

linea; l'equazione cartesiana di questa si ottiene eliminando il parametro, e cioè quadrando la (406) e moltiplicandola per la (407) membro a membro: si ricava così:

$$\sigma'^2 \eta = 16 \pi \left(\frac{m+1}{m+2} \right)^3 \frac{M_f^2}{T^3} k$$

Questa è l'equazione di un'iperbole cubica; (il secondo membro è costante).

Tracciata questa, le coordinate della sua intersezione col diagramma μ sono i valori di σ' e di η che risolvono il problema del progetto diretto della sezione, in quanto, note tali coordinate, si può, per mezzo di una qualunque delle (406) e (407) ricavare il raggio r della sezione, che soddisfa l'equazione di stabilità per i dati valori di M_f e di T .

b) *Sezione rettangolare di dato "allungamento", $h:b=c$.* — (h = altezza, b = base), quindi si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{zm} &= \frac{6 M_f}{c^2 b^3} & \tau_{zm} &= \frac{3}{2} \frac{T}{c b^2} \\ \sigma' &= \frac{\sigma_{zm}}{\tau_{zm}} = 4 \frac{M_f}{T c b} ; \end{aligned} \quad (409)$$

e l'equazione di stabilità è:

$$k = \sigma_{im} = \eta \tau_{zm} = \eta \cdot \frac{3}{2} \frac{T}{c b^2}$$

da cui si ricava:

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{c b^2}{T} k ; \quad (410)$$

eliminando b tra le (409) e (410) si trova:

$$\sigma'^2 \eta = \frac{32}{3} \cdot \frac{M_f^2 k}{T^3 c} \quad (411)$$

equazione di un'iperbole cubica.

L'intersezione di questa col diagramma μ della (fig. 56) ha per coordinate i valori risolutivi di σ' e di η , dai quali, a mezzo di una qualunque delle (409) e (410), si può ricavare la base b e quindi

l'altezza $h = cb$ della sezione che soddisfa l'equazione di stabilità per i dati valori di M_f e di T .

c) Sezione rettangolare di data base b — (ricavare l'altezza incognita h).

Essendo :

$$\sigma_{zm} = \frac{6 M_f}{b h^2} \qquad \tau_{zm} = \frac{3 T}{2 b h}$$

si ha :

$$\sigma' = \frac{\sigma_{zm}}{\tau_{zm}} = 4 \frac{M_f}{T h} ; \qquad (412)$$

e dall'equazione di stabilità :

$$k = \sigma_{im} = \eta \tau_{zm} = \eta \cdot \frac{3 T}{2 b h}$$

si deduce :

$$\eta = \frac{2 b h}{3 T} k ; \qquad (413)$$

ed eliminando h tra le (412) e (413) si ottiene :

$$\sigma' \eta = \frac{8 M_f}{3 T^2} b k \qquad (414)$$

equazione di un'iperbole (conica) equilatera.

L'intersezione di questa, col diagramma μ della (fig. 56) [analoga-mente a quanto sopra per le (408) e (411)], ci permette di calcolare l'altezza incognita h , mediante una qualsiasi delle (412) e (413).

d) Sezione rettangolare di data altezza h : (ricavare la base incognita b).

In questo caso secondo la (412) essendo dato h , la σ' è nota; perciò dal diagramma μ della (fig. 53) si ricava senz'altro il corrispondente valore di η , e quindi dall'equazione di stabilità (413) si può ottenere il valore risolutivo dell'incognita b .

TRACCIAMENTO DELLE LINEE ISOSTATICHE IN PARTICOLARI FORME DI PRISMI O CILINDRI SOGGETTI A FLESSIONE E TAGLIO.

Le linee isostatiche si devono intendere tracciate sui cilindri che abbiamo chiamati « *traiettorie cilindriche delle τ_x* » (v. N.º 48 pag. 201); noi riterremo che detti cilindri vengano, ove occorra, sviluppati su di un piano.

Sullo sviluppo piano si possono assumere due assi, ζ coincidente con una generatrice del cilindro, — per esempio con una di quelle tra esse che incontrano l'asse neutro, — ed η normale al precedente, e perciò sviluppo di una direttrice del cilindro.

L'equazione differenziale delle linee isostatiche è:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = i_* \quad (415)$$

ove il secondo membro è una delle due radici della (176) (N.º 48, pag. 204), esprimibile in funzione di σ_z e di τ_z , e perciò anche di η e ζ da cui le σ_z e τ_z dipendono in modo noto.

L'equazione (415) nei casi più comuni presenta notevoli difficoltà per la separazione delle variabili e per la successiva integrazione. — Perciò, al fine di tracciare le linee isostatiche è opportuno ricorrere al preventivo tracciamento delle *isocline rispetto alle predette isostatiche*, secondo la definizione stabilita al N.º 48, pag. 204; poi ricavarle le isostatiche con procedimento grafico progressivo, analogo a quello già impiegato in condizioni simili per le traiettorie delle τ_z nel prisma a sezione triangolare soggetto a torsione nella fig. 18, e nei prismi soggetti a taglio nelle fig. 46, 47 e 51.

L'equazione di un'isoclina si ottiene dalla (177) [N.º 48 pag. 204] tenendo costante in essa il valore di i_* , in modo che risulti pure costante.

$$C = \frac{1}{i_*} - i_* = \frac{\sigma_z}{\tau_z} \quad (416)$$

e quindi esprimendo σ_z τ_z in funzione delle coordinate η e ζ .

Facendo poi variare il parametro i_* si otterranno varie linee della « famiglia » di isocline.

L'effettiva, esplicita equazione ed il corrispondente tracciamento si può ottenere solo nei casi particolari.

Prisma a sezione rettangolare soggetto a flessione e taglio secondo una mediana di lunghezza h.

Adottando la nota soluzione approssimata, le traiettorie delle τ_z sono in questo caso rette parallele all'asse di sollecitazione; perciò le linee isostatiche sono contenute in piani paralleli al piano di sollecitazione yz , e quindi gli assi η e ζ non differiscono da quelli y e z .

Secondo le ipotesi poste a base dello studio della *flessione composta* agli inizi del N.º 54, riterremo che il prisma sia incastrato ad

una delle sue basi, e soggetto ad una forza P agente secondo una mediana dell'altra base, mediana di altezza h , che verrà assunta come asse delle y . L'origine O degli assi sarà perciò il baricentro della base caricata dalla forza P ; in una sezione generica a distanza z dall'origine avremo:

$$M_x = Pz; \quad T = P.$$

Quindi, per le notissime relazioni, si ha in un punto generico:

$$\sigma_z = \frac{12P}{bh^3} yz; \quad \tau_z = \frac{3P}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

Perciò la (177), tenuta presente la (416) ci dà dopo ovvie semplificazioni l'equazione di un'isoclina generica:

$$\frac{\sigma_z}{\tau_z} = \frac{1}{i} - i = C \quad yz - \frac{C}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = 0 \quad (417)$$

Le isocline sono dunque delle coniche col centro nell'origine: com'è ben noto gli asintoti sono complessivamente rappresentati dall'equazione: $u_2(x_3) = 0$ *Fig. 10, 11, 12, 13, 14*

$$yz + \frac{C}{2} y^2 = 0$$

e quindi, separatamente:

$$y = 0 \quad \text{e} \quad z = -\frac{C}{2} y \quad (418)$$

Gli asintoti sono dunque reali, e perciò le coniche sono iperboli: esse hanno a comune un asintoto coincidente con l'asse z ; l'altro asintoto, rappresentato dalla seconda delle (418), ossia da:

$$y = -\frac{2i_*}{1-i_*^2} z \quad [\text{v. la (416)}]$$

forma con l'asse z un angolo uguale a meno il doppio di quello formato dallo stesso asse dalle tangenti alle isostatiche nei punti ove esse incontrano la corrispondente iperbole isoclina. *Fig. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100*

