

in corrispondenza di ciascun punto rientrante viene limitata da una brevissima curva di raccordo analoga a quella indicata nell'unita fig. 53, in modo che nel contorno *effettivo* della sezione *realtmente reagente* mancano punti angolosi rientranti, e perciò le tensioni tangenziali assumono ovunque valori finiti. Di questo fatto si può tenere opportunamente conto nel tracciamento approssimato delle traiettorie delle τ_x , le quali con una conveniente applicazione del teorema della divergenza, ci possono fornire, come sappiamo, la distribuzione delle stesse τ_x .

E qui torna acconcio ricordare ciò che si espone al N.º 42, nelle "osservazioni sulle deformazioni anelastiche", e particolarmente ciò ch'è esposto a pag. 151 e seg.^{vi}, a proposito di deformazioni anelastiche (dovute a tensioni oltrepassanti i limiti di elasticità) atte a provocare coazioni elastiche.

Come negli esempi là riferiti, anche nel caso qui considerato, le deformazioni anelastiche permanenti provocate *nelle zone snervate* (fig. 53), producono una coazione elastica, che permane anche al cessare delle forze esterne.

La determinazione delle tensioni dovute a questa coazione elastica non sarebbe difficile, secondo le direttive esposte ai N.º 41 e 42; ma poichè essa esorbita dalla natura e dai fini tecnici di questo libro, dobbiamo qui ritenere di aver esaurito l'argomento, coll'avere dato ragione dell'esistenza della coazione sopradetta.

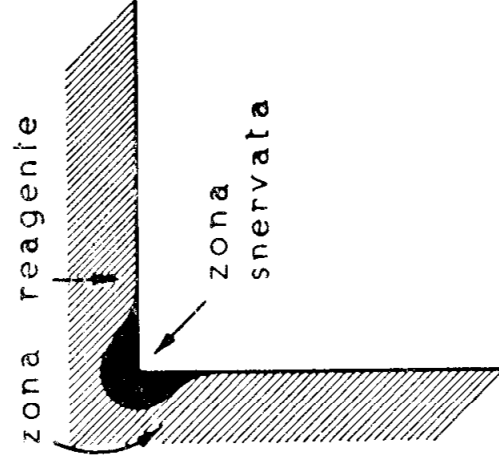


Fig. 53.

56. TRATTAZIONE APPROSSIMATA DEL CASO DI FLESSIONE, TAGLIO E TORSIONE SIMULTANEE.

In principio del N.º 54 assunto come origine il baricentro della sezione, e descritta colle (299) la deformazione denominata *flessione composta*, abbiamo trovato colle (306), che ad essa corrispondono sollecitazioni simultanee di flessione, taglio e torsione, e che i valori delle tensioni dovute alle due ultime dipendono dalla funzione Ψ , definita dalle (300), (301), (302).

Dall'esposizione di tali calcoli risulta che l'ipotesi dell'origine coincidente col baricentro non è ivi utilizzata; essa perciò può essere

rimossa (analoga a ciò che fu fatto in principio del N.° 52, studiando la "tensione o pressione e flessione").

Perchè sia soddisfatta la prima delle (306) $N_2 = 0$, occorre soltanto che l'asse x (neutro) sia baricentrico. Perciò, scelto comunque l'origine O , ed assunta come asse delle x la congiungente di O col baricentro G della sezione, i calcoli basati sulle formole ora citate restano validi, e mediante le (306) ci definiscono come sollecitazione esterna una forza unica giacente nel piano della base libera del prisma, in posizione affatto generica, dipendente però dalla posizione dell'origine O .

Resta così definita una sollecitazione generica di "flessione composta", (flessione, taglio e torsione).

Il procedimento a posteriori qui seguito non è facilmente invertibile; cioè non è agevole, senza numerosi e laboriosi tentativi (accompiati ove occorra, da processi grafici di falsa posizione), trovare l'origine O ; (cioè il punto dove deve essere $\Psi = 0$), quando sia data, giacente nel piano della base libera, la forza unica costituente la sollecitazione esterna.

Il calcolo diretto di questo caso di sollecitazione composta, cioè la determinazione delle tensioni e delle deformazioni, data la forza esterna giacente nel piano della base libera del prisma si presenta invece agevole se applichiamo il principio della sovrapposizione degli effetti; valutando separatamente l'azione del taglio semplice (forza data, trasportata a passare per il centro di taglio della sezione, vedi pag. 367) e della torsione semplice (momento dovuto al trasporto ora detto), e poi sommando algebricamente le rispettive componenti di tensione che di deformazione.

Ciò evidentemente si deve anche fare se si applica per il taglio semplice la trattazione approssimata esposta al N. 55, e se per la torsione semplice si seguono i criteri approssimati basati sulle analogie idrodinamiche esposti a pag. 311 e seguenti.

Questi concetti verranno ulteriormente sviluppati e precisati, in relazione con la trattazione rigorosa, nella *Appendice* in fine del volume.

57. ALTRI CASI DI SOLLECITAZIONE COMPOSTA.

Nei trattati di questa disciplina si suole considerare come sollecitazioni semplici quelle di trazione o compressione, (sforzo normale), di flessione, di torsione e di taglio semplice, e quindi considerare come sollecitazioni composte quelle che risultano dalla sovrapposizione delle sollecitazioni semplici combinate due a due o tre a tre

in tutti i modi possibili, ovvero di tutte e quattro contemporaneamente.

Noi però già abbiamo visto che lo sforzo normale e la flessione semplice sovrapposti danno luogo allo sforzo normale eccentrico, che si può considerare come un caso particolare semplice del problema di De Saint-Venant (v. N.º 52, pag. 241 e seguenti), inoltre il taglio non è mai separato dalla flessione, se non in una sezione isolata, mentre d'altra parte l'ultimo caso particolare semplice del citato problema, trattato al N.º 54, cumula i così detti casi semplici di flessione, taglio e torsione.

Da ciò si deduce che l'usuale distinzione delle sollecitazioni semplici e di quelle composte è in gran parte artificiosa e superflua.

Inoltre sono già stati da noi esplicitamente trattati tra i "semplici", taluni di quei casi che di solito si considerano come "composti",.

Ulteriori considerazioni utili ai fini della valutazione degli effetti di più sollecitazioni simultanee sono le seguenti:

a) — Sforzo normale e flessione, da soli o combinati provocano solo *tensioni normali* σ_z , che si devono sommare algebricamente;

b) — Torsione e taglio *semplice* provocano solo tensioni tangenziali τ_z , che pure si devono sommare, ma però *geometricamente* nel caso dell'azione simultanea studiata nel precedente N.º 56.

c) — Quando sulla sezione trasversale del prisma si hanno simultaneamente la tensione normale σ_z e la tensione tangenziale τ_z , per verificare ed assicurare la stabilità del materiale occorre esclusivamente applicare i criteri esposti e spiegati nel N.º 47, al sottotitolo "*Dilatazioni principali — Equazione di stabilità*",.

Perciò noi ora non dobbiamo che rimandare il lettore a quanto colà è esposto, e ci limitiamo qui a specificare le modalità dell'applicazione di quei criteri, unicamente per stabilire in quali punti della sezione è opportuno o necessario fare la verifica di stabilità mediante la relativa equazione; passeremo poi a segnalare alcune semplificazioni, che si presentano in qualche caso particolare.

RICERCA DELLE TENSIONI IDEALI MASSIME IN UNA DATA SEZIONE OVE ESISTONO SIMULTANEAMENTE σ_z E τ_z .

Evidentemente per assicurare la stabilità occorre verificare che il carico di sicurezza del materiale non sia superato dal valore massimo tra quelli assunti dalle tensioni ideali nei vari punti della sezione. Si dovrà pure tenere conto del segno di queste tensioni ideali, se il materiale presenta due diversi carichi di sicurezza a trazione ed a compressione; se invece il carico di sicurezza è unico, in ogni

punto si dovrà considerare il maggiore tra i valori assoluti delle due tensioni ideali Ee_1 ed Ee_2 (v. pag. 207 e 208).

Convorrà cercare dapprima i valori massimi tra quelli assunti dalle tensioni ideali nei punti di una data corda parallela all'asse neutro, cioè per un dato valore di y ; e poichè in tali punti la σ_z assume un sol valore — funzione della sola y , e perciò costante quando si tenga fisso y , — le tensioni ideali sono massime tra quelle dei punti della corda là ove assume valori massimi la τ_z [v. (181) a pag. 207]. Se conosciamo le distribuzioni delle τ_z dovute al taglio ed alla torsione si possono tali tensioni comporre geometricamente punto per punto, e cercare i valori massimi della τ_z risultante nei vari punti della data corda: la ricerca potrà essere agevolata dal tracciamento di un apposito diagramma.

