuate dalle equazioni:

$$F = \text{costante.}$$

Il contorno della sezione notoriamente è una di tali traiettorie: d'altra parte la F evidentemente è determinata a meno di una costante additiva arbitraria; perciò la stessa F si può individuare in modo che sul contorno essa assuma un valore F_c arbitrariamente assegnato.

È utile osservare che secondo le (431) il vettore τ_z si può ottenere rotando nel verso circolatorio positivo da $+x$ a $+y$ il vettore $C \text{ grad } F$; cioè con le notazioni del calcolo vettoriale, indicando con i l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, le (431) si possono sintetizzare nella relazione:

$$\tau_z = i C \text{ grad } F \quad (431 \text{ bis})$$

Si noti poi che se la costante $C = \text{rot } \tau_z$ [v. (322 bis)] è positiva, la circuitazione lungo ciascuna delle traiettorie (chiuse) di τ_z , in armonia con il teorema di Stokes, deve essere positiva; cioè percorsa nel senso circolatorio da $+x$ a $+y$ testè considerato. Ne consegue che in un punto generico P il vettore F deve essere diretto

verso l'esterno della traiettoria (chiusa) passante per P ; cioè in altri termini la funzione F deve risultare crescente quando si proceda normalmente alle predette traiettorie, dall'interno della sezione verso il contorno.

La più semplice forma di una funzione, il cui Δ_2 sia uguale a 2 è: $\frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$; quindi la F si può esprimere con

$$F = \Phi + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \tag{433}$$

ove la Φ deve essere armonica: $\Delta_2 \Phi = 0$; inoltre sul contorno, dovendo essere $F = F_c$, la Φ deve assumere i valori:

$$\Phi_c = F_c - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \tag{434}$$

i quali valori, a meno della costante arbitraria F_c , sono perfettamente noti, in quanto è assegnato il contorno.

La determinazione della Φ è quindi ricondotta ad un noto problema di analisi: *trovare una funzione armonica, finita, continua, monodroma, definita in una data area piana, ed assumente sul contorno dell'area stessa valori assegnati* (Problema di Dirichlet).

È facile verificare che la Φ qui definita è la funzione coniugata della Ψ definita alle pag. 262 e 263; si hanno cioè le relazioni:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} . \tag{435}$$

È noto dall'analisi che due funzioni armoniche, legate da relazioni del tipo di queste (435) si possono ottenere rispettivamente come parte reale e come coefficiente dell'immaginario di una stessa funzione della variabile complessa $\bar{z} = x + iy$, (ove i è l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$).

Dal confronto delle (431) con le (254), come pure confrontando la (322 bis) risulta subito che:

$$C = q \frac{M_z}{I_p} \tag{436}$$

E' tuttavia opportuno ricavare direttamente dalle (431) l'espres-

sione di C in funzione di M_z ; così otterremo un'altra espressione del fattore di torsione q .

Tale calcolo ovviamente si fa esprimendo che il momento torcente M_z deve essere uguale al momento rispetto all'origine O delle forze elementari $\tau_z dA$.

Si ha dunque:

$$M_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) dA$$

e sostituendo i valori (431), abbiamo:

$$M_z = C \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y \right) dA \quad (437)$$

Per le note identità:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x = \frac{\partial}{\partial x} (xF) - F \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} y = \frac{\partial}{\partial y} (yF) - F,$$

si ha:

$$\int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y \right) dA = -2 \int_A F dA + \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (xF) + \frac{\partial}{\partial y} (yF) \right] dA$$

L'ultimo integrale si può trasformare applicando la formula di Gauss generalizzata, ovvero direttamente con integrazioni separate e successive rispetto ad x ed y : poi, tenendo conto che sul contorno la F assume il valore costante F_c , si trova ovviamente per detto integrale il valore $2 F_c A$. Sostituendo poi nelle espressioni precedenti si ottiene:

$$M_z = 2C \left(F_c A - \int_A F dA \right) = 2C \int_A (F_c - F) dA \quad (438)$$

Possiamo porre:

$$V = \int_A (F_c - F) dA \quad (439)$$

e questa quantità si può interpretare come il volume del diagramma

spaziale della $\zeta = F_c - F$ (ottenuto portando l'ordinata ζ a partire da ogni punto generico della sezione, normalmente al piano di questa).

Ciò posto si può ricavare la costante (finora indeterminata) C , in funzione di M_z :

$$C = \frac{M_z}{2V} \tag{440}$$

Sostituendo nelle (431) e (431 bis) si hanno le espressioni definitive:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{M_z}{2V} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= \frac{M_z}{2V} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \tau_z &= \frac{M_z}{2V} i \text{ grad } F \end{aligned} \right\} \tag{431 ter}$$

tenendo presenti le (432), (433) e (434).

Dal confronto della (440) con la (436) si trova una nuova espressione del *fattore di torsione* q :

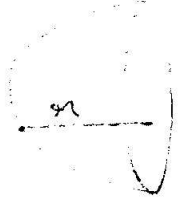
$$q = \frac{I_p}{2V} \tag{441}$$

Questa espressione deve essere sostanzialmente identica a quella esposta al N.º 53 con la (252), a pag. 267; devono dunque essere identicamente eguali i denominatori dei secondi membri delle due espressioni (252) e (441).

Tale identità si può verificare trasformando l'integrale che compare nella (252) mediante le sostituzioni (435), poi applicando il procedimento usato per trasformare il secondo membro della (437), ed infine tenendo conto dell'espressione di I_p come integrale di linea esteso al contorno:

$$I_p = -\frac{1}{4} \int_s (x^2 + y^2) [x \cos(ny) + y \cos(nx)] ds,$$

la quale si può ottenere con applicazione della formola di Gauss all'usata espressione di I_p , come integrale di area; si deve tener presente che la seconda parentesi [...] sotto integrale è negativa per n



Handwritten notes:
 C = M_z / (2V)
 Div. F_c = F + C
 Div. F = F_c - C

diretta verso l'interno, (in quanto in tal caso è ottuso l'angolo compreso tra la direzione di n quella del raggio vettore r).