Dalla (417) risulta che tutte le iperboli della famiglia passano

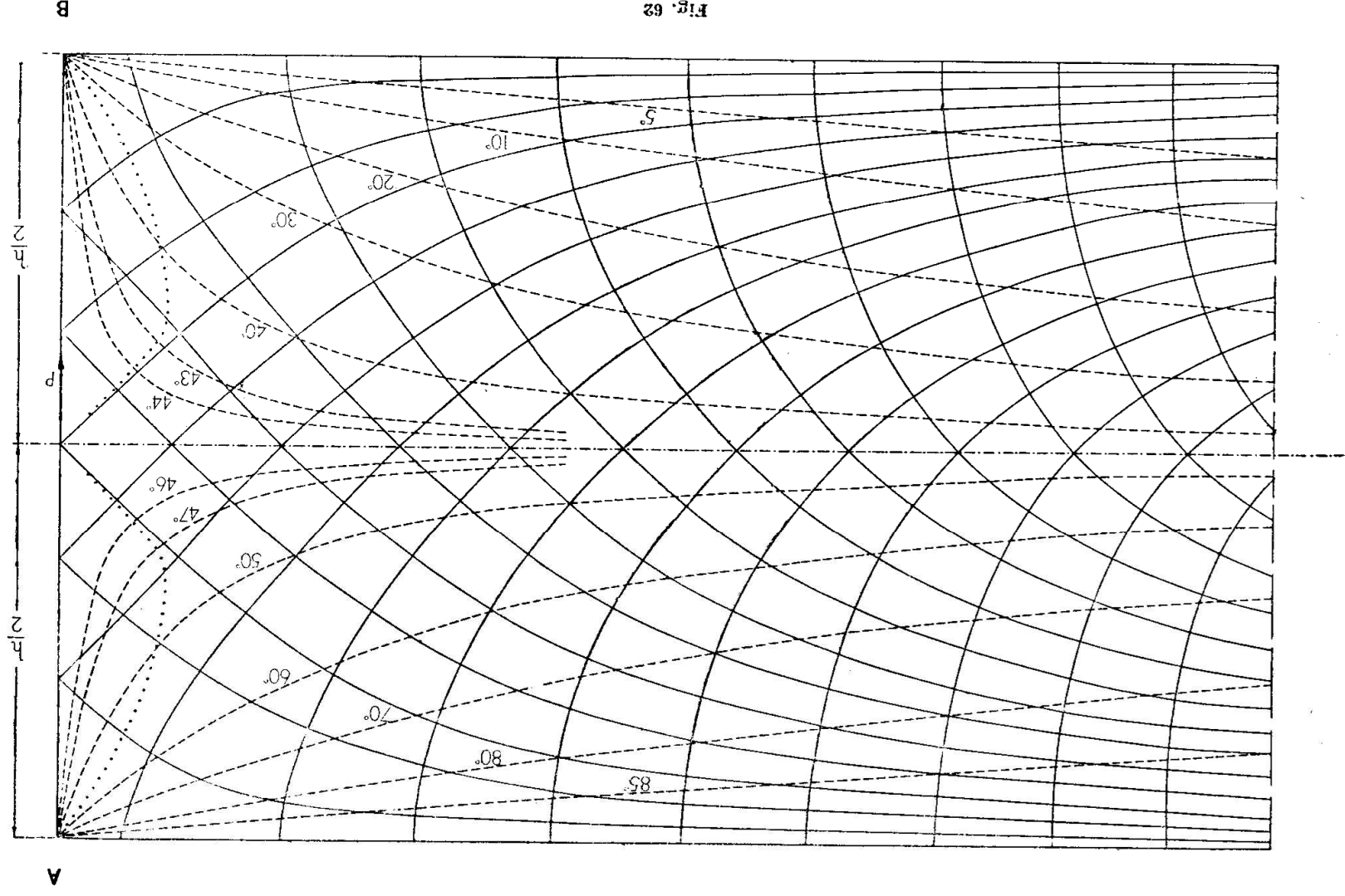


Fig. 62

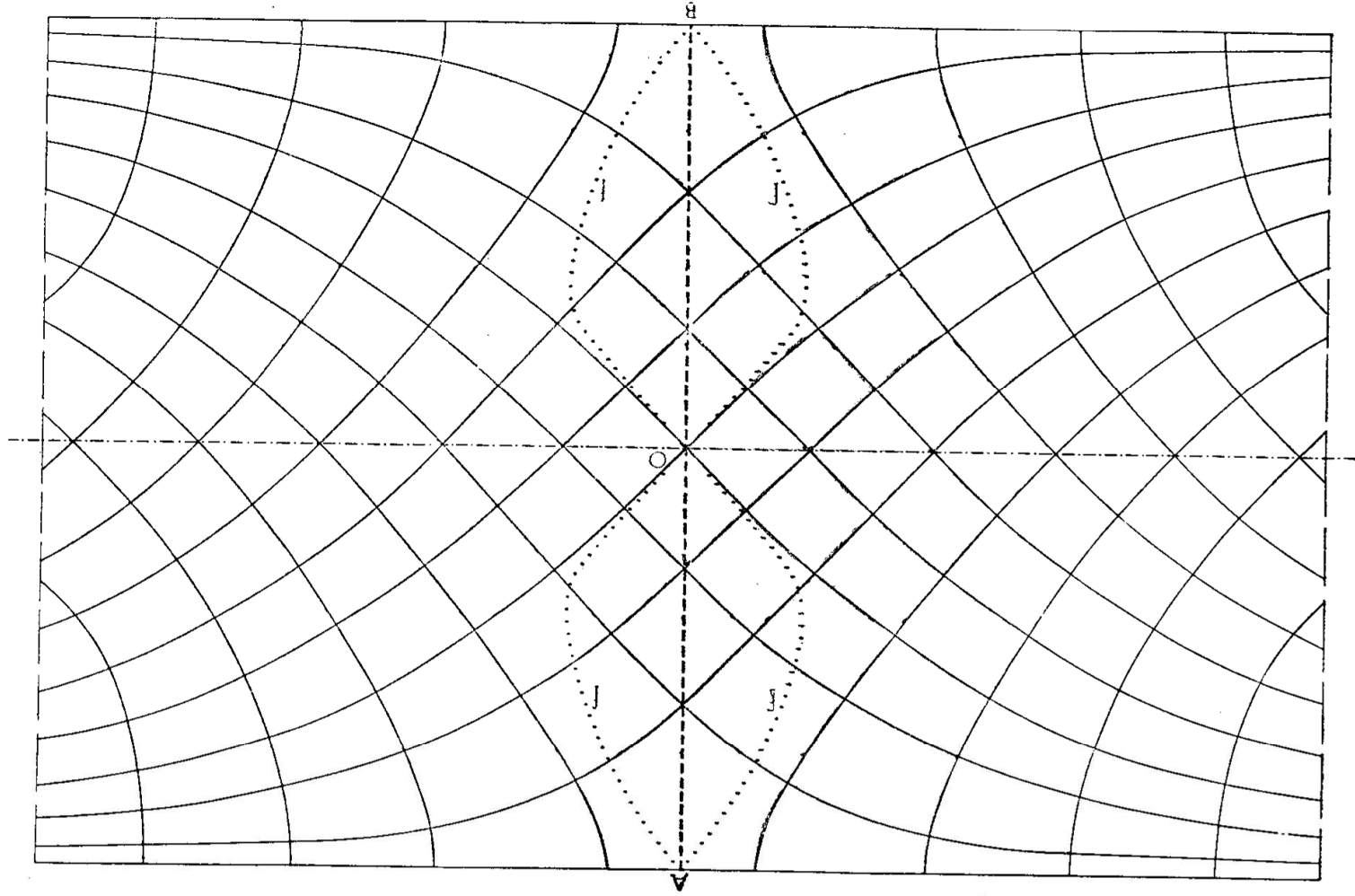
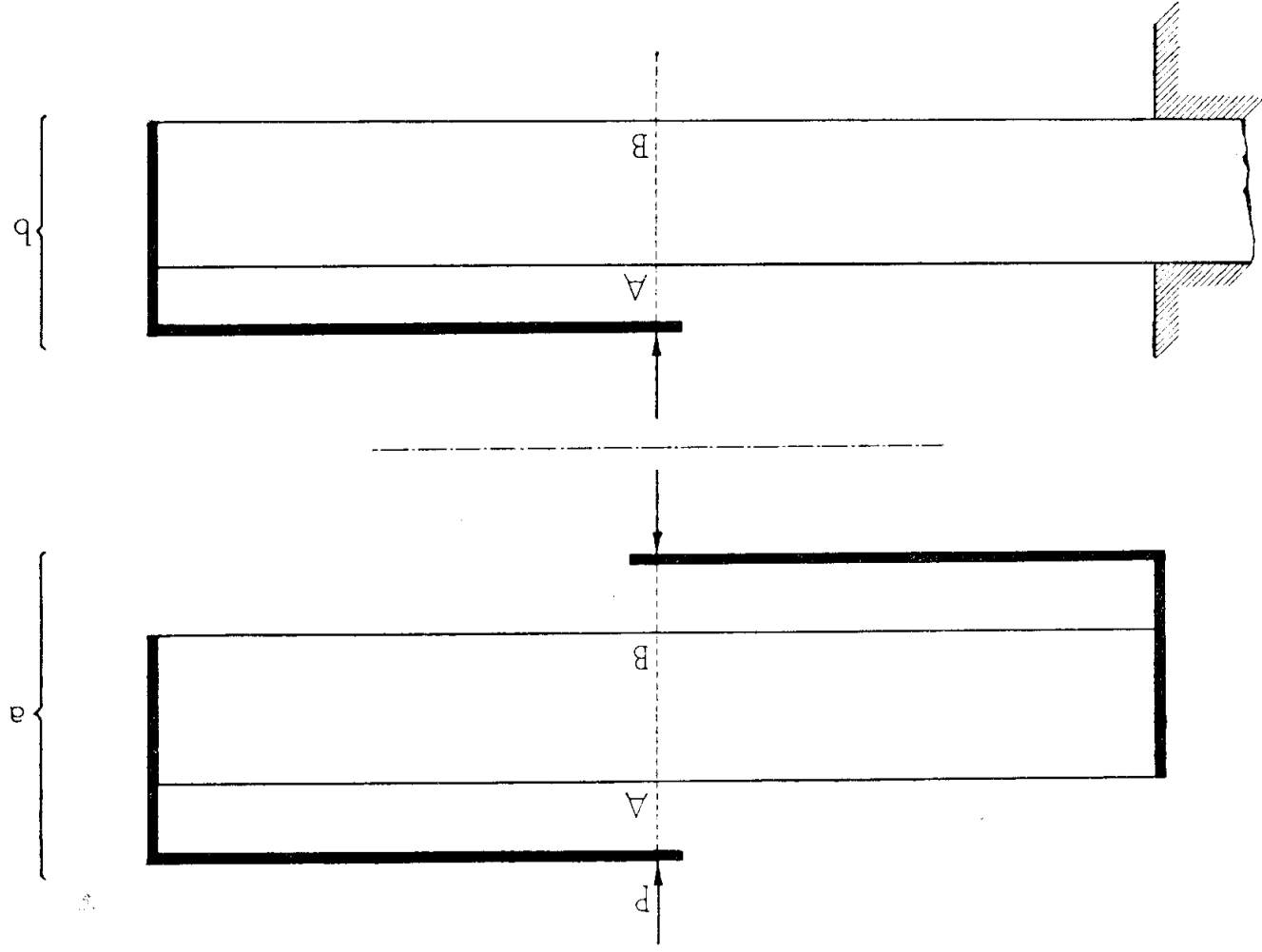