Trovati dunque i valori massimi della τ_z totale lungo la data corda, mediante la citata (181), si potranno ricavare i valori delle Ee_1 ed Ee_2 massimi (in valore assoluto) lungo la stessa corda.

Analogamente si potrà fare per tutte le varie corde, cioè per vari valori di y , esprimendo, analiticamente o graficamente a mezzo di diagramma, detti valori massimi in funzione di y .

Si potranno così cercare i massimi dei valori che questa funzione assume al variare di y ; e pure qui la ricerca potrà essere agevolata dal relativo diagramma. I valori così trovati saranno i massimi tra quelli assunti dalle tensioni ideali nei vari punti della sezione, e perciò appunto saranno quelli che si devono paragonare (uguagliare) ai rispettivi carichi di sicurezza.

Per molte forme di sezione, frequentissime nella pratica, usando per il taglio la trattazione approssimata, la ricerca ora esposta si semplifica notevolmente poichè, i valori massimi tra quelli assunti lungo una corda generica $y = \text{cost.}$ dalla τ_z dovuta alla torsione, si verificano proprio agli estremi della corda stessa (sul contorno) e quindi, per note ed ovvie ragioni, negli stessi punti si hanno i massimi della τ_z totale per il dato valore di y ; perciò resta eliminata la relativa ricerca di tali massimi: i loro valori si troveranno semplicemente calcolando colle note formole le τ_z dovute al taglio ed alla torsione e poi sommando *algebricamente* (essendo entrambe tangenti al contorno).

Possiamo ora precisare le modalità geometriche della sezione, in conseguenza delle quali è verificata la condizione posta a base della semplificazione ora descritta; (per maggior chiarezza ripetiamo: per $y = \text{cost.}$, per torsione, τ_z massima sul contorno).

Dalla teoria della torsione sappiamo che la τ_z ad essa dovuta, diminuisce se si procede dal contorno verso l'interno della sezione lungo una traiettoria ortogonale alle linee di flusso τ_z (traiettorie

delle τ_z). — (Ciò è in armonia pure col teorema di Stokes, applicato alle analogie idrodinamiche; v.).

Inoltre lungo una sua traiettoria (o linea di flusso) la τ_z è inversamente proporzionale allo spessore di una striscia elementare di flusso compresa tra due traiettorie consecutive.

Perciò, considerata per un estremo P della data corda c per $y = \text{cost}$, la traiettoria ortogonale t delle linee di flusso, se in vicinanza di P , partendo dalla t e procedendo verso la c , gli spessori delle striscie di flusso *non* vanno diminuendo (e perciò le τ_z *non* vanno aumentando), allora la τ_z (dovuta alla torsione) in punti della corda c *interni* prossimi a P sono certamente più piccoli dell' analogo valore assunto in P , e perciò in questo punto si verifica uno dei massimi di τ_z (torsione) lungo la corda c , ed allora è *certo* soddisfatta la *condizione semplificativa* sopradetta.

Se invece lungo le linee di flusso delle τ_z la legge incrementale dello spessore delle striscie di flusso è opposta a quella ora detta, allora può la τ_z , in punti di c interni alla sezione, essere maggiore che in P , e perciò *la condizione semplificativa può non essere soddisfatta*: non possiamo però affermare ch' essa *debba* necessariamente non essere verificata).

Citiamo a titolo di esempio e di chiarimento: la *condizione semplificativa* è soddisfatta nel caso della sezione circolare, a corona circolare o nella sezione cava a contorni paralleli (spessore costante), poichè in tal caso lo spessore delle striscie di flusso si mantiene costante, come sappiamo.

In una sezione ellittica piena o cava, sollecitata in modo che l'asse neutro coincida (o quasi) con l'asse minore, la *condizione semplificativa* è soddisfatta a *fortiori*.

Invece se la stessa sezione ellittica (piena o cava) è sollecitata in modo che l'asse neutro coincida (o quasi) coll'asse maggiore, la condizione semplificativa *potrà* non essere soddisfatta, e la probabilità di questo fatto *negativo* è tanto più grande quanto più la sezione è "allungata", nella direzione dell'asse neutro, e quando più è distante da questo asse la corda c considerata.

Analoghe affermazioni possiamo fare (qualitativamente) su sezioni (piene o cave) di forma analoga a quelle ora citate.

Richiamiamo l'attenzione del lettore sulla utilità di avere — come abbiamo — stabilito un criterio — certo — per concludere *a priori* quando la *condizione semplificativa* è senza dubbio soddisfatta.

Il risparmio di lavoro consentito dalla semplificazione suddetta è certo notevolissimo: poichè la ricerca è ridotta ad un solo pro-

blema di massimo di funzione ad una sola variabile (y), (con tracciamento eventuale di un sol diagramma), escludendo la ricerca dei τ_z *max* per $y = \text{cost}$, (con tracciamento di un diagramma lungo ciascuna corda per ognuno dei valori di y considerati).

È ovvio che quando si proceda graficamente mediante diagrammi, torna comodo costruire pure graficamente (secondo il teorema di Pitagora) il radicale che compare nella (181) [v. pag 207].

Anzi in tal caso può essere opportuno ricavare prima le tensioni principali σ_1 e σ_2 secondo la (169) [pag. 202], e poi le tensioni ideali $E\sigma_1$ ed $E\sigma_2$ mediante le prime due delle (180) [pag. 207].

Vogliamo dare qualche esempio concreto di questa ricerca delle tensioni ideali massime, condotta graficamente, in casi in cui la “ *condizione semplificativa* ”, è certo soddisfatta.

A tale scopo scegliamo la sezione rettangolare soggetta solo a flessione e taglio; poi la sezione circolare soggetta a flessione, taglio e torsione: le relative ricerche grafiche sono rispettivamente tracciate nelle figure 54 e 55, *a*) e *b*) opportunamente dilucidate dalle scritte indicative apposte ai vari diagrammi.

In esse figure, a partire dall'asse Oy , traccia del piano della sezione trasversale, sono state portate come ordinate, nel senso dell'asse z , i valori delle varie tensioni che compaiono nelle formule citate, e si otterranno così i vari diagrammi: a tratto pieno sottile sono segnati quelli delle σ_z (rettilineo) e delle τ_z ; punteggiati sono segnati i diagrammi delle tensioni principali σ_1 e σ_2 ; a tratto pieno marcato quelli delle tensioni ideali $E\sigma_1$ ed $E\sigma_2$; è pure accennata punteggiata la costruzione grafica sopradescritta per le σ_1 , σ_2 .

Dalle rispettive espressioni analitiche, omesse per brevità, risulta che i diagrammi qui considerati sono linee del 4.º ordine.

Si vede poi in modo ovvio che la figura costituita complessivamente dai diagrammi delle σ_1 e σ_2 ammette come assi di simmetria obliqua tra loro coniugati l'asse z e la retta-diagramma delle $\frac{\sigma_z}{2}$; così pure la figura comprendente nel complesso i due diagrammi delle $E\sigma_1$ ed $E\sigma_2$ ammette come assi di simmetria tra loro coniugati l'asse z e la retta diagramma delle $\frac{m-1}{2m} \sigma_z$: (questi assi di simmetria sono in figura segnati a tratti e punti).

In conseguenza ciascuna delle due configurazioni (σ_1 , σ_2) ed ($E\sigma_1$, $E\sigma_2$) risulta pure simmetrica rispetto all'origine O .

Nelle figure 54 e 55 si assume $m=4$.

Per il caso della figura 54 (sezione rettangolare) da ovvie con-

siderazioni differenziali risulta che nei punti più lontani dall'asse z (per $y = \pm \frac{h}{2}$) i vari diagrammi delle σ_1 , σ_2 , $E\varepsilon_1$, $E\varepsilon_2$ hanno le tangenti concorrenti nell'origine O .