E' ora opportuno fare qualche considerazione sulle dimensioni fisiche delle grandezze qui considerate.

La $C = \text{rot } \bar{\tau}_z$ deve necessariamente avere le dimensioni: *forza divisa per tre lunghezze*: e ciò è confermato dalla (436) (ove q è numero astratto). Dalla (432) e (433) risulta che la F , e quindi le Φ e Ψ , sono *termini geometrici di secondo ordine* (omogenei con il quadrato di una lunghezza); perciò la V definita dalla (439) è *termine del quarto ordine (prodotto di quattro lunghezze)*, e quindi omogenea con un momento d'inerzia di area, conforme anche alla (441).

Riesce facile dimostrare direttamente che è nulla la risultante di traslazione delle forze elementari tangenziali distribuite secondo le (431).

Infatti di tale risultante la proiezione sull'asse x è:

$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA = -C \int_A \frac{\partial F}{\partial y} dA ;$$

ed integrando rispetto ad y si trova:

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial y} dA = \int_{x_1}^{x_2} (F_c - F_c) dx = 0$$

(poichè sul contorno la F assume il valore costante F_c). In modo del tutto analogo si dimostra che anche:

$$T_y = \int_A \tau_{yz} dA = C \int_A \frac{\partial F}{\partial x} dA = 0$$

Più sinteticamente, in base alla (431 bis), applicando a tutta la sezione il *teorema del gradiente* [29 b)] (v. pag. 40) interpretato a due dimensioni, e tenendo presente che sul contorno la F assume il valore costante F_c si ottiene:

$$\bar{T} = iC \int_A \text{grad } F \cdot dA = -iCF_c \int_s \bar{n} ds$$

Ma il vettore $\int_s \bar{n} ds$ è nullo, in quanto il *poligono di composi-*

zione dei vettori elementari nds è la stessa linea di contorno, rotata nel suo piano di un angolo retto nel senso positivo: e poichè la linea è chiusa, la risultante è nulla: ciò d'altra parte si riconosce intuitivamente in quanto dall'ultima espressione si scorge che la forza considerata è la risultante di azioni elementari dovute ad una pressione normale uniforme (di valore costante F_c), esercitata sul contorno (chiuso); risultante che è notoriamente nulla: quindi si ritrova: $T = 0$. Ciò d'altra parte era stato già riconosciuto a pag. 312, constatando che le forze elementari tangenziali esercitate su una qualunque striscia di flusso si riducono ad una coppia. Ed ancora più intuitivamente l'annullarsi di T risulta dall'essere in questo caso ovunque $\sigma_z = 0$, dovendo perciò essere per ogni sezione nullo il momento flettente e quindi, per le notissime relazioni, pure nullo ovunque lo sforzo di taglio.

Le varie dimostrazioni qui esposte per questo fatto sono tutte notevolmente più semplici ed intuitive di quella riportata a pag. 265, 266 e 267 al N.º 53, (in base ad applicazione del *lemma* di GREEN), la quale è la sola che si trovi esposta nei trattati classici.

L'esposizione comparativa qui fatta delle suddette dimostrazioni più semplici, deve ritenersi utile ai fini didattici e per uno scopo di maggiore chiarimento espositivo.

Le relazioni (440) e (441), [tenuta presente la (439)] si possono anche per altra via ricavare con ragionamento analogo a quello già fatto per simile scopo a pag. 313.

Invero il momento rispetto ad O dell'azione elementare su un'area infinitesima di 2.º ordine è:

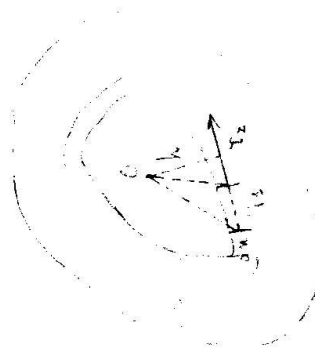
$$\tau_z \, dn \cdot ds \cdot h$$

ove dn è lo spessore di una striscia di flusso, ds l'archetto elementare della traiettorie media della stessa striscia ed h la distanza normale di O dalla tangente a questa traiettoria in corrispondenza del detto arco elementare ds .

Sommando tutti gli analoghi momenti elementari di 2.º ordine per tutta la striscia di flusso considerata, si ha il contributo elementare di primo ordine che la detta striscia reca al momento torcente, e quindi, essendo $\tau_z \, dn$ costante lungo la striscia, si ottiene:

$$dM_z = \tau_z \, dn \cdot \int_s h \, ds$$

esteso l'integrale a tutta la lunghezza della striscia.



Orbene, questo integrale è evidentemente $2 A'$ essendo A' l'area racchiusa entro la traiettoria media della detta striscia; d'altra parte, per la proprietà fondamentale della funzione F , si ha per il *flusso elementare* $\tau_z dn$ l'espressione:

$$\tau_z dn = C dF$$

perciò, sostituendo:

$$dM_z = 2 C A' dF$$

e quindi integrando ad esaurimento dell'area A , si trova:

$$M_z = 2 C \int_{F^{min}}^{F^c} A' dF = 2 CV$$

L'integrale, esteso da F^{min} minimo valore di F , al valore F^c che F assume sul contorno, è evidentemente il volume V definito dalla (439), compreso tra la superficie diagramma spaziale della F , ed il piano di livello corrispondente al valore $F = F^c$. Risultano così confermate per altra via le (438), (440) e (441).

Passiamo ora ad esporre una semplice ed intuitiva dimostrazione dell'espressione del *lavoro di deformazione*, ricavato come lavoro delle forze interne.