Fig. 69



per i due punti $z = 0$ ed $y = \pm h:2$, estremi dell'asse di sollecitazione sulla sezione caricata dalla forza P .

In particolare per $C = 0$ ossia per $i_* = \pm 1$ la iperbole degenera negli assi coordinati y e z ; perciò su questi assi le direzioni principali sono inclinate rispetto ad essi di $\pm 45^\circ$.

Le iperboli isocline (417) e le isostatiche da esse ricavate con procedimento grafico progressivo sono disegnate a titolo d'esempio nella fig. 62, ove si suppone la forza P agente secondo la mediana della sezione estrema di traccia AB . Le isocline sono segnate a tratti e contraddistinte con la corrispondente inclinazione, espressa in gradi. Le isostatiche sono disegnate continue: furono condotti per punti dell'asse z situati a distanze successive uguali.

È pure designata a punti la linea f luogo dei flessi delle isostatiche; essa si ottiene come luogo dei punti in cui le isocline hanno le tangenti inclinate all'asse z della stessa i a cui ciascuna isocline si riferisce. Per trovare tale punto per una iperbole generica basta trovare gli estremi del diametro coniugato alla direzione inclinata della i corrispondente alla stessa iperbole.

Il luogo f è utile per guidare nel tracciamento delle isostatiche, individuandone i punti di flesso.

Nella figura 63 si riportarono le linee isostatiche ricavate già nella fig. 62 e si tracciarono pure le simmetriche di esse rispetto all'asse $y \equiv AB$, immaginando il prisma prolungato oltre la sezione AB , di momento nullo, e sollecitato nella sezione generica distante di z dalla AB da uno sforzo di taglio costante $= P$ e da un momento flettente $= Pz$, (il quale cambia di segno con z passando attraverso alla sezione AB caratterizzata da $z = 0$).

Una tale sollecitazione si può realizzare colle disposizioni indicate nella figura 63 bis a e b , ove le linee più marcate indicano dei bracci rigidi e rigidamente connessi con le basi d'estremità del prisma, sulle quali essi riportano l'azione della forza P , che è normale all'asse del prisma ed agisce secondo la mediana della sezione *intermedia* AB .

Nella predetta fig. 63 si riportò pure la curva f dei flessi coi suoi rami simmetrici rispetto all'asse AB .

Dalla figura stessa è opportuno rilevare il caratteristico andamento di quelle linee isostatiche, le quali attraversano il segmento AB : infatti esse a breve distanza da AB attraversano pure l'asse z ; ciò è in armonia col fatto che il segno della tensione principale che si trasmette lungo una di dette linee, deve essere lo stesso per tutta la linea: mentre in punti simmetrici rispetto alla sezione AB , essendo di segni opposti i momenti flettenti, devono pure essere di segni opposti le tensioni principali omologhe.

Per il tracciamento progressivo delle linee isostatiche occorre osservare che le isocline successive dovranno essere abbastanza vicine perchè un arco di isostatica tra esse compreso sia così breve da potersi confondere con un arco di cerchio od anche di parabola. In tal caso se C_1 e C_2 sono gli estremi di tale arco, situati su due isocline successive e se V_1 è il punto comune delle rispettive tangenti dovranno essere uguali i segmenti $V_1 C_1 = V_1 C_2$ (v. fig. 64).

Questa condizione deve guidare nel tracciamento delle successive tangenti alle isostatiche.