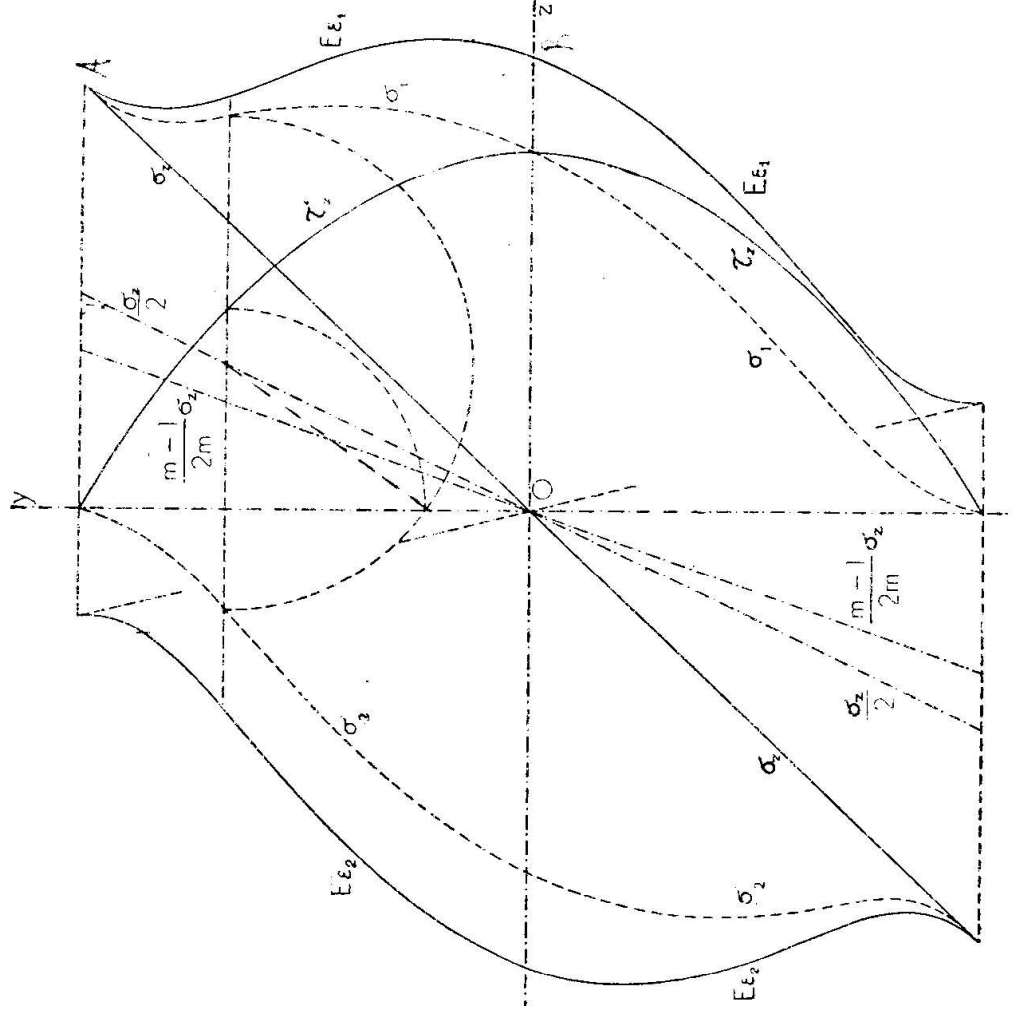


Fig. 54

La fig. 55, dedicata alla sezione circolare soggetta a flessione, taglio e torsione, è divisa in due parti *a*) e *b*) comprendenti i sopra descritti diagrammi per le due semicirconferenze, in cui il contorno viene separato dall'asse di sollecitazione; nel caso *a*) le tensioni tangenziali periferiche dovute alla torsione ed al taglio si sommano avendo lo stesso verso; nel caso *b*) le stesse tensioni hanno versi opposti e si sottraggono. Il diagramma delle τ_z dovute al taglio sul contorno circolare (riferito alle ascisse y) è una semi-ellisse, come risulta dalla (344); le sue ordinate sono sommate in *a*) e sottratte

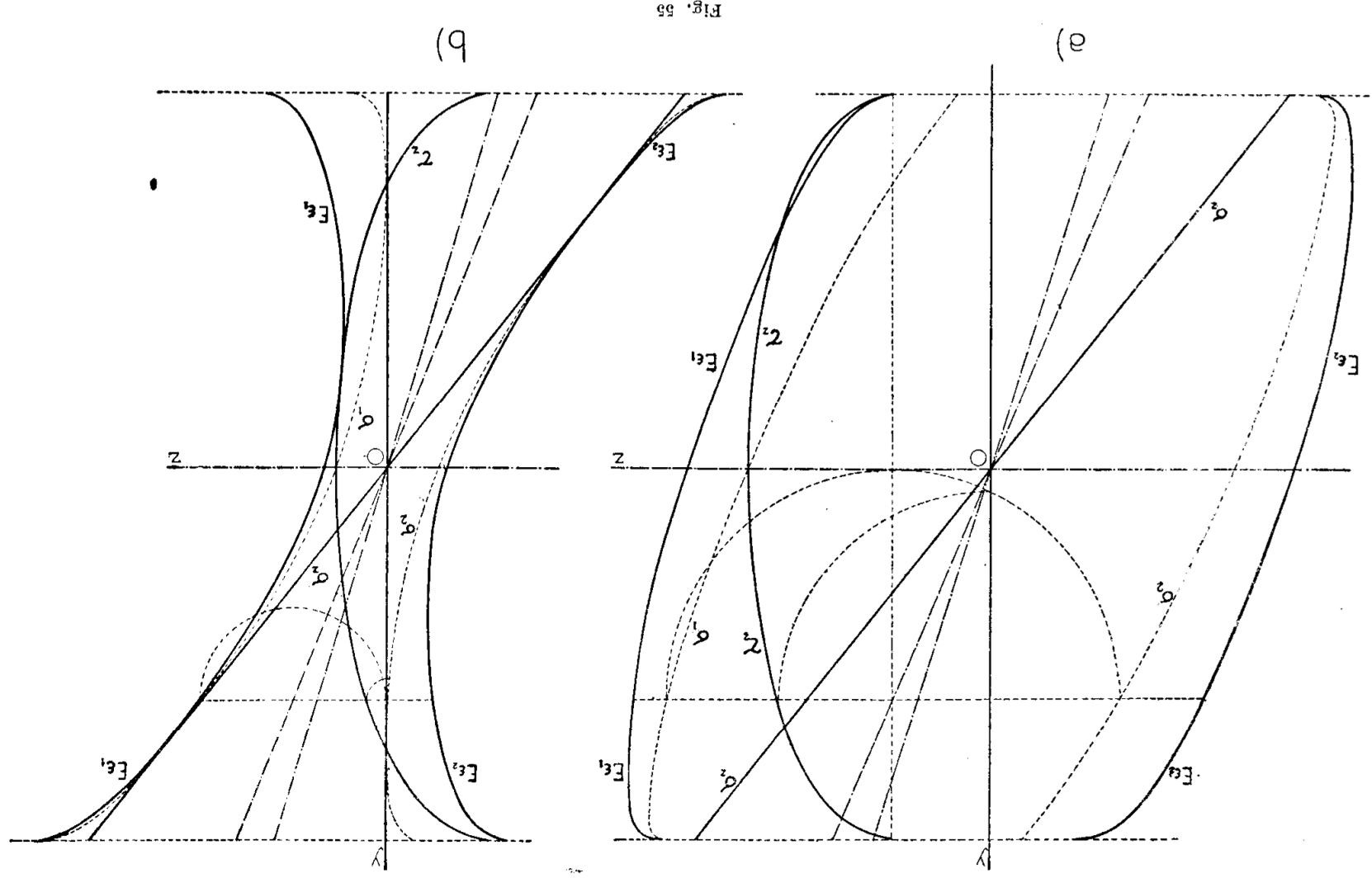


Fig. 55

in *b*) col valore costante (pure al contorno) della τ_z dovuta alla torsione.

Da ovvie considerazioni differenziali, (analoghe a quelle accennate per la fig. 54), risulta che in *a*) come in *b*) i diagrammi $\sigma_1, \sigma_2, E\varepsilon_1, E\varepsilon_2$, nei punti più lontani dall'asse z , per $y = \pm r$ hanno le tangenti parallele all'asse z ; mentre che nel caso *b*) in corrispondenza dei punti ov'è nulla la tensione totale τ_z gli stessi diagrammi hanno le tangenti concorrenti nell'origine O . Data la forma dei diagrammi delle tensioni ideali risultanti nei due casi *a*) e *b*), consegue che ai fini della ricerca delle tensioni ideali numericamente massime, per la verifica della stabilità, interessa esclusivamente il caso *a*), — ove gli effetti del taglio e della torsione sono concordanti, — e solo per questo caso è necessario il tracciamento dei diagrammi delle $E\varepsilon_1$ ed $E\varepsilon_2$; perciò il caso *b*) ha per noi soltanto un'utilità dimostrativa e didattica. — Dai diagrammi del caso *a*) risulta poi che le tensioni ideali massime sono sempre maggiori dei valori che le $E\varepsilon_1$ ed $E\varepsilon_2$ assumono per $y = \pm r$, e ciò comunque grandi siano le σ_z in confronto delle τ_z : cioè: *data la presenza della torsione non è mai rigorosamente ammissibile verificare la stabilità della sezione in base solo alla flessione ed alla torsione, escludendo il taglio.*

E' interessante vedere come può succedere l'opposto per flessione e taglio, senza torsione.