Il lavoro interno di deformazione per un prisma elementare di secondo ordine, con asse parallelo a z , di lunghezza l e di sezione $dn \cdot ds$ (come poco sopra), si può notoriamente esprimere come segue:

$$\frac{l}{2G} \tau_z^2 dn \cdot ds$$

Poichè il flusso elementare $\tau_z dn = C dF$ si mantiene costante lungo la già descritta *striscia di flusso*, il contributo che la stessa striscia, per tutta la lunghezza l del prisma elastico, reca al cercato lavoro di deformazione, si può esprimere:

$$dL = \frac{l}{2G} C dF \int_s \tau_z ds$$

intendendo l'integrale esteso a tutta la traiettoria (chiusa) media

della detta striscia: esso integrale evidentemente è la *circuitazione* del vettore τ_z lungo la detta traiettoria media: quindi per il noto teorema di STOKES e per la (322 bis), pag. 453, si ha:

$$\int_s \tau_z ds = 2 C A'$$

e sostituendo:

$$dL = \frac{l}{G} C^2 A' dF,$$

da cui si ricava subito:

$$L = \frac{l}{G} C^2 \int_{F_{min}}^{F_c} A' dF = \frac{l}{G} C^2 V;$$

ed applicando ora la (440), si ottiene infine:

$$L = \frac{M_z^2 l}{4 G V} \quad (442)$$

Questa espressione fornisce un'altra significativa applicazione del volume V sopra definito.

La (442), attraverso la (441), si accorda — come dev'essere — con la (262) pag. 273.

La dimostrazione sintetica qui datane è notevolmente più semplice ed intuitiva di quella esposta alle pag. 271, 272 e 273, la sola riportata nei trattati classici e basata su laboriosa applicazione del *lemma* di GREEN.

Notevole proprietà presentano i punti della sezione, nei quali la funzione F si trova in condizioni di minimo: in essi, conforme alle (431) e (431 bis), è nulla la tensione tangenziale τ_z e quindi è pure nullo lo scorrimento γ_z . Sarebbe facile dimostrare che se il contorno della sezione è semplicemente connesso ed ovunque convesso verso l'esterno, esiste uno ed uno solo di tali punti; mentre invece se il contorno è in alcuni tratti concavo verso l'esterno possono esistere anche due o più di tali punti; mentre infine per sezioni a connessione multipla (sezioni con una o più cavità interne) può anche non esistere nell'interno della sezione alcuno di tali punti.

Per ulteriori chiarimenti in proposito (che qui omettiamo, perchè di interesse puramente culturale e non applicativo), si può vedere

ciò ch'è esposto nel paragrafo *A* del mio lavoro « *Contributo ecc...* », terzo di quelli citati più innanzi.

Quanto precede vale per sezioni semplicemente connesse, cioè con un solo contorno esterno.

Occorrono alcune avvertenze per le sezioni a connessione multipla, cioè aventi nell'interno una o più cavità, ciascuna limitata da un contorno interno alla sezione. In tal caso torna opportuno ricordare quanto è stato verificato a pag. 309, e cioè che per ogni contorno, anche interno, la circuitazione di τ_z è la stessa che se anche nella cavità fosse definita $= C = q \frac{M_z}{I_y}$ la rot τ_z . — Da ciò si deduce facilmente che il flusso del vettore grad Φ attraverso ciascuno dei contorni (come attraverso a qualunque circuito chiuso) deve sempre essere nullo. Si tenga presente che, — com'è ben noto, — tale flusso si può esprimere con

$$\int_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0$$

esteso l'integrale al contorno considerato ed essendo n la normale allo stesso contorno. Ciò risulta pure più direttamente dal fatto che detto integrale è anche esprimibile con

$$\int_s \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds,$$

e questo deve essere nullo per qualsiasi contorno chiuso, in quanto, per la continuità della deformazione, la Ψ deve essere *funzione ad un sol valore* o *monodroma*.

Pertanto, secondo che si dimostra in analisi, la Φ deve essere definita regolare in *tutta* l'area racchiusa nel contorno esterno (comprese le cavità), senza *punti singolari*. (1) In conseguenza la F vien determinata con le condizioni che sul contorno *i esimo* sia $F = F_{ci}$ costante su ogni contorno, ove però, ben inteso, F_{ci} è diverso da un contorno all'altro; i singoli valori F_{ci} , vengono determinati con la stessa risoluzione del *problema di Dirichlet*, la quale si esegue calcolando la Φ con le condizioni:

$$\Delta_2 \Phi = 0 \text{ nell'area} \quad \text{e} \quad \Phi_{ci} = F_{ci} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

su ciascun contorno, compreso quello esterno.

(1) La natura di queste e di altre singolarità verrà precisata in apposita nota più innanzi.

Qualche esempio semplice che esporremo più innanzi servirà a chiarire le modalità della determinazione di queste costanti F_{ci} , qui ora soltanto accennata.

Con ciò, il flusso di $\bar{\tau}_z$ che passa tra due contorni contigui è C volte la differenza dei due valori F_{ci} relativi ai contorni stessi.

Analoga di Prandtl o della lamina flessibile.

Dobbiamo ora indicare una istruttiva analogia meccanica per il problema della torsione; analogia che, oltre a fornire interessanti chiarimenti sulla distribuzione delle $\bar{\tau}_z$, si presta pure ad utili determinazioni sperimentali su modelli.

Ci occorre richiamare dalla meccanica razionale l'equazione di equilibrio di una lamina sottile e flessibile soggetta ad una pressione normale p , la quale provoca nella lamina stessa delle tensioni interne superficiali, che, riferite all'unità di lunghezza degli elementi lineari, su cui esse si esercitano, indicheremo genericamente con σ .

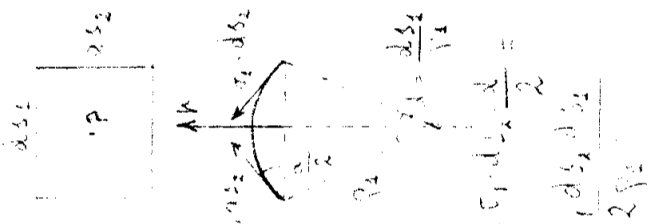
In un punto generico P della superficie di equilibrio consideriamo due elementi ds_1 e ds_2 di sezione piana normale, tra loro ortogonali; siano ρ_1 e ρ_2 rispettivamente i raggi di curvatura in P delle due dette sezioni normali e siano σ_1 e σ_2 le due componenti normali di tensione superficiale agenti nelle due direzioni 1 e 2, ed esercitate rispettivamente sugli elementi ds_2 e ds_1 .