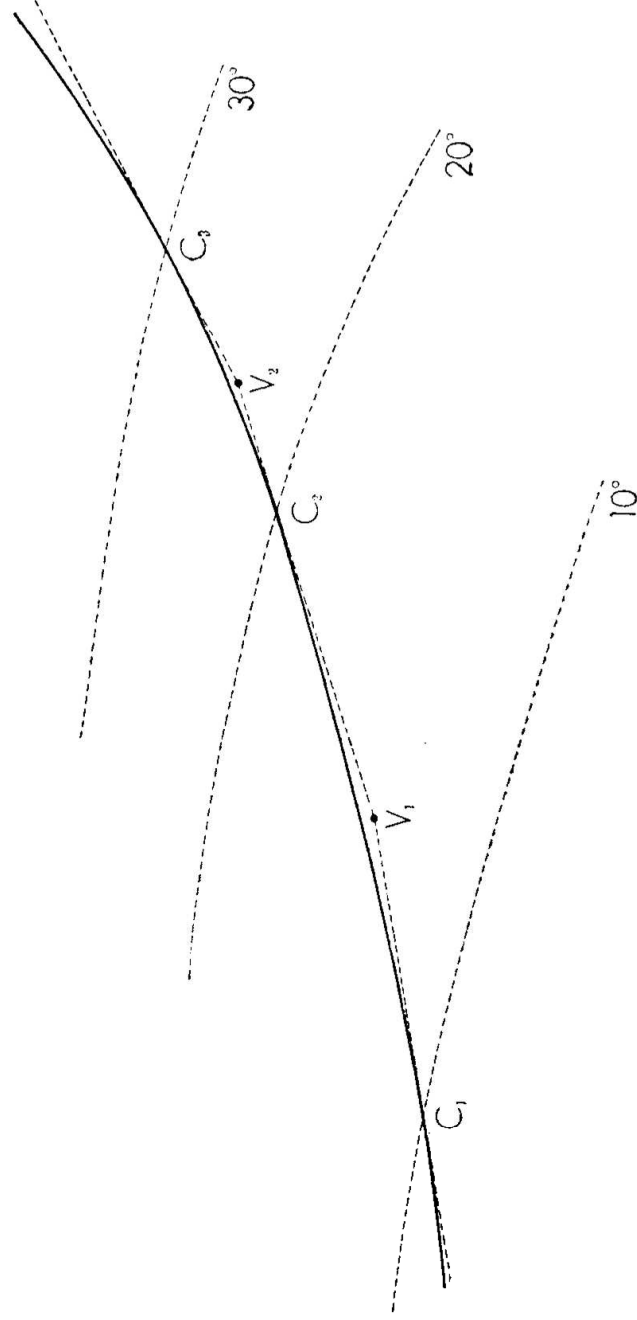


Fig. 64

Nella fig. 64 si vede pure $V_2 C_2 = V_2 C_3$, ed in modo analogo si deve successivamente procedere.

Passiamo ora a dare un altro esempio di linee isostatiche tracciate sullo sviluppo piano di una tralettoria cilindrica di τ_z .

Cilindro a sezione circolare, soggetto a flessione e taglio. — *Linee isostatiche sulla superficie cilindrica esterna.*

Il cilindro di raggio r sia sollecitato da una forza P agente secondo un diametro di una base. Con le solite notazioni abbiamo, sulla superficie esterna: [v. (392) pag. 420].

$$\sigma_z = \frac{4 Pz}{\pi r^4} y ; \quad \tau_{zc} = \frac{P}{\pi r^2} \frac{m+2}{m+1} \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}$$