A tale scopo nella figura 56, ripresa in considerazione la sezione rettangolare già trattata nella fig. 54, si tracciarono, limitatamente al quadrante $+z, +y$, vari diagrammi delle $E\varepsilon_1$, tenendo fissi i valori delle τ_z (ed in particolare del massimo tra questi, τ_{zm}), e facendo invece variare il diagramma delle σ_z , (ed in particolare il valore massimo di esse, σ_{zm} , per $y = \frac{h}{2}$).

Per ciascuno di questi diagrammi si misurò l'ordinata massima geometrica (caratteriz-

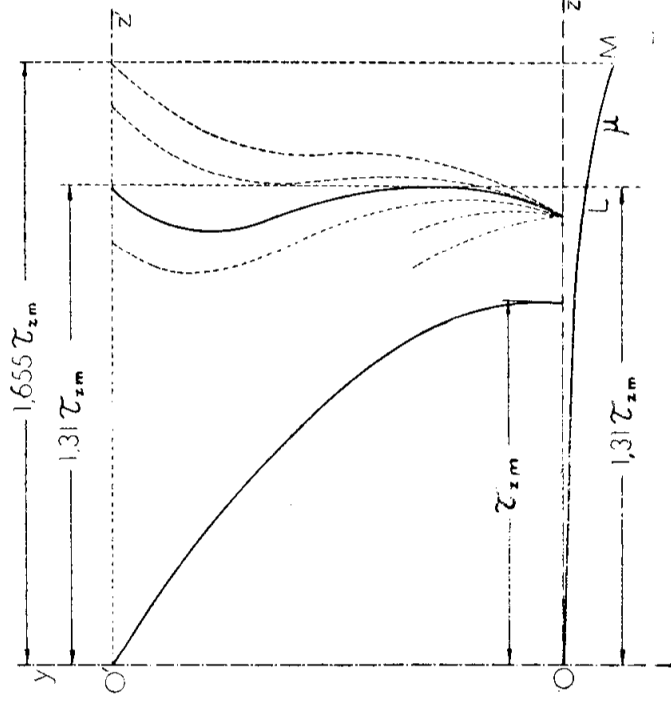


Fig. 56

zata dalla tangente parallela all'asse y): le varie ordinate massime $E\varepsilon_{1,m}$ si portarono verticalmente in basso, a partire dall'asse z' (generatrice superiore del cilindro; v. fig. 56), in corrispondenza dei punti estremi dei rispettivi diagrammi, aventi per ascisse le $\sigma_{z,m}$: si ottenne così la linea μ in funzione delle $\sigma_{z,m}$.

Essa linea resta definita fino al punto M , corrispondente all'ascissa $\sigma_{z,m} = 1,655 \tau_{z,m}$, per la quale il relativo diagramma $E\varepsilon_1$, presenta una tangente di flesso parallela all'asse y : per valori di $\sigma_{z,m}$ maggiori di questo, il diagramma $E\varepsilon_1$, non ha massimi geometrici, e perciò la linea μ non è definita.

Su questa linea si determinò poi il punto L avente l'ordinata $E\varepsilon_{1,m}$ uguale all'ascissa $\sigma_{z,m}$: il valore di questa si trovò: $\sigma_{z,m0} = 1,31 \tau_{z,m}$: per valori di $\sigma_{z,m}$ maggiori di questo valore limite la verifica di stabilità della sezione deve esser fatta in base alla sola flessione; solo per valori di $\sigma_{z,m}$ minori del valore limite, per scrivere l'equazione di stabilità occorre ricercare la tensione ideale massima.

Questo valore limite definisce un rapporto tra il momento flettente e lo sforzo di taglio, (rapporto limite).

Infatti, com'è noto, per la sezione rettangolare si ha:

$$\sigma_{z,m} = \frac{6M}{bh^2}$$

e

$$\tau_{z,m} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

Per il suddetto valore limite dovrà essere:

$$\frac{6M}{bh^2} = 1,31 \cdot \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

da cui risulta:

$$\frac{M}{T} = 0,3275 h = z_0$$

Il rapporto $z_0 = \frac{M}{T}$, (che è una lunghezza), si può interpretare come il braccio di leva (ideale) con cui deve agire lo sforzo di taglio T per produrre nella data sezione il momento flettente M .

Perciò il risultato ora ottenuto si può enunciare dicendo che per la sezione rettangolare (di altezza h) la ricerca rigorosa delle tensioni ideali massime è necessaria solo se il braccio ideale della sezione è

minore del valore limite $z_0 = 0,3275 h$; mentre invece quando il braccio ideale è maggiore di z_0 , l'equazione di stabilità si deve esprimere in base alla sola flessione.

Facciamo ora analoga ricerca per la sezione circolare soggetta a flessione e taglio, (trattazione approssimata).

I relativi diagrammi sono tracciati nella figura 57.

Per semplicità delle formole che ora dovremo scrivere, possiamo

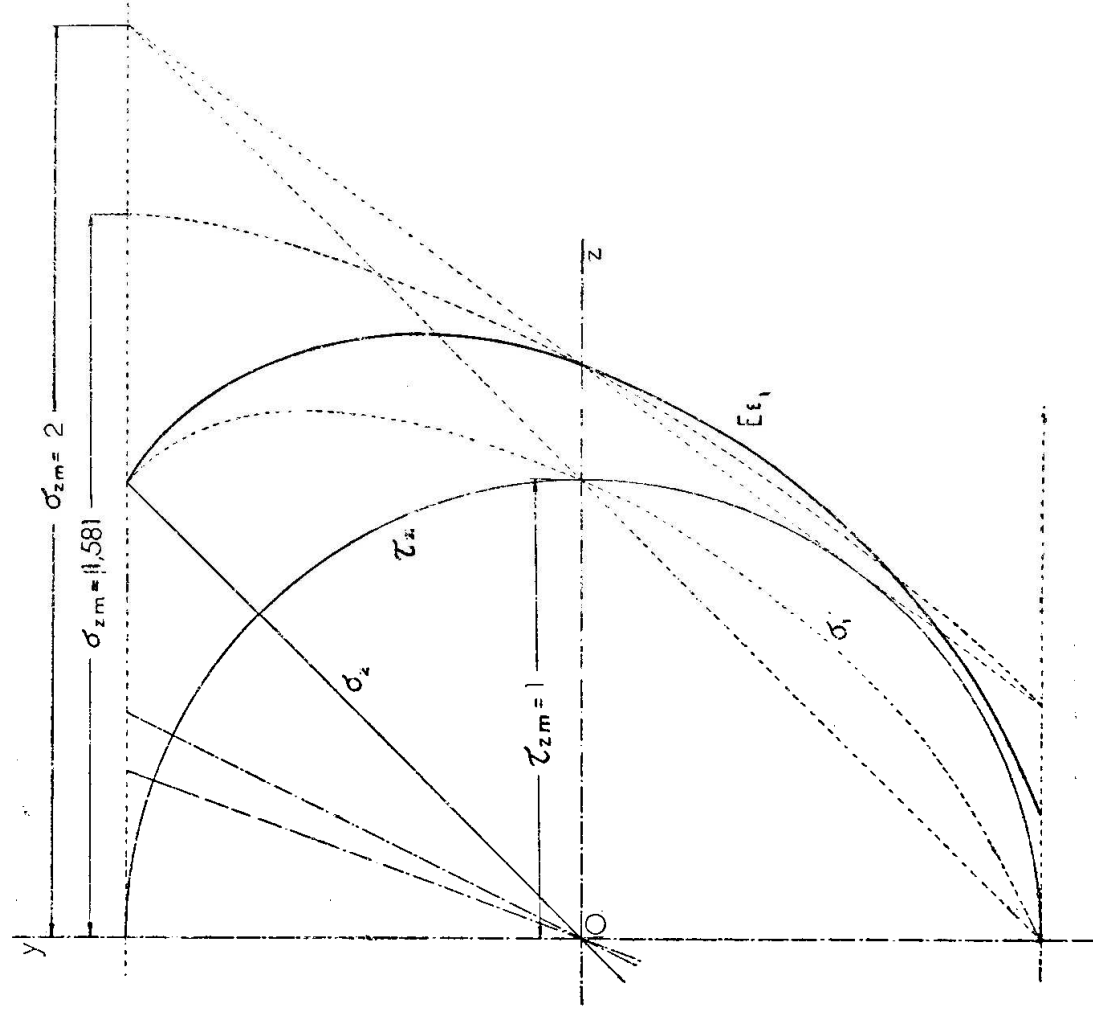


Fig. 57

supporre uguale ad *uno* il raggio della sezione circolare; inoltre ritenere pure eguale ad uno la tensione tangenziale massima τ_{z_m} rappresentandola in diagramma colla stessa unità di lunghezza (p. es. il raggio del cerchio); tali ipotesi non ledono la generalità, poichè

equivalgono ad una conveniente scelta delle scale per le lunghezze e per le tensioni.