La sopra citata equazione di equilibrio è:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = p$$

(restando inteso che le curvature $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$ sono assunte positive se la rispettiva sezione normale volge la convessità nel verso dell'azione della pressione p , mentre d'altra parte le σ_1 e σ_2 devono essere positive, in quanto la lamina flessibile si deve ritenere adatta a resistere solo a trazione).

L'equazione precedente si può facilmente dimostrare considerando nell'intorno di P l'elemento superficiale rettangolare di lati ds_1 e ds_2 , studiando di esso l'equilibrio alla traslazione nella direzione normale in P alla superficie: i due termini a primo membro sono i contributi che, alla spinta unitaria normale antagonista alla pressione p , recano rispettivamente le due tensioni σ_1 e σ_2 , per effetto delle curvature delle rispettive sezioni normali; (si confronti con quanto notoriamente accade nell'equilibrio di un filo flessibile).



$$ds_1 \cdot \sigma_2 \cdot p = 2 \sigma_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{ds_2}{2} = 2 \sigma_1 \cdot ds_1 \cdot ds_2$$

$$= 2 \sigma_1 \cdot ds_1 \cdot ds_2$$

$$\sigma_1 \cdot ds_2 \cdot p = \frac{\sigma_2^2}{\rho_2}$$

Incidentalmente notiamo che l'equazione precedente trova utili applicazioni nelle costruzioni aeronautiche per il calcolo statico degli involucri degli aerostati (palloni liberi, frenati o dirigibili).

Per il nostro scopo interessa particolarmente il caso in cui $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, cioè la tensione superficiale è costante in tutte le direzioni, (ed anche in tutti i punti della lamina, in quanto la pressione esterna è supposta normale alla superficie di equilibrio).

È noto dalla fisica che queste condizioni si verificano nel caso di sottili veli di liquidi viscosi (bolle di sapone) o nel caso di superficie di separazione tra due fluidi non mescolabili, in cui notoriamente si sviluppa una tensione superficiale uniforme, in quanto, per effetto di capillarità, la superficie è *retrattile* e tende ad assumere la posizione di minima area.

In tal caso l'equazione di equilibrio sopra scritta si trasforma come segue:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{p}{\sigma} = \text{costante} > 0; \quad (443)$$

e questa, secondo la nomenclatura in uso nella geometria differenziale, ci esprime che la considerata superficie di equilibrio è una *superficie a curvatura totale costante positiva*.

Immaginiamo ora che una siffatta laminetta sia trattenuta da un orlo rigido, piano, chiuso, uguale (o simile) al contorno semplicemente connesso della sezione piana del prisma (o cilindro) elastico, che studiamo in quanto è soggetto a torsione. Indichiamo con ζ la distanza di un punto generico P della superficie di equilibrio dal piano dell'orlo-contorno, e supponiamo che ζ sia ovunque piccolissima in confronto delle dimensioni dell'orlo.

Presi nel piano di questo due assi ortogonali x ed y diretti rispettivamente come le due direzioni 1 e 2 prima considerate, e tenendo presente che ζ deve essere positiva nel senso dell'azione della pressione p , si potrà ritenere con ottima approssimazione:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2},$$

di modo che la (443) diviene:

$$\Delta_2 \zeta = \text{costante} < 0$$

mentre sul contorno si ha: $\zeta = 0$.

Confrontando con la (432) si deduce ora subito che la detta superficie di equilibrio, di ordinata generica ζ , è affine al diagramma spaziale della funzione $F_c - F$, ed anzi coincide proprio con esso se si assume la relativa scala in modo che sia $\Delta_2 \zeta = -2$ od anche:

$$\int_A^{\zeta} dA = V.$$

Questa analogia è dovuta al PRANDTL.

Essa si presta a determinazioni sperimentali, che si possono ottenere realizzando la sopra descritta superficie di equilibrio per una bolla di sapone, o per la superficie di separazione tra due liquidi non mescolabili (di densità molto prossimamente uguali, per eliminare perturbatori effetti idrostatici, che potrebbero alterare l'uniformità della pressione p); l'orlo rigido piano, cui la lamina è vincolata, deve riprodurre il contorno della sezione che si vuole studiare. La superficie di equilibrio per un conveniente valore della pressione ci fornisce materializzato il diagramma della $F_c - F$; le sezioni di essa con piani paralleli a quello del contorno (linee di livello) proiettate ortogonalmente sul piano del contorno ci danno le traiettorie delle \bar{x} , $F = \text{costante}$.

La superficie si può rilevare con mezzi di misura meccanici, o — meglio ancora — ottici, p. es. determinando con fenomeni di riflessione la *pendenza* della superficie in vari punti, rispetto al piano del contorno, od anche i luoghi dei punti a pendenza costante per vari valori della pendenza; da questi luoghi, con i metodi della geometria descrittiva, si possono facilmente ricavare le sopra dette linee di livello, e tutti gli altri elementi geometrici del diagramma.

La condotta di questi esperimenti, per varie difficoltà materiali e strumentali, richiede particolari avvedimenti esecutivi, che qui sarebbe superfluo e forse inopportuno precisare.

Soltanto interessa osservare che, per evitare talune difficoltà operative e per rendere più sensibili ed esatte le misure, può essere utile impiegare come lamina flessibile una sottile lamina di gomma, inizialmente piana, la quale ben inteso deve essere fissata all'orlo-contorno dopo una preventiva dilatazione superficiale uniforme, (attuando p. es. due dilatazioni lineari uguali in due direzioni ortogonali, così da ottenere in conseguenza dilatazione lineare e quindi anche tensione ovunque uniformi).

L'uso della lamina di gomma può essere particolarmente utile ed opportuno nel caso di sezioni a connessione multipla (sezioni cave)

ove la presenza dei contorni interni introduce altre notevoli difficoltà operative per l'impiego degli altri tipi di lamine flessibili sopra indicati e descritti.