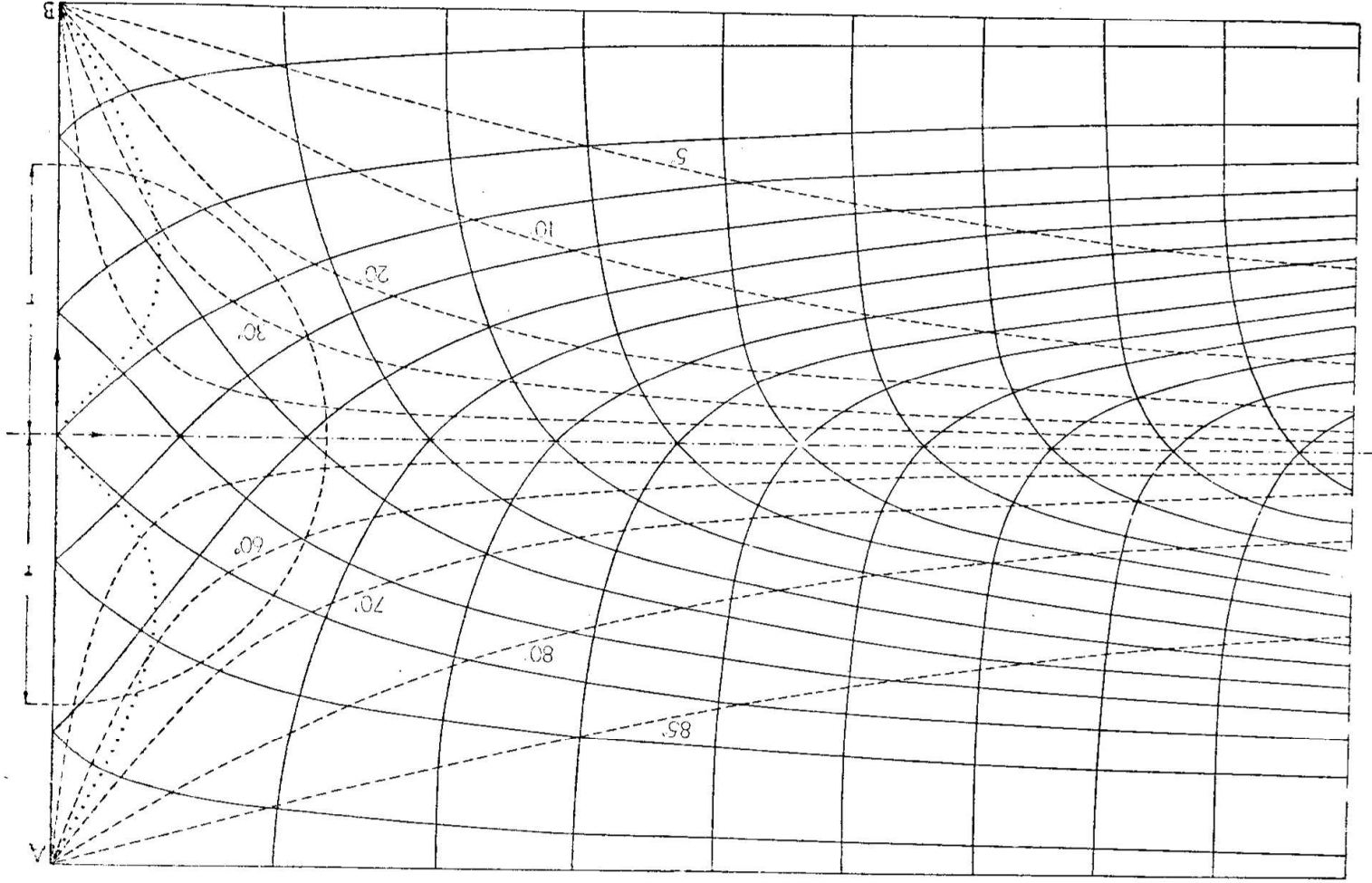


Fig. 65

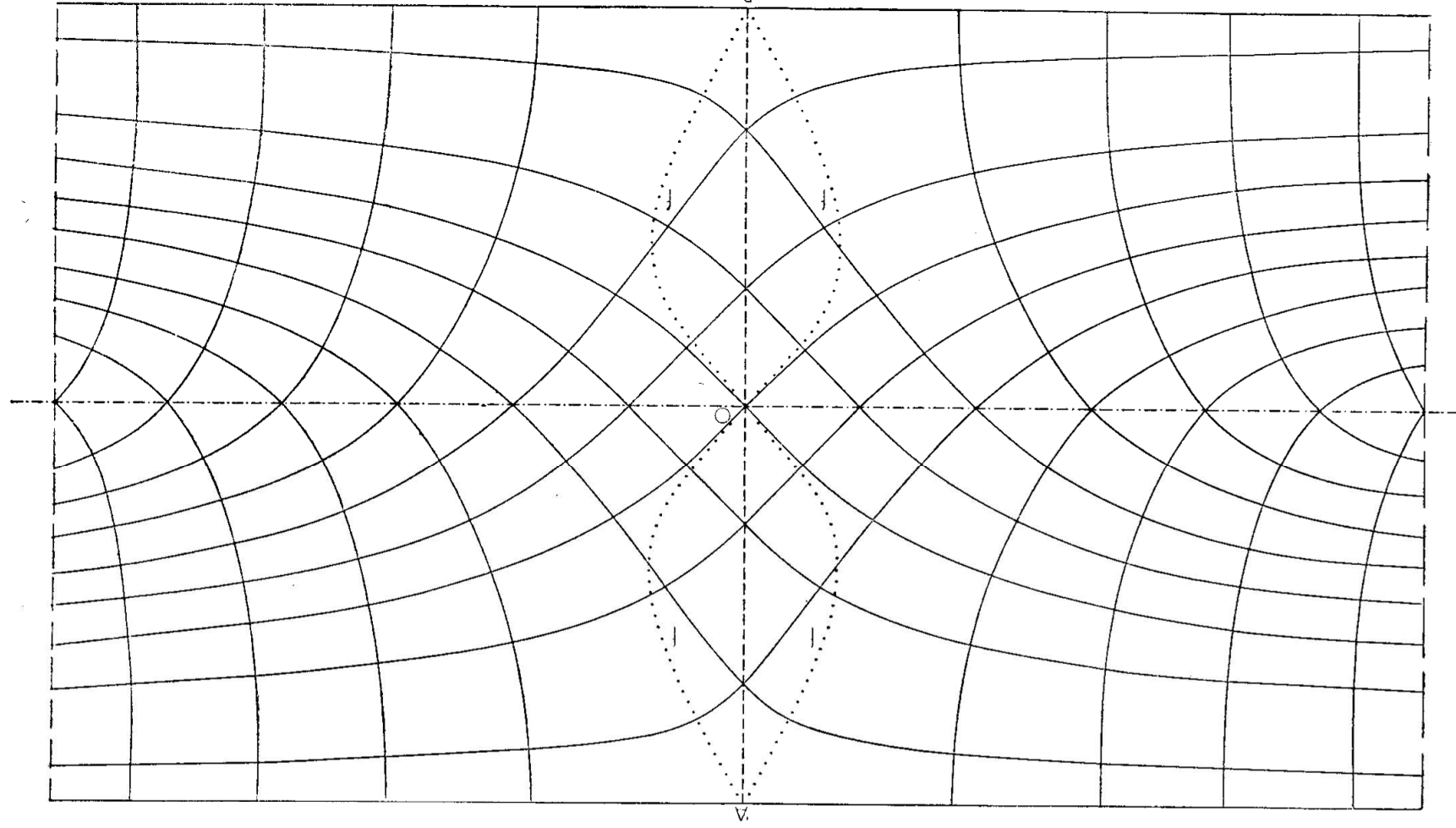


Fig. 66

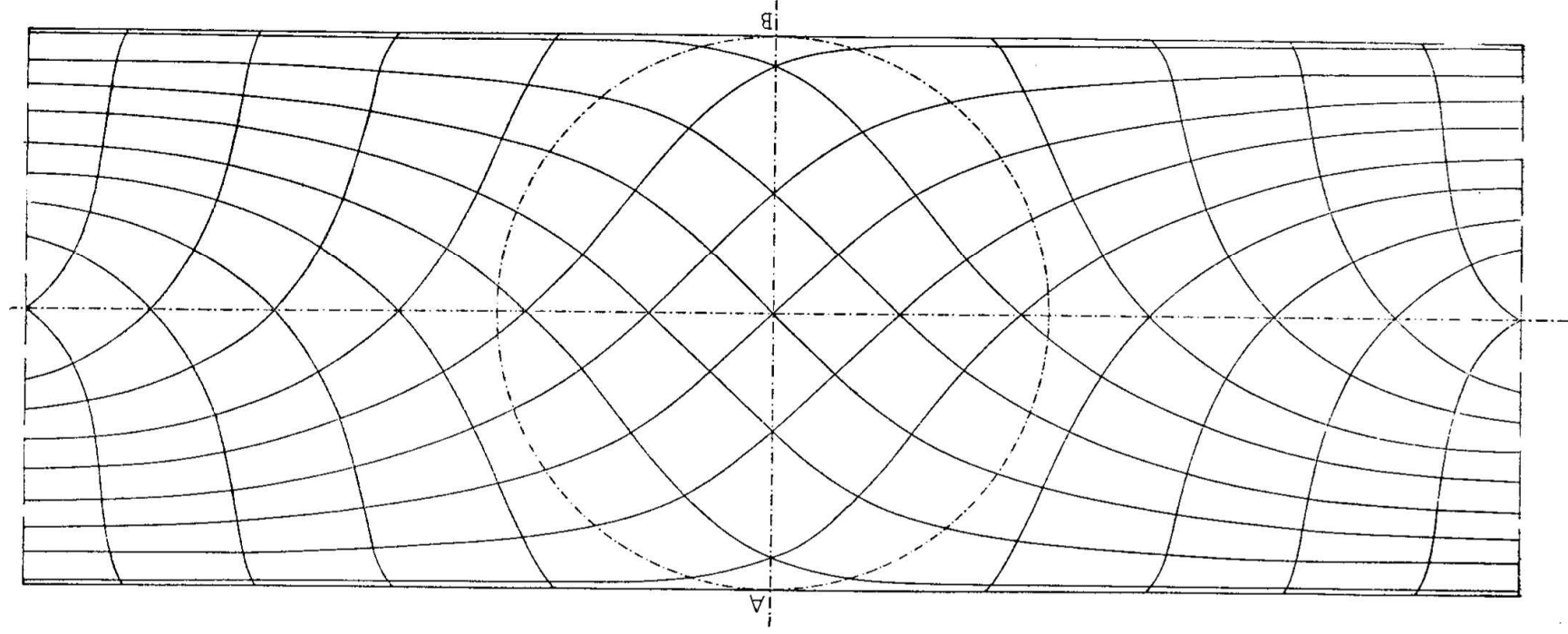


Fig. 67

Indicando con η l'arco della circonferenza contorno della sezione, compreso tra l'asse neutro ed il punto generico, avremo:

$$y = r \operatorname{sen} \frac{\eta}{r}$$

e perciò le formole precedenti divengono:

$$\sigma_z = \frac{4Pz}{\pi r^3} \operatorname{sen} \frac{\eta}{r}; \quad \tau_{zc} = \frac{P}{\pi r^2} \frac{m+2}{m+1} \cos \frac{\eta}{r}.$$

Immaginiamo ora di sviluppare su un piano uno dei due mezzi cilindri compresi tra le due generatrici contenute nel piano di sollecitazione.

Nel piano dello sviluppo assumiamo gli assi η e ζ ; secondo quanto fu stabilito a pag. 432; l'asse ζ coincide colla generatrice mediana della striscia sviluppo; l'asse η giaccia sulla base caricata da P ; ciò posto si ha: $\zeta = z$, e la η è precisamente lo sviluppo dell'arco contorno della sezione, com'è detto poco sopra.

Quindi, secondo la nota relazione, si ha:

$$\frac{1}{i_*} - i_* = \frac{\sigma_z}{\tau_{zc}} = 4 \frac{m+1}{m+2} \frac{\zeta}{r} \operatorname{tang} \frac{\eta}{r}$$

Per i_* costante, ponendo al solito, $\frac{1}{i_*} - i_* = C$ si ottiene l'equazione dell'isocline, che risolta rispetto a ζ , è:

$$\zeta = \frac{C}{4} \cdot \frac{m+2}{m+1} r \operatorname{cotg} \frac{\eta}{r}. \quad (419)$$

Questa rappresenta una curva trascendente (cotangente).

Per $\zeta = 0$ si ha:

$$\eta = \pm \frac{\pi}{2} r$$

qualunque sia C ; perciò tutte le isocline passano per i due punti individuati da tali coordinate.

Per $\eta = 0$ si ha $\zeta = \infty$, qualunque sia C ; perciò tutte le isocline sono asintotiche all'asse ζ .

La (419) si presta ad una costruzione geometrica semplice ed ovvia, che omettiamo per brevità.

Nella figura 65 sono segnate a tratti alcune isocline secondo la (419), per le inclinazioni rispettivamente indicate in gradi; è segnata pure la curva f dei flessi; poi si tracciarono, col noto procedimento progressivo, le isostatiche, con disposizione analoga a quella della fig. 62.

Con centro in O è segnata anche a tratti una mezza circonferenza di raggio r ; (semi-sezione del cilindro, ribaltata).

Nella fig. 66 furono riportate le isostatiche (colla relativa curva f), per il cilindro sollecitato secondo lo schema della figura 60 bis, con osservazioni analoghe a quelle fatte per la figura 63.