Ciò posto, si avrà evidentemente:

$$\sigma_z = \sigma_{z,m} y ; \quad \tau_z = \sqrt{1-y^2}$$

[v. anche le (344)].

Quindi le tensioni principali risultano:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \\ \sigma_2 &= \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_{z,m}}{2} y \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{z,m}^2}{4} - 1\right) y^2 + 1} \quad (379)$$

e le tensioni ideali (che indicheremo con σ_{i1} e σ_{i2}):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i1} &= E\varepsilon_1 = \\ \sigma_{i2} &= E\varepsilon_2 = \end{aligned} \right\} = \frac{m-1}{2m} \sigma_{z,m} y \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_{z,m}^2 - 4) y^2 + 4} \quad (380)$$

Se ne deduce immediatamente che i relativi diagrammi sono coniche con centro comune nell'origine; la $\sigma_{z,m}$ si può considerare come il parametro variabile per ognuna delle due famiglie di coniche.

Rispetto ad esse i diametri coniugati dell'asse z sono rispettivamente le rette delle $\frac{\sigma_z}{2}$ e delle $\frac{m-1}{2m} \sigma_z$, le quali incontrano le rispettive coniche in punti di ordinata:

$$y_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{4 - \sigma_{z,m}^2}} ;$$

ciò può facilitare il tracciamento grafico delle dette coniche.

Esse sono ellissi od iperboli secondo che si ha rispettivamente

$$\sigma_{z,m} \lesseqgtr 2$$

mentre per

$$\sigma_{z,m} = 2$$

quella delle tensioni principali (379) si riduce ad una coppia di rette inclinate di 1:1 sugli assi z ed y , e quella delle tensioni ideali diviene una coppia di rette inclinate di $\frac{m-1}{m}$ sull'asse delle y .

Nella fig. 57, limitatamente alla zona dalla parte delle z positive, son tracciati gli archi di ellisse σ_1 (tratteggiato) e $E\varepsilon_1 = \sigma_{i1}$ (a tratto

pieno), per $\sigma_{zm} = 1$ ed anche le rette — coniche degeneri — ora citate, per $\sigma_{zm} = 2$; al solito si assume $m = 4$.

La ricerca dei massimi geometrici dei valori assoluti delle σ_i intera dunque soltanto per $0 < \sigma_{zm} < 2$, cioè nel caso in cui il diagramma relativo è un arco di ellisse; infatti è chiaro che nel caso dell'iperbole si possono avere solo minimi (pure in valore assoluto).

Dato che i predetti diagrammi sono simmetrici rispetto al centro origine O , i cercati punti di massimo saranno pure simmetrici rispetto ad O ; perciò basterà ricercare solo quello relativo alla σ_{i1} , prendendo perciò nella (380) soltanto il segno +.

L'ordinata y_m di tale punto di massima tensione ideale σ_{i1} si determina colla condizione di annullare la derivata di σ_{i1} rispetto ad y :

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial y} = \frac{m-1}{2m} \sigma_{zm} + \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{(\sigma_{zm}^2 - 4)y}{\sqrt{(\sigma_{zm}^2 - 4)y^2 + 4}} = 0 \quad (381)$$

Questa equazione è di secondo grado, e risolta ci dà:

$$y_m = \pm \frac{(m-1)\sigma_{zm}}{\sqrt{[(m+1)^2 - m\sigma_{zm}^2](4 - \sigma_{zm}^2)}} \quad (382)$$

Evidentemente in corrispondenza del massimo di σ_{i1} , che qui cerchiamo, vale il segno +, mentre il segno — corrisponde all'ordinata del massimo del valore assoluto di σ_{i2} .

(Risulta che y_m è sempre reale nel campo che c'interessa, per $0 < \sigma_{zm} < 2$).

Sostituendo la y_m ora trovata (col segno +) nell'espressione (380) di σ_{i1} , e tenendo presente che, per essere soddisfatta l'equazione precedente, deve essere:

$$\sqrt{(\sigma_{zm}^2 - 4)y_m^2 + 4} = \frac{m+1}{m-1} \times \frac{4 - \sigma_{zm}^2}{\sigma_{zm}} y_m, \quad (382 \text{ bis})$$

con facili trasformazioni si ottiene il cercato valore massimo di σ_{i1}

$$\sigma_{i1m} = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{(m+1)^2 - m\sigma_{zm}^2}{4 - \sigma_{zm}^2}} \quad (383)$$

Si osserverà poi che dalla (382 bis) per $y_m = 1$ si ricava:

$$\sigma_{z_m} = \sqrt{2 \frac{m+1}{m}} \tag{384}$$

e per $m = 4$ si ha $\sigma_{z_m} = 1,581 \sim$.

Dunque per valori di σ_{z_m} maggiori di questo *valore limite* ora determinato si ha $y_m > 1$, e cioè il punto di massimo geometrico di σ_{z_1} cade fuori del campo della sezione; quindi la σ_{z_m} è maggiore di tutti i valori (utili) della σ_{z_1} , e perciò il taglio non ha influenza sulla verifica di stabilità, la quale deve essere fatta in base alla sola flessione.

Calcoliamo ora il valore limite del *braccio ideale* della nostra sezione circolare, analogamente a ciò che si fece per la sezione rettangolare.

Ricordiamo che per il cerchio di raggio r si ha:

$$\sigma_{z_m} = \frac{4M}{\pi r^3} ; \quad \tau_{z_m} = \frac{4T}{3\pi r^2} ;$$

combinando queste due con la (384) e mettendo come sopra $\tau_{z_m} = 1$, si trova il *braccio ideale limite*.

$$z_0 = \frac{M}{T} = \frac{r}{3} \sqrt{2 \frac{m+1}{m}} \left. \vphantom{\frac{M}{T}} \right\} \tag{385}$$

e per $m = 4$.

$$z_0 = \sim 0,527 r$$

La ricerca dei massimi di σ_z interessa dunque solo quando il braccio ideale della sezione è minore del valore limite ora calcolato.

Nella fig. 57 si tracciò a tratti l'arco di ellisse diagramma delle σ_{z_1} per $\sigma_{z_m} = 1,581$ (valor limite); ivi si vede che tale arco per $y = 1$ ha la tangente parallela all'asse y .

Nella fig. 58, limitatamente al quadrante positivo $+z$, $+y$ si riprodusse il diagramma testè descritto, e si tracciarono pure vari altri archi di ellisse diagrammi delle σ_{z_1} , per vari valori di σ_{z_m} minori del valore limite 1,581: per ciascun arco si determinò il punto di massima ordinata, segnato più marcato in disegno; il luogo di tale punto ha per equazioni parametriche le (382) e (383) (parametro σ_{z_m}).

Contando poi le ascisse σ_{z_m} sull'asse $+z'$ (di equazione $y = 1$) e

portando le ordinate $\sigma_{i,1m}$ a partire dall'asse z' , verso le y negative, si costruisce la curva μ , diagramma delle tensioni ideali massime, riferite alle tensioni normali massime σ_{zm} (cfr. per analogia la fig. 56).