Qui, come più innanzi per una simile analogia valevole per il caso della flessione composta (flessione e taglio), ci limiteremo ad indicare le modalità concettuali fondamentali meccaniche per la realizzazione del diagramma spaziale della $F_c - F'$ mediante la laminetta flessibile, opportunamente vincolata e sollecitata, ed ometteremo di proposito l'indicazione di tutti gli avvedimenti operativi necessari per la sua realizzazione materiale e sperimentale: per tali avvedimenti, che troppo da vicino riguardano la tecnica specializzata dello sperimentatore (e come tali non possono trovar posto in questo libro di carattere generale ed elementare), rimandiamo ai lavori speciali sull'argomento, i quali verranno citati più innanzi, a proposito dell'altra simile analogia già preannunziata.

Vediamo ora le condizioni meccaniche della laminetta per studiare il caso di sezione cava, con uno o più contorni interni.

La laminetta deve essere tesa a riunire con continuità tutti i contorni: quello esterno deve esser tenuto fisso; di quelli interni ciascuno dev'essere chiuso da un diaframma rigido; inoltre questo si deve intendere guidato e vincolato, in modo che gli sia consentito come movimento libero solo la traslazione normale al piano della sezione; poi ogni diaframma si deve intendere senza peso, o col suo peso proprio equilibrato da opportune trazioni, a mezzo di contropesi, che controbilancino l'eccesso del suo peso rispetto a quello di pari area di laminetta flessibile. In tali condizioni, se la laminetta, con i diaframmi rigidi ad essa solidali, viene sottoposta su una delle faccie ad un eccesso p di pressione rispetto all'altra faccia, essa assume una configurazione di equilibrio che ci dà il diagramma considerato: si noti poi che la differenza di livello assunta da due contorni ci dà, nella dovuta scala, il flusso di $\bar{\tau}_z$ compreso tra i due rispettivi contorni.

Questo è lo schema concettuale del fenomeno meccanico. Il lettore può intuire globalmente le molte e gravi difficoltà operative e strumentali che si oppongono alla effettiva realizzazione sperimentale di questo schema; le quali difficoltà però possono essere superate con opportuni artifici, che verranno accennati più innanzi.

Variente di GRIFFITH e TAYLOR. — I due sperimentatori qui nominati, nei loro lavori citati più innanzi, proposero per questa realizzazione sperimentale, una notevole ed utile variante, consistente nel materializzare mediante una laminetta flessibile, come sopra, il dia-

gramma della funzione Φ riferita alle coordinate x, y del punto generico della sezione.

Poichè la Φ è armonica ($\Delta_2 \Phi = 0$), conforme alla (443) ed alle considerazioni successivamente svolte, risulta che il relativo diagramma si può realizzare con una laminetta flessibile *senza differenza di pressione sulle due facce*, ($p = 0$) (superficie a curvatura totale nulla); sui contorni esterno ed eventuali interni, secondo la (434) la quota ζ del diagramma deve assumere il valore $\zeta_{ci} = F_{ci} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Perciò

l'orlo rigido corrispondente al contorno *i-esimo* deve essere profilato secondo la linea (in generale sghemba o gobba) che si ottiene proiettando parallelamente all'asse ζ il contorno *i-esimo* stesso sul paraboloide

rotondo di equazione $\zeta = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Poi, tenuto fisso l'orlo

corrispondente al contorno esterno, si deve distendere la laminetta retrattile a riunire fra loro tutti gli orli sopra descritti: ciascuno di quegli interni si deve intendere (come già più sopra) senza peso, o controilanciato, ed inoltre guidato senza attrito con solo movimento possibile la traslazione parallela all'asse ζ ; la laminetta deve avere la stessa pressione sulle due faccie: l'orlo interno generico assumerà, a partire dal paraboloide sopra descritto, uno spostamento F_{ci} corrispondentemente alla condizione che per ogni orlo sia nulla la componente secondo ζ delle forze impresse dalla laminetta, dovendo essere per ogni contorno chiuso

$$\int_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0.$$

L'uso della laminetta *senza pressione*, tra altri vantaggi, offre quello di eliminare la dannosa influenza strumentale e sperimentale derivante da eventuali, — non sempre evitabili, nè misurabili, — variazioni della pressione p o della tensione σ , che si presentassero durante il tempo, non brevissimo, necessario al rilevamento geometrico od ottico della configurazione di equilibrio. Questa ci dà dunque il diagramma della funzione armonica Φ ; in conseguenza il diagramma della $F_c - F$ sopra definita, ci è fornito dai segmenti paralleli all'asse ζ , compresi tra la ora definita superficie di equilibrio della laminetta ed il sopra descritto paraboloide rotondo di equazione $\zeta = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

GRIFFITH e TAYLOR, nel primo dei lavori citati più innanzi, (ai quali rimandiamo), dopo descritta minutamente la tecnica operativa per l'esecuzione dei cennati esperimenti, espongono un interessante

metodo per lo studio sperimentale delle sezioni con una o più cavità interne, e per superare tutte le gravi difficoltà materiali, che impediscono di ottenere direttamente con un'unica laminetta il cercato diagramma della Φ . Data l'indole di questo libro, non è opportuno riportare qui dettagliatamente il suddetto metodo. Solo può essere utile accennarne le linee generali. Il metodo stesso è basato sulla realizzazione di n configurazioni di laminette a pressione nulla, se n sono i contorni, compreso quello esterno, con assegnati per ciascuna configurazione, dei valori arbitrari per la *quota* di ciascuno degli *orli* sopra descritti (*quota* contata a partire dal sopra indicato paraboloide rotondo). Le dette *quote* a ciascun *orlo* (sghebo) preventivamente foggiate nella forma a suo luogo sopra descritta, vengono attribuite con appositi movimenti micrometrici dei relativi sostegni. Si ottengono così i diagrammi di n funzioni armoniche Φ_k , per k intero da 1 fino ad n ; rilevato geometricamente ciascun diagramma, si calcola poi per ogni contorno interno *i.esimo* il corrispondente valore I_{ik} dell'integrale sopra ricordato:

$$I_{ik} = \int_{s_i} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} ds_i$$