Convieni confrontare le fig. 65 e 66 con le omologhe 62 e 63, per rilevare l'andamento delle linee isostatiche, notevolmente diverso nei due casi.

Nella fig. 67 si riportarono le isostatiche ricavate dalla fig. 66, immaginando di riavviluppare sul cilindro di raggio r la superficie laterale prima sviluppata in piano, e poi proiettando ortogonalmente sul piano di sollecitazione yz . (Con diametro AC è segnata a tratti la circonferenza sezione del cilindro ribaltata).

Dopo questa operazione di riavviluppo, se si proiettano ortogonalmente sul piano yz le isocline (419), si ottengono le curve di equazione:

$$z = \frac{C}{4} \cdot \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{r}{y} \sqrt{r^2 - y^2}, \quad (420)$$

come facilmente si deduce dalle (419) con calcoli ovvi.

Potrebbe essere istruttivo moltiplicare gli esempi di isostatiche per altri casi particolari; ma riteniamo sufficienti quei due qui esposti, per illustrare il metodo del tracciamento, ed i caratteri essenziali delle famiglie di dette linee.

ELEMENTI SUPERFICIALI SOGGETTI A SOLA TENSIONE TANGENZIALE E LORO INVILUPPI. — TRAIETTORIE DELLE TENSIONI TANGENZIALI PURE.

Riferiamoci ora a quanto si è visto al N.º 48 a pag. 205, ove è stato riconosciuto che nella distribuzione di tensioni a due dimensioni, quale si ha nel caso del problema di De Saint-Venant, il cono di scorrimento di equazione (47) [N.º 20] si riduce ad una coppia di rette nel piano della detta distribuzione, delle quali rette l'una è la z' parallela per il punto generico all'asse z e l'altra z'' è la simmetrica della z' rispetto agli assi principali, di modo che questi sono le

bisettrici dell'angolo completo $z'z''$. Queste due rette sono le tracce degli elementi di superficie per il punto generico, i quali sono soggetti solo a tensione tangenziale, ed in pari tempo esse sono le rette d'azione delle rispettive tensioni tangenziali pure, le quali sono entrambe in valore scalare uguali a τ_z .

La retta z'' per il punto generico si può trovare direttamente senza la preventiva determinazione degli assi principali. Infatti, nel piano $x'z'$ della distribuzione a due dimensioni definita a pag. 200 e seguenti N.º 48, si può esprimere la condizione che sia uguale a zero la componente normale di tensione sull'elemento dalla normale definita dai coseni direttori α_y, α_z ; tale componente è espressa dalla (39 bis) pag. 59; dalla quale, sostituendo le componenti di tensione a quelle di pressione e ricordando che nel caso nostro si ha $\sigma_y = 0$, si ricava:

$$\sigma_z \alpha_z^2 + 2 \tau_z \alpha_y \alpha_z = 0; \quad (421)$$

Questa condizione si sdoppia in:

$$\alpha_z = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_z \alpha_z + 2 \tau_z \alpha_y = 0 \quad (422)$$

La prima di queste ci definisce l'elemento diretto secondo z' già noto come soddisfacente alla detta condizione: la seconda ci definisce l'altro elemento cercato, diretto secondo la z'' sopra definita: da detta relazione si ricava:

$$\frac{\alpha_y}{\alpha_z} = - \frac{\sigma_z}{2 \tau_z}$$

e dunque ovviamente l'inclinazione di z'' rispetto a z è:

$$- \frac{\alpha_z}{\alpha_y} = \frac{2 \tau_z}{\sigma_z} \quad (423)$$

Questa relazione si presta ad una semplicissima costruzione grafica per trovare la direzione di z'' e permette di ricavare gli assi principali come bisettrici dell'angolo completo $z'z''$, ciò che notoriamente si può fare con equazione lineare e quindi in modo più semplice che non mediante le (169) e (173), pag. 202 e 203, ovvero mediante la (176), pag. 204.

Indichiamo con α l'angolo che con l'asse z forma la direzione

principale che indichiamo con 1, (secondo la quale agisce la σ_1) cioè poniamo:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \left(\frac{2\tau_z}{\sigma_z} \right).$$

Ricordiamo ciò che già è espresso a pag. 205, e precisamente che le z' z'' sono gli asintoti delle iperboli di tensione o di direzione, e teniamo presente l'equazione (52).

Si trova così:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\operatorname{tang}^2 \alpha$$

ed essendo notoriamente, secondo (170), pag. 203,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_z; \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\tau_z^2,$$

si ricava immediatamente:

$$\sigma_1 = \sigma_z \frac{\cos^2 \alpha}{\cos(2\alpha)}; \quad \sigma_2 = -\sigma_z \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos(2\alpha)} \quad (424)$$

ed anche:

$$\sigma_1 = \tau_z \cotg \alpha; \quad \sigma_2 = -\tau_z \operatorname{tang} \alpha \quad (425)$$

Queste espressioni possono riuscire vantaggiose, perchè si prestano ad ovvie costruzioni grafiche, sulle quali sorvoliamo per brevità.

Passiamo ora a considerare le *traiettorie* delle tensioni tangenziali *pure*, agenti in ogni punto rispettivamente secondo gli elementi z' e z'' or ora considerati; tali traiettorie devono essere intese e concepite in modo analogo a quello seguito a pag. 70 per definire le linee isostatiche.

E ovvio che le traiettorie delle τ_z *pure* agenti secondo gli elementi z' sono rette parallele all'asse z .

Le traiettorie poi delle τ_z *pure* agenti secondo gli elementi z'' sono tali che ciascuna di esse è l'involuppo degli elementi come z'' nei punti che si susseguono lungo la linea stessa, (cfr. pag. 70, in fine).

Queste traiettorie, come già si vide per le linee isostatiche in fondo a pag. 431, si devono intendere tracciate su quei cilindri che furono denominati « *traiettorie cilindriche delle τ_z* », ritenendo, ove occorra, che tali cilindri vengano sviluppati in piano.

Su questo sviluppo si assumono gli assi η e ζ nel modo indicato

in principio di pag. 432. — Ciò posto, l'equazione differenziale delle dette traiettorie è:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{2\tau_z}{\sigma_z}, \quad (426)$$

notando che il secondo membro è esprimibile come funzione delle due coordinate η e ζ .

Vogliamo ora vedere come la detta equazione differenziale si possa integrare nei due casi particolari di sezione, già sopra considerati per le linee isostatiche.

Prisma a sezione rettangolare, come a pag. 432.

Adottando anche qui per le τ_z la nota distribuzione approssimata, gli assi η e ζ si identificano con quelli y e z , come già a pag. 432.

Con ciò, e con l'introduzione dei noti valori di σ_z e τ_z riportati pure a pag. 433, l'equazione delle traiettorie diviene:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{yz}$$

che si può anche scrivere:

$$y \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

ossia, separando le variabili:

$$\frac{d\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)} = -2 \frac{dz}{z}.$$

Si integri con la condizione che per $y = 0$ sia $z = z_0$; si trova così:

$$\log \frac{\frac{h^2}{4} - y^2}{\frac{h^2}{4}} = -2 \log \left| \frac{z}{z_0} \right|$$