Tale curva ha per equazione la (383), dalla quale risulta che la

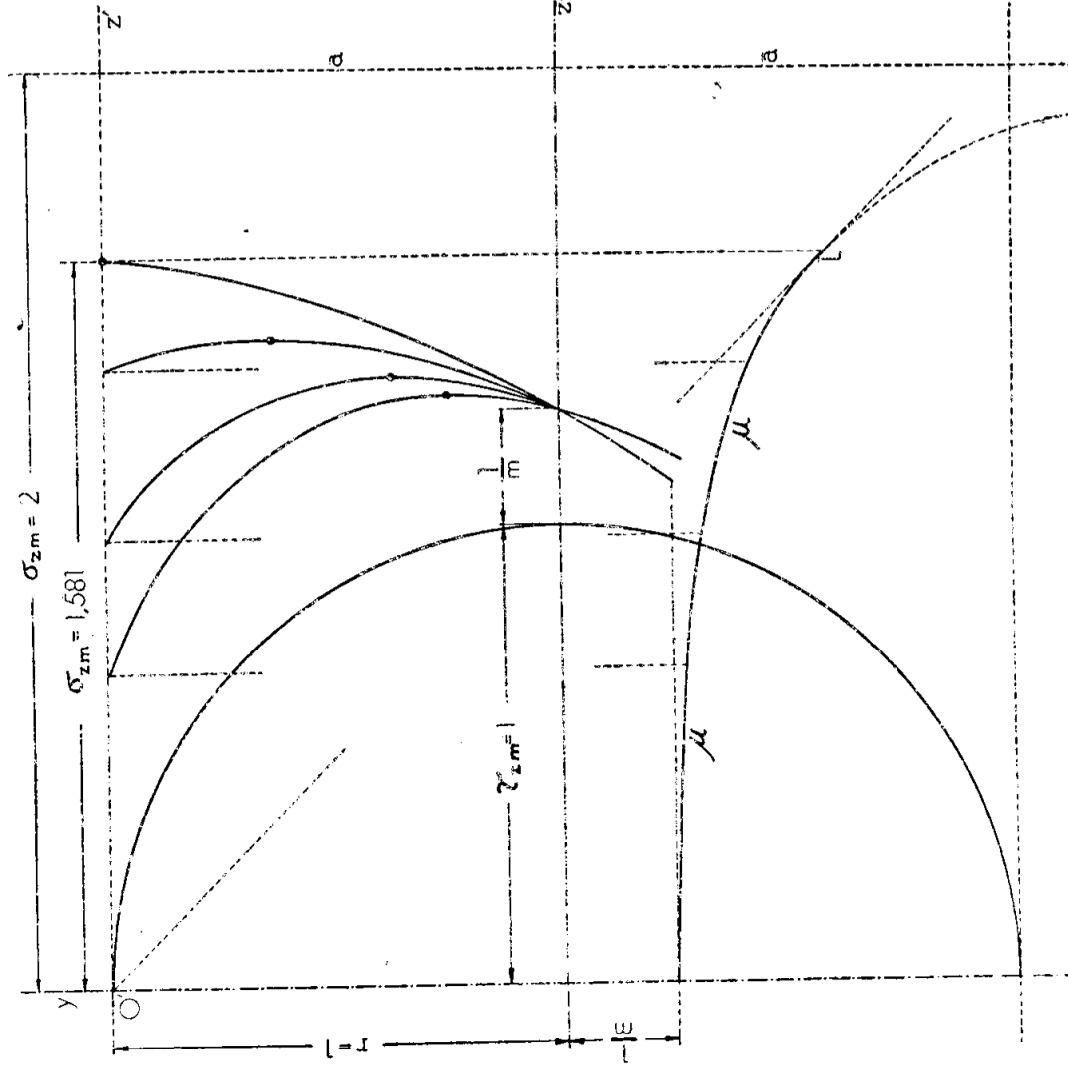


Fig. 56

linea è del quarto ordine, e che ha per asintoto la retta a di equazione $z = 2$. L'arco utile per la nostra ricerca, segnato in figura con un punto marcato, è limitato al tratto $0 \leq \sigma_{zm} \leq 1,581$.

[Nel punto L di ascissa 1,581 (uguale all'ordinata), la tangente alla μ è inclinata di 1:1 e perciò passa per l'origine O' dei nuovi assi z' e $-y'$].

Passiamo ora a calcolare le

TENSIONI IDEALI MASSIME NELLA SEZIONE CIRCOLARE, SOGGETTA A FLESSIONE E TAGLIO, COMPUTATE COLLA TEORIA RIGOROSA.

Per questo dobbiamo far ricorso alle (325) a pag. 337, dalle quali, quadrando e sommando si ottiene per la tensione tangenziale τ_z (in un punto generico), l'espressione:

$$\tau_z^2 = \frac{T^2}{\pi^2 r^6 (m+1)^2} \left\{ (m+2)^2 x^2 y^2 + \frac{1}{4} \left[(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2 \right]^2 \right\} \quad (386)$$

Lungo la corda $y =$ costante la legge di variazione della τ_z col variare di x ha dunque come diagramma una linea del 4.^o ordine.

Per cercare i massimi od i minimi di τ_z^2 (e quindi di τ_z) lungo la corda, occorre uguagliare a zero la derivata rispetto ad x della parentesi $\left\{ \right\}$ nella (386); si trova:

$$2(m+2)^2 y^2 x - [(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2](m-2)x = 0 \quad (387)$$

Questa equazione (in x) è soddisfatta per $x = 0$ e per

$$2(m+2)^2 y^2 - [(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2](m-2) = 0 \quad (388)$$

da cui si ricavano le ascisse degli altri due punti di massimo o minimo,

$$x_m = \pm \sqrt{\frac{3m+2}{m-2} r^2 - \left| \frac{3m+2}{m-2} + 2 \left(\frac{m+2}{m-2} \right)^2 \right| y^2} \quad (389)$$

La derivata seconda (rispetto ad x) della parentesi $\left\{ \right\}$ nella (386) è:

$$2(m+2)^2 y^2 - [(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2](m-2) + 2(m-2)^2 x^2 \quad (390)$$

ossia è uguale al primo membro della (388) aumentato del termine essenzialmente positivo: $2(m-2)^2 x^2$; perciò essa è positiva nei punti di ascissa x_m [date dalla (389)], che soddisfano la (388): dunque tali punti sono *di minimo*, mentre per $x = 0$ si ha un *massimo*.

Per il valore y_* della y che annulla il radicando della (389), dato da:

$$y_* = \pm r \sqrt{\frac{(3m+2)(m-2)}{(3m+2)(m-2) + 2(m+2)^2}} \quad (391)$$

i due punti di minimo vengono a coincidere sull'asse y (di sollecitazione); in tal caso, per $x = 0$ si annulla pure la derivata second-

da (390), ed il diagramma presenta sull'asse y un punto di ondulazione (coincidenza di due flessi) colla tangente parallela all'asse x .

Ciò posto è facile verificare che:

- per $y < y_*$ i due punti di minimo (389) sono reali e distinti, e per $x = 0$ si ha un punto di massimo;
- per $y > y_*$ i due punti determinati dalla (389) sono immaginari mentre si ha un punto di minimo per $x = 0$ (derivata seconda positiva).

Questa discussione serve a verificare che su una corda $y = \text{cost.}$ vi può essere massimo di τ_z solo sull'asse y , e poichè per $y > y_*$ sull'asse y si ha τ_z minimo, ne consegue che per certe corde i valori di τ_z agli estremi (sul contorno) saranno maggiori pure del massimo che si verifici sull'asse, e comunque più grandi tra tutti i valori assunti da τ_z sulla corda rispettiva.

Perciò per avere il massimo assoluto delle τ_z in ciascuna corda bisogna considerare il maggiore tra i valori da esse τ_z assunto sull'asse y , e sul contorno per il corrispondente valore di y .

Le τ_{zc} sul contorno si ottengono dalla (386) ponendo in essa $x^2 = r^2 - y^2$; e con opportune, facili riduzioni si trova:

$$\tau_{zc} = \frac{T(m+2)}{\pi r^3(m+1)} \cdot \sqrt{r^2 - y^2} \quad (392)$$

Il relativo diagramma, al variare di y , è dunque una semiellisse, che si può sempre trasformare in semicerchio, con opportuna scelta della scala delle τ_{zc} , e precisamente assumendo questa in modo che il valore massimo di τ_{zc} , cioè

$$\tau_{zcm} = \frac{T(m+2)}{\pi r^2(m+1)} \quad (392 \text{ bis})$$

sia rappresentato da r .

Le τ_{za} sull'asse di sollecitazione y si ottengono dalla (386), ed anche dalla seconda delle (325), ponendo in esse $x = 0$ e si trova subito:

$$\tau_{za} = \frac{T(3m+2)}{2\pi r^4(m+1)} (r^2 - y^2) \quad (393)$$

Il diagramma relativo, al variare di y è quindi una parabola, avente per asse quello delle $z = \tau_{za}$.

L'ordinata massima τ_{zam} si ha sull'asse stesso, per $y = 0$, e confrontandola con quella τ_{zcm} ricavata dalla (392) pure per $y = 0$, si trova:

$$\frac{\tau_{zam}}{\tau_{zcm}} = \frac{3m+2}{2m+4} \tag{394}$$

Per $m = 2$ questo rapporto diventa $= 1$ e ciò era prevedibile per ciò che si vide a pag. 360 sulla coincidenza per $m = 2$ delle (325) relative alla teoria rigorosa, con le (344) valevoli per la trattazione approssimata. In tal caso la τ_{zc} non è mai minore della τ_{za} .