La funzione Φ risolvente si esprime poi come *combinazione lineare* delle n funzioni Φ_k , mediante n coefficienti o parametri λ_k , ponendo:

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \Phi_k$$

Per ognuno (*i.esimo*) degli n contorni deve essere

$$\int_{s_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds_i = 0 ;$$

ma per ragioni ovvie una di queste n condizioni è conseguenza delle altre; perciò esse condizioni equivalgono a sole $n-1$ indipendenti: perciò degli n parametri λ_k sono determinati solo i rapporti di $n-1$ tra essi, al rimanente; quindi per semplicità conviene ad essi imporre ancora la condizione: $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Questa, unita alle $n-1$ (omogenee):

$$\int_{S_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k I_{ik} = 0$$

estese ad $n-1$ contorni, p. es. a quelli interni, permette di determinare gli n parametri λ_k e perciò resta pure individuata la Φ risolvente, secondo la espressione su indicata; e restano così pure determinate le quote dei vari *orli*, ciascuna come combinazione lineare mediante gli stessi parametri λ_k , dei valori attribuiti arbitrariamente (come sopra indicato) al corrispondente *orlo*, nelle determinazioni sperimentali per le varie Φ_k ; da esse quote si deducono ovviamente i valori F_{ci} della F su ciascun contorno interno *i-esimo*.

Per ulteriori dettagli sperimentali ed operativi su questo metodo, dobbiamo rinviare ai lavori di GRIFFITH e TAYLOR, che verranno citati più innanzi.

Cenni sulla determinazione numerica approssimata delle funzioni Φ e Ψ sopra definite.

Per contorni di forma generica la soluzione dei problemi di DIRICHLET e di NEUMANN per la determinazione delle funzioni armoniche Φ e Ψ deve essere in genere realizzata per approssimazione: ciò si ottiene determinando delle funzioni armoniche nell'area le quali soddisfino con sufficiente approssimazione, — cioè con errori massimi controllati e giudicati ammissibili, — le già descritte condizioni al contorno. Ciò si può ottenere esprimendo la funzione armonica da determinare come combinazione lineare di note funzioni armoniche, regolari, senza punti singolari nell'area della sezione: i coefficienti o parametri a priori incogniti della combinazione lineare possono venir determinati imponendo, a soddisfare le condizioni al contorno, tante relazioni quanti sono i detti parametri incogniti: queste relazioni forniscono così tra le dette incognite altrettante equazioni lineari; il sistema di queste equazioni, risolto, fornisce i valori dei parametri che soddisfano alle suddette condizioni.

È opportuno indicare qui, a titolo d'esempio, alcuni tipi di funzioni armoniche, suscettibili di utili applicazioni per i calcoli sopra indicati.

Un'importante categoria di tali funzioni armoniche è costituita dalle funzioni *armoniche algebriche razionali*, di grado n , per n intero.

Indichiamo con $z = x + iy$ la variabile complessa la quale notoriamente si può esprimere anche sotto forma polare:

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Le funzioni armoniche razionali di grado n sono costituite rispettivamente dalla parte reale e dal coefficiente dell'immaginario della funzione di variabile complessa:

$$z^n = P_n + i Q_n = (x + iy)^n \quad (444)$$

Le espressioni di P_n e Q_n in coordinate cartesiane, per n positivo, si possono facilmente ricavare sviluppando con la notissima formula del binomio la potenza:

$$z^n = (x + iy)^n$$

ed allora P_n e Q_n sono funzioni intere armoniche o polinomi armonici.

Si ha poi notoriamente, per n positivo:

$$z^{-n} = (x + iy)^{-n} = \frac{(x - iy)^n}{(x^2 + y^2)^n},$$

in cui i due termini si possono ancora sviluppare con la formula del binomio, ma le P_n e Q_n sono funzioni fratte.

Più significativa è l'espressione in coordinate polari:

$$z^n = P_n + i Q_n = r^n e^{in\varphi} = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

da cui si ricava ovviamente:

$$P_n = r^n \cos(n\varphi); \quad Q_n = r^n \sin(n\varphi) \quad (445)$$

Dalle note regole di derivazione, tenendo presente che:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \frac{d}{dz},$$

si deduce facilmente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial x} &= n P_{n-1} & ; & & \frac{\partial Q_n}{\partial x} &= n Q_{n-1} \\ \frac{\partial P_n}{\partial y} &= -n Q_{n-1} & ; & & \frac{\partial Q_n}{\partial y} &= n P_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (446)$$

(e ciò conferma — cosa già nota ^{v. 4} — che le P_n e Q_n sono coniugate).

Per le applicazioni è utile tener presenti le proprietà facilmente verificabili, qui appresso enunciate:

P_n ha in x la parità di n ed in y è sempre pari, qualunque sia n .

Q_n ha in x la parità di $n-1$ ed in y è sempre dispari qualunque sia n .

Le P_n e Q_n sono entrambe periodiche in φ con periodo $\frac{2\pi}{n}$.

Per n negativo le dette funzioni diventano infinite nell'origine, cioè per $x=0$. Perciò in tal caso esse sono utilizzabili per il nostro problema solo se l'origine *non* è contenuta nell'area effettiva della sezione del solido elastico studiato: p. es. per le sezioni cave l'origine (o polo) di una P_n o Q_n per n negativo può essere assunta nell'interno di un contorno interno, cioè in una cavità: con ciò si evita che la funzione diventi infinita in punti effettivi della sezione.

Si noti incidentalmente che per n frazionario od irrazionale le P_n e Q_n sono ancora funzioni definite ed armoniche, ma non sono razionali, e sono funzioni *polidrome* e perciò non sono immediatamente applicabili in questi nostri problemi, nei quali, almeno per ora, ci servono soltanto *funzioni monodrome* o *ad un solo valore*.