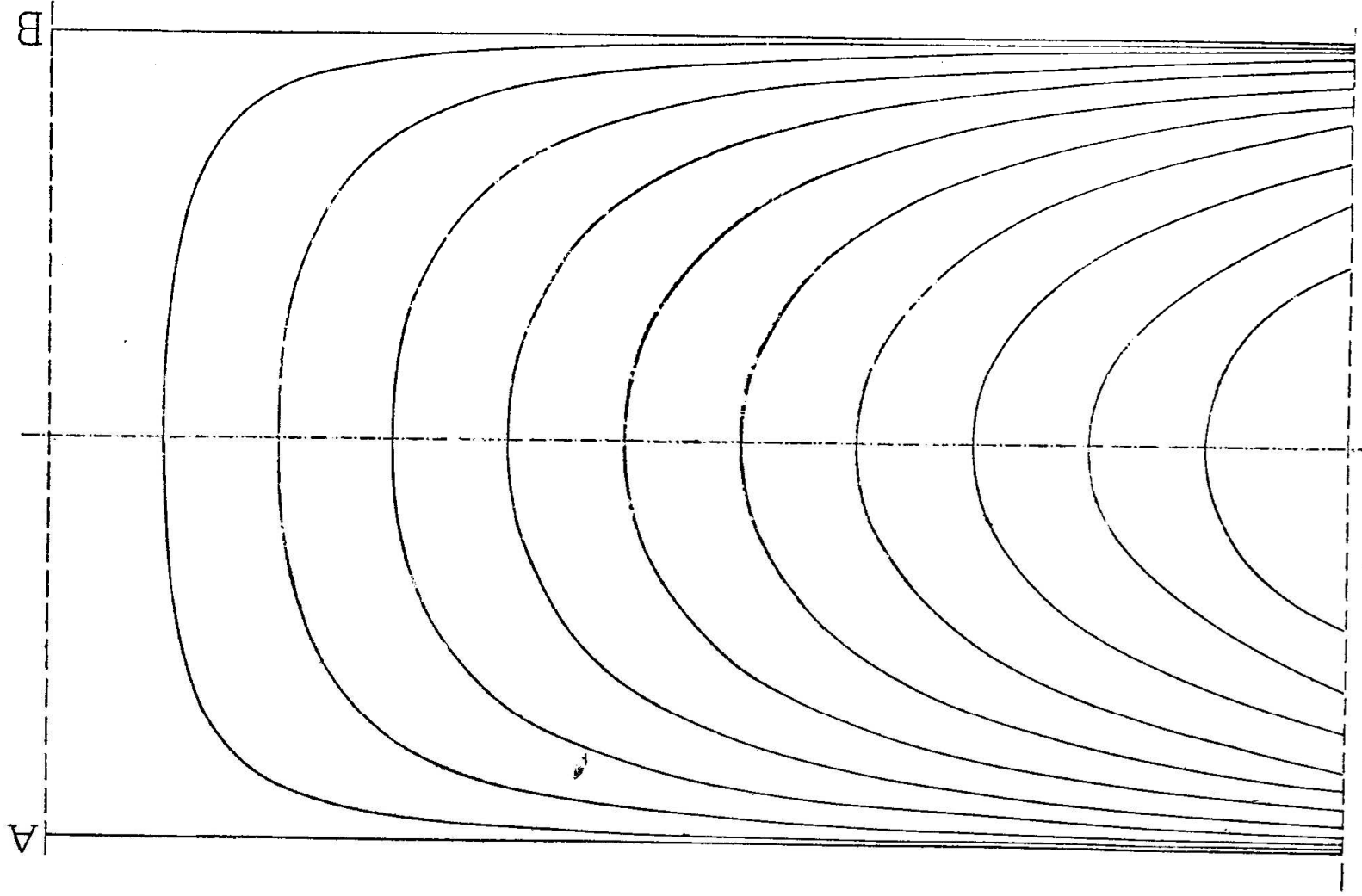


Fig. 68

e passando dai logaritmi ai numeri, si ha infine:

$$\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) z^2 = \frac{h^2}{4} z_0^2 = \text{costante} \quad (427)$$

Le varie curve, corrispondenti ognuna ad un valore di z_0 , sono tutte tra loro affini con asse di affinità sull'asse y .

Nella fig. 68 si sono tracciate alcune di tali curve, per valori di z_0 in progressione aritmetica.

Passiamo ora a considerare un altro caso particolare:

Cilindro a sezione circolare, come a pag. 438.

Per questo caso tracciamo le traiettorie involuppo degli elementi z' , sulla superficie cilindrica esterna, limitandoci per ragioni di simmetria ad uno dei due semicilindri simmetrici rispetto al piano di sollecitazione yz .

Con le notazioni usate ed i valori riportati già a pag. 442, l'equazione differenziale (426), per questo caso diviene:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{r}{\zeta} \cotg \frac{\eta}{r}$$

da cui, separando le variabili:

$$\text{tang} \frac{\eta}{r} \cdot d\left(\frac{\eta}{r}\right) = \frac{m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ed integrando:

$$-\log \cos \frac{\eta}{r} = \frac{m+2}{2(m+1)} \log \frac{\zeta}{\zeta_0}$$

(essendo $\zeta = \zeta_0$ per $\eta = 0$, e notando che sotto log si può sopprimere il simbolo | di *modulo*, perchè nel semicilindro sviluppato $\cos \frac{\eta}{r}$ non è mai negativo e d'altra parte ζ e ζ_0 dovranno avere lo stesso segno);

e passando poi dai logaritmi ai numeri, si ha infine:

$$\cos \frac{\eta}{r} \cdot \zeta^{\frac{m+2}{2(m+1)}} = \zeta_0^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \quad (428)$$

Anche queste curve sono tutte affini con asse d'affinità sull'asse η .

Nella fig. 69 si tracciarono alcune di tali curve, corrispondenti a valori di ζ_0 in progressione aritmetica; esse s'intendono descritte sullo sviluppo nel piano $\eta \zeta$ di uno dei due semicilindri sopra definiti. — Si può poi immaginare di riavviluppare il piano $\eta \zeta$ sul semicilindro originario e di proiettare ortogonalmente sul piano yz le dette traiettorie. Queste curve proiezioni si possono dedurre direttamente dalla rispettiva equazione differenziale, la quale per ovvie considerazioni geometriche risulta espressa come segue:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2 \tau_{yz}}{\sigma_z} \tag{429}$$

o con i valori ben noti di τ_{yz} e σ_z sul contorno della sezione circolare [cfr. (325) a pag. 337] si ha:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{r^2 - y^2}{yz};$$

separando le variabili, si trova:

$$-\frac{d(r^2 - y^2)}{r^2 - y^2} = \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{dz}{z};$$

integrando, e ponendo al solito che per $y=0$ sia $z=z_0$, si ottiene:

$$\log \frac{r^2 - y^2}{r^2} = \frac{m+2}{m+1} \log \frac{z_0}{z}$$

(ricordiamo che z e z_0 dovranno avere lo stesso segno); e passando dai logaritmi ai numeri, si ha infine:

$$(r^2 - y^2) z^{\frac{m+2}{m+1}} = r^2 z_0^{\frac{m+2}{m+1}} \tag{430}$$

Si ottiene così anche qui una famiglia di curve tutte tra loro affini, con asse di affinità sull'asse y .