Per $m > 2$ il rapporto (394) è maggiore di uno; allora la semi-ellisse (392) e la parabola (393), oltre che per $y = \pm r$, si intersecano in altri due punti, ove si ha: $\tau_{zc} = \tau_{za}$; essi sono determinati da $y = y_0$:

$$y_0 = \pm r \frac{\sqrt{5m^2 - 4m - 12}}{3m+2} \tag{395}$$

Allora si ha $\tau_{zc} \geq \tau_{za}$ secondo che è: $y \geq y_0$. Perciò, le τ_z da considerare per la ricerca delle tensioni ideali massime sono le τ_{zc} per $y > y_0$ e le τ_{za} per $y < y_0$.

Il relativo diagramma è segnato nella fig. 59, nella quale si scelse l'unità delle τ_z secondo le (392 bis), assumendo al solito $m = 4$, di modo che il rapporto (394) diviene $= \frac{7}{6}$, si ha $y_0 = \pm r \frac{\sqrt{13}}{7} = \sim 0,5151 r$.

Si noti che per $m = 4$ la (391) fornisce il valore $y_* = \sim 0,52915 r$.

Si disegnarono ivi alcuni diagrammi di tensioni ideali, per vari valori della σ_{zm} , (in particolare quello per $\sigma_{zm} = 1,581 \tau_{zm}$; — cfr. pagina 417 e fig. 58).

Da quanto si espose sopra risulta ovviamente che tra le rette $y = \pm y_0$ l'andamento di tali diagrammi è lo stesso che si avrebbe per la sezione rettangolare con $\tau_{zm} = \tau_{zcm}$; mentre che all'esterno della striscia compresa tra le rette stesse (cioè per y in valore assoluto maggiore di y_0) si ha lo stesso andamento trovato per la trattazione approssimata della sezione circolare, con $\tau_{zm} = \tau_{zcm}$.

Ne consegue immediatamente che per avere l'effettiva linea μ delle tensioni ideali massime in funzione delle σ_{zm} , occorre sovrapporre all'analogha linea μ già tracciata nella fig. 58 per la trattazione approssimata, la linea μ disegnata in fig. 56 per la sezione rettangolare, trasformata però omoteticamente con centro nell'origine O' , tenendo conto che deve assumersi per essa $\tau_{zm} = \tau_{zcm}$, (rapporto di omotetia uguale al rapporto delle frecce delle parabole τ_z e τ_{za} nei

due casi); delle due curve così sovrapposte si deve poi prendere in considerazione, per ogni valore dell'ascissa σ_{zm} , la maggiore delle due ordinate: si ottiene così la curva μ segnata a tratto continuo nella fig. 59; tale linea risulta limitata al punto di ascissa $\sigma_{zm} = 1,581 \cdot \tau_{zcm}$.

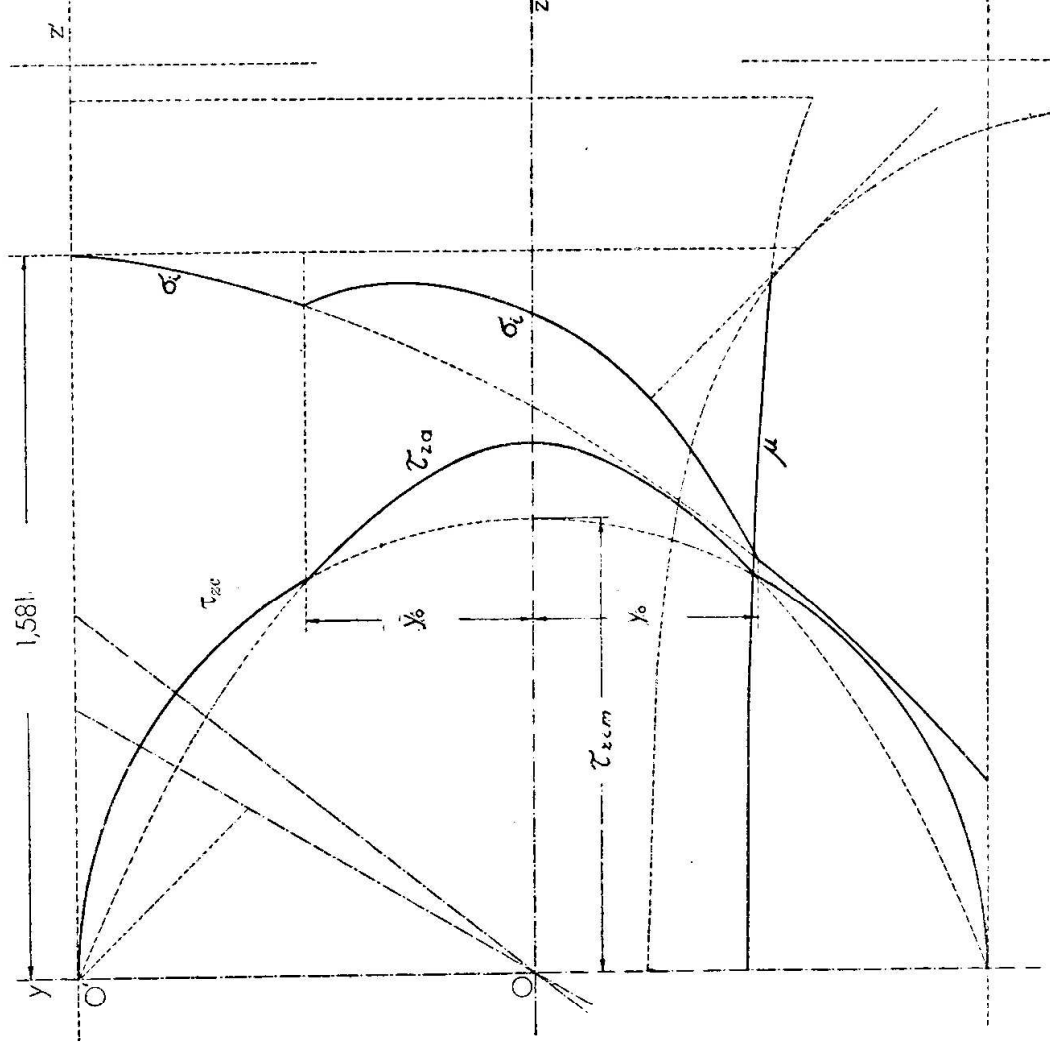


Fig. 59

Dalla figura stessa si scorge che lo scostamento dalla linea μ relativa alla sezione rettangolare è limitato ad un brevissimo tratto in vicinanza del punto terminale ora citato.

Risulta pure che l'incremento relativo dei valori massimi rispetto a quelli calcolati con la trattazione approssimata per $m = 4$ raggiunge $\frac{1}{20} = 5\%$: perciò vale la pena applicare praticamente la teoria rigorosa, che in questo caso è di uso particolarmente agevole.

SEZIONE CIRCOLARE SOGGETTA A FLESSIONE E TORSIONE (SENZA TAGLIO).

In tal caso, ponendo per semplicità, come già più sopra :

$$r = 1 \quad \tau_{zm} = 1$$

ed indicando con τ_{zr} la tensione tangenziale sul contorno, dovuta alla torsione (τ_{zr} costante sul contorno), si ha :

$$\sigma_{t1} = \sigma_t = \frac{m-1}{2m} \sigma_{zm} y \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_{zm}^2 y^2 + 4 \tau_{zr}^2} \quad (396)$$

Il relativo diagramma al variare di y è dunque un arco di circonferenza col centro nell'origine: i suoi asintoti sono dati complessivamente dalla relazione:

$$\sigma_t = \left(\frac{m-1}{2m} \pm \frac{m+1}{2m} \right) \sigma_{zm} y$$

ossia :

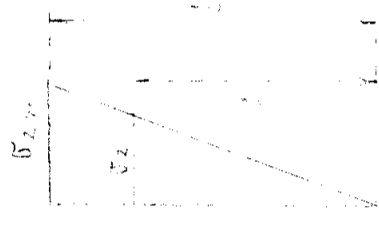
$$\sigma_{t1} = \sigma_{zm} y \quad \text{e} \quad \sigma_{t2} = - \frac{1}{m} \sigma_{zm} y ;$$

essi sono manifestamente sempre reali: perciò il diagramma è sempre un arco di iperbole. Tale arco potrà avere solo dei minimi geometrici (in valore assoluto): perciò le più grandi ordinate, in valore assoluto, si avranno solo nei punti estremi più lontani dall'asse neutro, per $x = \pm r = \pm 1$.

Questo andamento del diagramma è reso visibile nella fig. 60, ove esso è tracciato per un particolare valore di σ_{zm} ; al variare di questo, gli asintoti si trasformano per affinità, mentre l'iperbole taglia sempre l'asse z nei punti a distanza dal centro O uguale a $\pm \frac{m+1}{m} \tau_{zr}$; ma l'andamento suddetto non viene alterato.