Altra categoria di funzioni armoniche che trovano impiego nei problemi che qui consideriamo, ci viene fornita in virtù delle seguenti identità, note nell'analisi, e d'altra parte facilmente verifi-

$$\left(\begin{array}{l} \cosh \bar{z} = \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} \\ \sinh \bar{z} = \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2} \\ \cos \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2} \\ \sin \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{z} = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \cosh \bar{z} = \cos hx \cos y + i \sin hx \sin y \\ \sinh \bar{z} = \sin hx \cos y + i \cos hx \sin y \\ \cos \bar{z} = \cos hy \cos x - i \sin hy \sin x \\ \sin \bar{z} = \cos hy \sin x + i \sin hy \cos x \end{array} \right. \quad (447)$$

Queste relazioni evidentemente sussistono ancora se in luogo di z si pone mz , essendo m una costante, e quindi se in luogo di x ed y si pone rispettivamente mx ed my .

Alcune applicazioni.

A titolo d'esempio vediamo come si possa formare la funzione F per qualche particolare sezione, mediante le funzioni armoniche testè definite.

Sezione a contorno ellittico, o compresa tra due ellissi omotetiche.

Nella (433) poniamo: $\Phi = AP_2$ essendo A una costante. Si avrà quindi:

$$F = A r^2 \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} r^2$$

ed in forma cartesiana :

$$F = A(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Le linee $F = C =$ costante hanno l'equazione :

$$\left(\frac{1}{2} + A\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - A\right)y^2 = C$$

e sono coniche con assi sugli assi coordinati: per C positivo, sono ellissi se $-\frac{1}{2} < A < \frac{1}{2}$.

I semiassi, indicati con m ed n , sono espressi da:

$$m^2 = \frac{C}{\frac{1}{2} + A} ; \quad n^2 = \frac{C}{\frac{1}{2} - A}$$

Ove siano assegnati questi semiassi, possiamo ricavare le due costanti A e C risolvendo queste due equazioni, ed otteniamo :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2} ; \quad C = \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

Dunque inversamente, per un contorno ellittico di semiassi m ed n , la funzione Φ definita dalla (433) è :

$$\Phi = A(x^2 - y^2) \quad \Phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2} (x^2 - y^2)$$

la cui coniugata, conforme alle (435) e (445), è :

$$\Psi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} xy$$

e si ritrova così l'espressione (266) già esposta a pag. 275 nella precedente trattazione dello stesso caso della sezione ellittica soggetta a torsione, (come deve essere).

Il valore F_c che la F assume sul contorno è: C

$$F_c = \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

Il diagramma spaziale della $\zeta = F_c - F$ è una calotta di paraboloido ellittico: il volume V della calotta è notoriamente la metà del cilindro della stessa base (di area $= \pi m n$) e della stessa altezza (F_c), e quindi si ha:

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^3 n^3}{m^2 + n^2}$$

Dopo ciò è facile verificare che, conforme alle (431 ter) e 441, restano confermate le (267) e (270) ricavate alle pag. 276 e 278 nella precedente trattazione.

Il procedimento qui indicato è più semplice e diretto, ed ha il vantaggio di fornire immediatamente le equazioni delle traiettorie delle τ_2 .

Sono ovvie le modifiche da introdurre quando si tratti di corona compresa tra due ellissi omotetiche. Il volume V in tal caso si riduce a quello di un tronco di calotta di paraboloido ellittico, e si può determinare immediatamente come differenza tra i volumi delle due calotte aventi per base il contorno esterno ed il contorno interno rispettivamente.

Può essere istruttivo osservare e verificare che quando si assumesse:

$$\Phi = A Q_2 = 2 A x y = A r^2 \sin(2\varphi)$$

si troverebbero come traiettorie, (tra le quali una o due assumibili come contorni), delle ellissi concentriche omotetiche, con gli assi disposti secondo le bisettrici degli assi coordinati.

Altro esempio: sezione triangola equilatera.

Vediamo ora quali traiettorie si ottengono assumendo:

$$\Phi = A P_3 = A r^3 \cos(3\varphi) = A (x^3 - 3xy^2).$$

Dalla forma polare risulta che le traiettorie, (delle quali una o due si potranno assumere come contorni) devono essere periodiche rispetto a φ , con periodo $\frac{2\pi}{3}$, e perciò si riproducono identicamente

$$F_1 \cos(3\varphi - 2\pi) = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 3x^2y), \quad \text{e} \quad F_3 = x^3 - 3xy^2$$

Handwritten notes:
 ...
 $\zeta = \dots$
 ...

Handwritten notes:
 ...
 ...
 ...

Handwritten notes:
 ...
 $r^2 = A(x^2 + y^2)$
 $= \frac{1}{2} r^2$

in forma dopo un terzo di giro del raggio vettore intorno all'origine.

Esprimiamo la F sotto forma cartesiana:

$$F = A \left(x^2 - \frac{1}{2} A^2 \right) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Raccogliendo i termini simili si ha:

$$F = Ax^2 + \frac{1}{2} x^2 + \left(\frac{1}{2} - 3Ax \right) y^2$$

Di qui si scorge che per quel valore a di x , che annulla la parentesi moltiplicante y^2 , la F risulta indipendente da y e perciò costante per $x = a = \text{costante}$. Ciò prova che la retta $x = a$ appartiene ad una delle linee $F = \text{costante}$; inoltre, data la riscontrata periodicità della F e quindi della A , alla stessa linea devono appartenere anche le due rette che si ottengono dalla $x = a$ facendola rotare nel piano, intorno all'origine in un dato verso rispettivamente di $\frac{2\pi}{3}$ e di $\frac{4\pi}{3}$. Queste due rette, con quella originaria $x = a$ costituiscono così i lati di un triangolo equilatero avente il baricentro (— ortocentro — circocentro) nell'origine O ed avente a per apotema (pari ad un terzo dell'altezza-mediana).