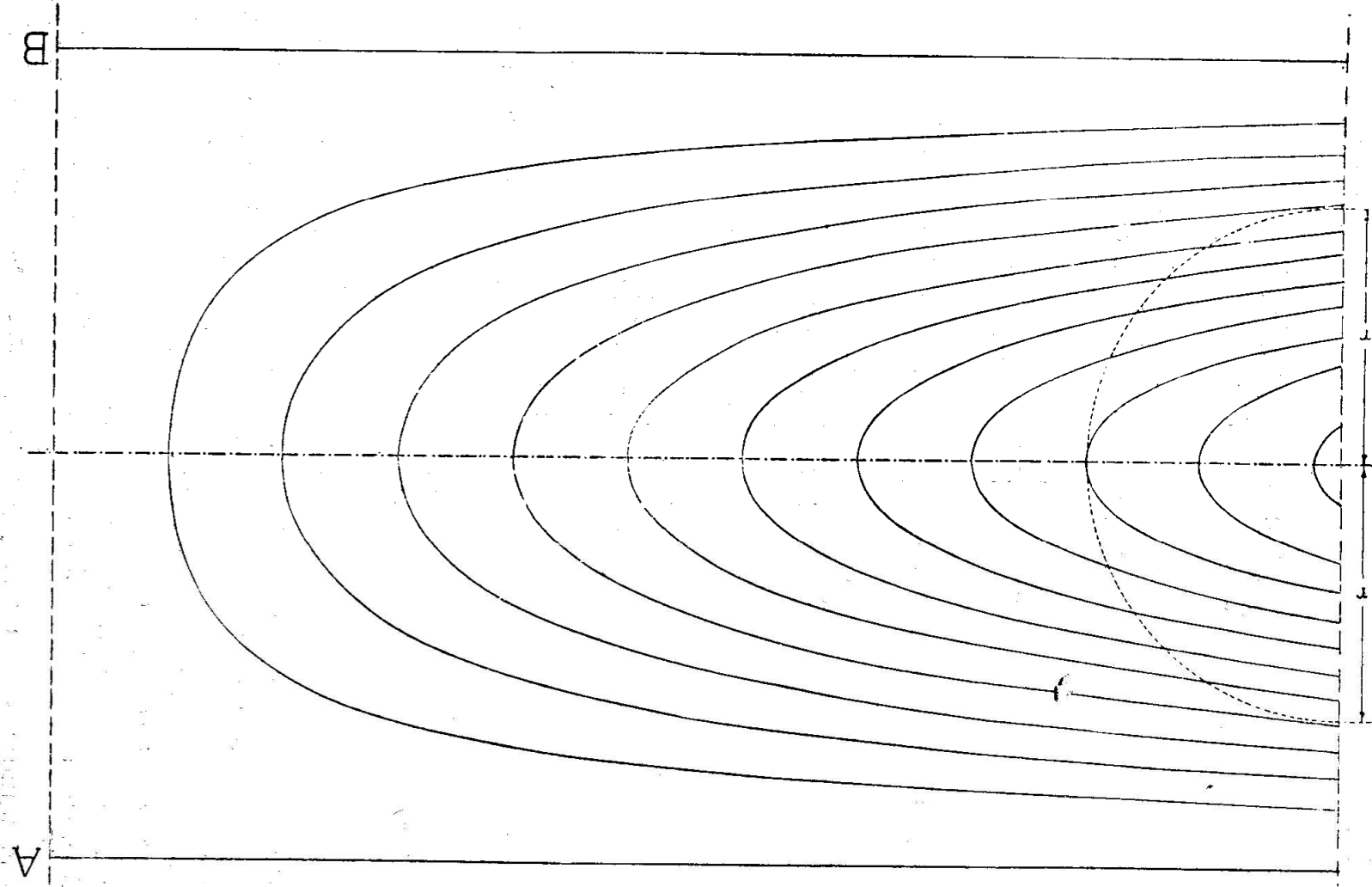


Fig. 69

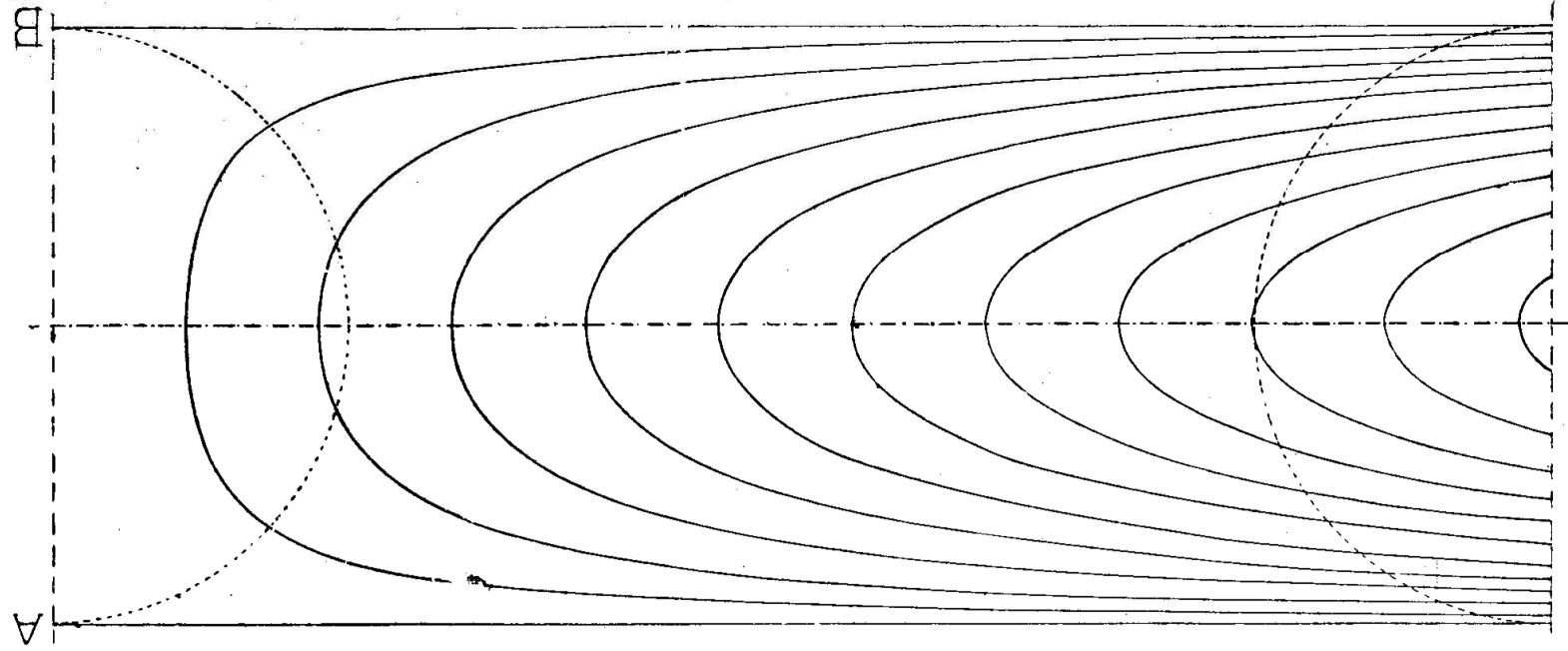


Fig. 70

Nella fig. 70 si sono tracciate alcune di tali curve, corrispondenti a valori di $z_0 = \zeta_0$ uguali a quelli delle curve (428) disegnate nella precedente fig. 69.

Con ciò, per due casi più comuni nelle applicazioni, abbiamo dato esempio delle predette traiettorie delle tensioni tangenziali *pure*. Queste traiettorie presentano un certo interesse, particolarmente sotto due punti di vista:

a) — Tali curve, insieme con le parallele z' all'asse z , possono compiere ufficio analogo a quello della famiglia delle isocline rispetto alle isostatiche, in quanto anch'esse permettono di ricavare le isostatiche stesse con tracciamento grafico progressivo.

b) — Esse poi costituiscono le linee secondo le quali il materiale è sollecitato soltanto a scorrimento, od a tensione tangenziale pura.

TENSIONI TANGENZIALI PRINCIPALI (MASSIME) E RELATIVE TRAIETTtorie. — Consideriamo ancora un elemento normale al piano $\eta \zeta$ definito a pag. 432 e richiamato a pag.^e 445-446; la normale n all'elemento sia individuata dai coseni direttori α_1 ed α_2 riferiti agli assi principali 1 e 2. La tensione tangenziale sull'elemento si ottiene proiettando su di esso la relativa tensione totale; essa è quindi:

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \alpha_1 \alpha_2$$

Tra i vari elementi uscenti da uno stesso punto essa diviene massima in valore assoluto quando sia:

$$\alpha_1 = \pm \alpha_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ossia per i due elementi inclinati a 45° sulle due direzioni principali.

Le due rispettive tensioni tangenziali sono uguali a $\pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$ e si chiamano *tensioni tangenziali principali*.

Le relative *traiettorie* si possono tracciare col già descritto procedimento grafico progressivo, in base alle stesse isocline rispetto alle isostatiche, ove però per ciascuna di esse all'angolo α (in gradi) di inclinazione rispetto all'asse z si sostituisca: $\alpha \pm 45^\circ$. — Per brevità omettiamo il tracciamento esemplificativo, il quale è del tutto ovvio, dopo quanto s'è detto qui ed in casi analoghi precedenti.

Queste linee presentano interesse perchè secondo esse possono manifestarsi caratteristiche *lesioni per taglio* nelle zone ove l'azione dello sforzo di taglio prepondera rispetto a quella del momento flettente.