Per quanto s'è detto la lunghezza a è definita dalla relazione:

$$\frac{1}{2} - 3Aa = 0$$

che serve a determinarla quando sia dato A , e che viceversa, data la dimensione del triangolo equilatero, e quindi a , serve a ricavare il coefficiente A . *Da una relazione (1) si ottiene $A = \frac{1}{6a}$*

$$A = \frac{1}{6a},$$

di modo che, sostituendo nell'espressione precedente, si ottiene:

$$F = \frac{x^2}{6a} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right)$$

Vede per 2.° che il triangolo equilatero, il cui baricentro è l'origine, ha per equazione $A(x^2 - 3ay^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{cost.}$

Il valore di F_c sul contorno è, per $x = a$

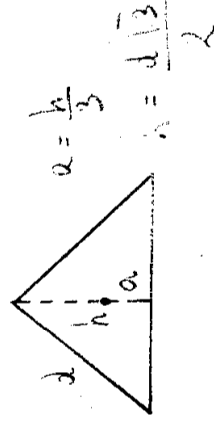
$$F_c = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2}{3}$$

L'equazione del contorno è quindi:

$$\frac{x^3}{6a} + \frac{y^2}{2} + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \frac{2a^2}{3}$$

È opportuno ricordare che se indichiamo con d il lato del triangolo equilatero, si ha la relazione:

$$\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{3}{6\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{3}}{6} d \quad \text{ossia:} \quad d = 2\sqrt{3}a.$$



Esprimendo così a in funzione di d si ha dunque:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{3}d} (x^3 - 3xy^2) \quad \psi = A (x^3 - 3xy^2)$$

$$A = \frac{1}{6a} = \frac{1}{d\sqrt{3}}$$

e perciò conforme alle (435):

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}d} (y^3 - 3x^2y).$$

Questa espressione differisce solo per il segno dalla (271) ricavata a pag. 280; il divario è dovuto alla diversa orientazione degli assi coordinati, rispetto alla sezione triangola equilatera.

Per ovvie ragioni di simmetria si ricava poi, secondo la (439):

$$V = 6 \int_0^a dx \int_0^{x/\sqrt{3}} (F_c - F) dy.$$

Sostituendo le espressioni poco sopra ricavate ed eseguendo le integrazioni, si ottiene:

$$V = \frac{9\sqrt{3}}{10} a^4 = \frac{\sqrt{3}}{160} d^4.$$

Dalla (441) e tenendo conto del noto valore di I_p riportato a pag. 280, si trova:

$$q = \frac{I_p}{2V} = \frac{5}{3}$$

confermando così il valore (272) già ottenuto a pag. 281.

Infine ricaviamo il valore di τ_z^{max} , il quale, per ovvi motivi, coincide con quello di τ_{yz} per $x = a$ ed $y = 0$. Eseguendo i calcoli semplicissimi si ottiene:

$$\tau_z^{max} = \frac{20 M_x}{d^3}$$

ritrovando così il valore (274) già ricavato a pag. 288.

Le traiettorie di τ_z sono rappresentate dall'equazione generica:

$$F = \frac{x^3}{V 3 d} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \left(1 - \frac{6x}{V 3 d}\right) = C = \text{costante}$$

Il valore di C che compete al contorno è $\frac{d^2}{18}$.

Per le varie traiettorie deve essere $0 < C < \frac{d^2}{18}$; inoltre il flusso di τ_z compreso tra il centro-origine ed una traiettoria generica, sta al flusso totale compreso tra l'origine ed il contorno, nel rapporto:

$$C : \frac{d^2}{18}$$

Il lettore potrà rilevare facilmente come la trattazione qui esposta sia più rapida e sintetica di quella riportata nel N.º 53, alle pagine 279-288.

Sezione rettangolare. — Con le stesse notazioni usate nel N.º 53, alle pag. 289 e seguenti, tenendo presenti le (446), ed osservando che per ovvie ragioni di simmetria, in questo caso F e Φ devono essere funzioni *pari* di x e di y , si può porre

$$\Phi = \frac{1}{2} (y^2 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh(m_n x) \cos(m_n y) \quad (448)$$

funzione pari di x è una funzione che si comporta come una funzione algebrica di y - do parli in x , che così non cambia il numero di segni della x .

ove i coefficienti A_n ed m_n devono essere determinati in modo che sia soddisfatta la condizione al contorno:

$$\Phi_c = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + F_c, \quad (F_c = \text{costante})$$

ossia, sui lati $x = \pm a$ e per $-b < y < b$

$$\text{deve essere:} \quad \Phi_c = -\frac{1}{2}(a^2 + y^2) + F_c$$

e sui lati $y = \pm b$ e per $-a < x < a$

$$\text{si deve avere:} \quad \Phi_c = -\frac{1}{2}(x^2 + b^2) + F_c$$

D'altra parte per $x = \pm a$ e per $-b < y < b$ $\cos^2 \frac{\pi y}{2b}$, $\sin^2 \frac{\pi y}{2b}$ deve essere evidentemente $\tau_{xy} = 0$, e perciò

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y = 2y - \sum_{n=1}^{\infty} m_n A_n \cosh(m_n a) \sin(m_n y) = 0 \quad (449)$$

Inoltre per $y = \pm b$ e per $-a < x < a$, dovendo essere: $\tau_{yz} = 0$, si deve avere:

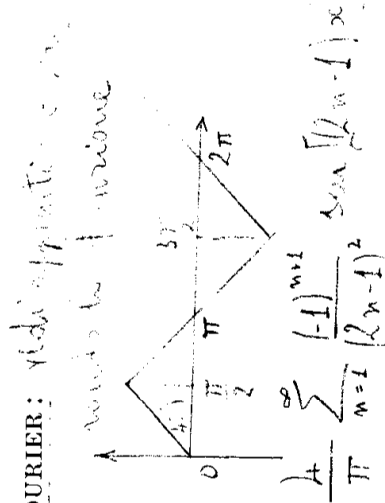
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + x = \sum_{n=1}^{\infty} m_n A_n \sinh(m_n x) \cos(m_n b) = 0.$$

Quest'ultima condizione viene identicamente soddisfatta ponendo:

$$m_n = \frac{2n-1}{2b} \pi \quad (450)$$

Inoltre richiamiamo dall'analisi la nota *serie di FOURIER*:

$$2y = \frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left| \frac{(2n-1)\pi}{2b} y \right|$$



$$\text{si vede che } x = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \operatorname{sen} \left[\frac{(2m-1)\pi}{2b} x \right]$$

$$\text{e ponendo } x = y \frac{\pi}{2b}$$