Per la stabilità occorre dunque fare la verifica solo nei suddetti estremi dell'asse di sollecitazione per $y = \pm r = \pm 1$; anzi la tensione ideale maggiore in valore assoluto si avrà prendendo il segno +, e si trova così, secondo la (396):

$$k \geq \frac{m-1}{2m} \sigma_{zm} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_{zm}^2 + 4 \tau_{zr}^2} \quad (397)$$



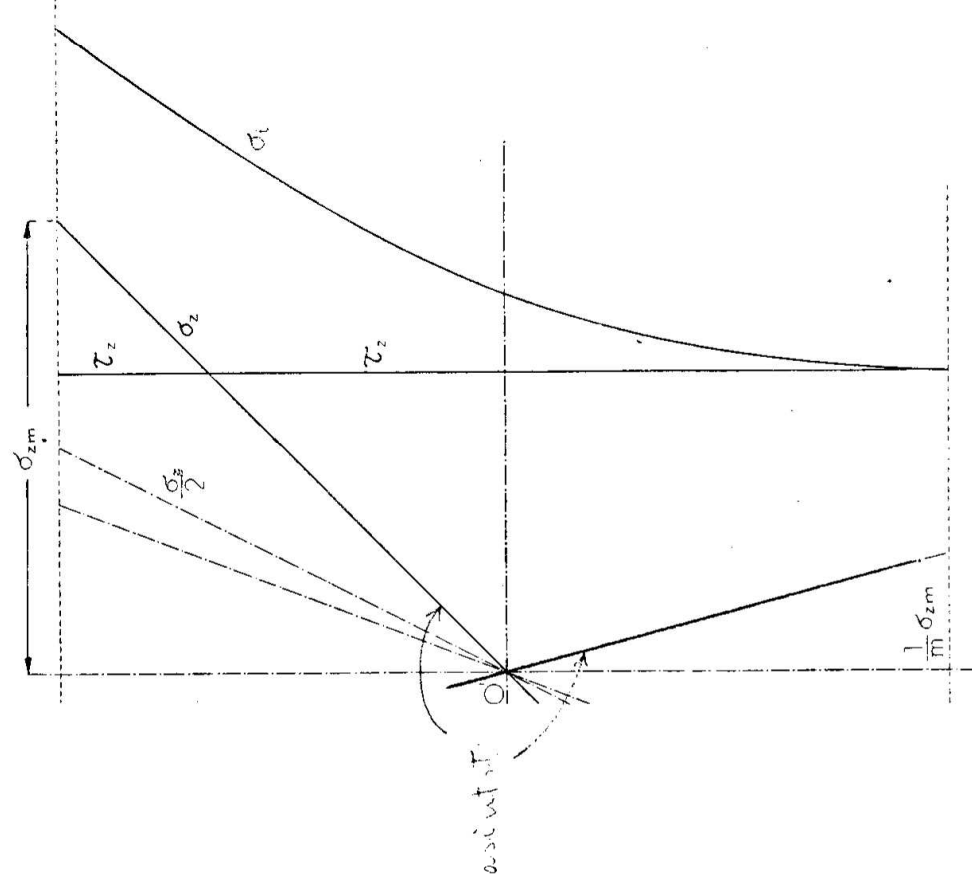


Fig. 60.

Come si sa dalle precedenti trattazioni della sezione circolare soggetta a sola flessione ed a sola torsione, se M_f ed M_t sono rispettivamente i momenti flettente e torcente, abbiamo:

$$J_t = \frac{M_t \cdot r}{I_x} \quad \sigma_{zm} = \frac{4 M_f}{\pi r^3} ; \quad \tau_{zr} = \frac{2 M_t}{\pi r^3} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 M_t}{\pi r^3} \right) \quad \gamma_{rz} = \frac{M_t}{I_t} r$$

Sostituendo questi valori nella (397), con ovvie riduzioni, si trova:

$$k \geq \frac{4}{\pi r^3} \left(\frac{m-1}{2m} M_f + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \right) \quad (398)$$

Si noti che il coefficiente della parentesi in questa espressione è l'inverso del *modulo di resistenza a flessione* per la sezione circo-

lare qui trattata [v. pag. 231 e seg.^{ti} (216)]. Perciò l'espressione entro parentesi nella (398) si può considerare come un momento flettente, capace di produrre, agendo da solo, una tensione normale massima, uguale a quella ideale massima prodotta dal momento flettente M_f e dal momento torcente M_t agenti simultaneamente. Quindi tale valore in parentesi si può definire momento flettente ideale, indicandolo con M_{fi} ; ed il risultato di questa ricerca si può riassumere enunciando:

L'equazione di stabilità per una sezione circolare soggetta a momento flettente M_f ed a momento torcente M_t si può esprimere in base alla analoga equazione per la flessione semplice per un momento flettente ideale M_{fi} espresso da:

$$M_{fi} = \frac{m-1}{2m} M_f + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \quad (399)$$

Per il valore solitamente assunto $m=4$, le frazioni che qui compaiono, divengono rispettivamente $3/8$ e $5/8$.

L'equazione di stabilità si può dunque esprimere:

$$k \geq \frac{4 M_{fi}}{\pi r^3} \quad (400)$$

Si trova così una formula usitatissima nel calcolo di stabilità degli alberi delle macchine, o di trasmissione e riportata in tutti i manuali tecnici.

Si noti poi che la (400) con l'ausilio della (399) si presta non solo alla verifica di una sezione già esistente, ma anche al calcolo di progetto, in quanto permette di ricavare direttamente il raggio r della sezione, quando siano dati i momenti sollecitanti ed il carico di sicurezza k .

Di solito, nel calcolo degli alberi delle macchine si trascura completamente l'influenza del taglio.

Nei trattati di meccanica delle costruzioni e di composizione di macchine si suole giustificare tale pratica osservando che nei punti considerati agli estremi del diametro di sollecitazione, ove è massima la σ_{\max} , è invece nulla la tensione tangenziale dovuta al taglio.

Ma nella figura 55 a) già abbiamo tracciato il diagramma delle σ_i nel caso in cui c'è anche il taglio, ed abbiamo constatato che tale diagramma volge sempre la concavità verso l'asse delle y , ed inoltre agli estremi, cioè per $y = \pm r$, ha le tangenti parallele all'asse delle $z \equiv \sigma_i$. (V. anche pag. 412).

Perciò la σ_{im} , valore massimo geometrico delle σ_i sarà sempre

maggiore del valore di σ_i corrispondente ad $y = r$, valore che uguagliato a k ci conduce alle (398) e (400).

Occorrerà quindi sempre tener conto pure dell'influenza del taglio, e l'errore che si commetterebbe trascurandola, può essere spesso molto rilevante.

Vogliamo dunque ora indicare come si possa valutare tale influenza, e così passiamo al

CALCOLO DI PROGETTO DIRETTO PER UNA SEZIONE CIRCOLARE SOGGETTA A FLESSIONE, TORSIONE E TAGLIO.

Richiamiamo, per averle qui presenti, le ben note espressioni:

$$\sigma_{zm} = \frac{4 M_f}{\pi r^3} ; \quad \tau_{zr} = \frac{2 M_t}{\pi r^3} ; \quad \tau_{zcm} = \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{T}{\pi r^3} \quad (401)$$

Sarà opportuno assumere come termine di paragone, ovvero come unità di misura per le tensioni la τ_{zr} ; perciò definiamo i rapporti:

$$\sigma' = \frac{\sigma_{zm}}{\tau_{zr}} = \frac{2 M_f}{M_t} ; \quad \tau' = \frac{\tau_{zcm}}{\tau_{zr}} = \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{T r}{2 M_t} \quad (402)$$

Si noti che il primo di essi, σ' risulta indipendente da r , e perciò determinato senz'altro dalle sollecitazioni esterne.

Si potrà quindi fare la ricerca del diagramma delle tensioni ideali massime σ_{im} attribuendo a σ_{zm} il valore σ' dato dalla 1.^a delle (402) in base ai dati momenti flettente e torcente, dando poi vari valori a τ_{zcm} , identificato con τ' per un valore fisso di τ_{zr} assunto quale unità di tensione.

La ricerca, per il caso particolare, a titolo d'esempio $M_f = M_t$, è stata fatta nella figura 61 tracciando per vari valori di τ' i rispettivi diagrammi delle σ_i , trovandone i massimi, e riportando questi, a partire dall'asse $y = r$, come già nelle fig.^e 56 e 58, quali ordinate η del diagramma v riferito come ascisse ai corrispondenti valori di τ' ; si intende che le stesse ordinate η sono le misure delle σ_{im} nella scelta unità di tensione che è τ_{zr} ; cioè si ha: $\sigma_{im} = \eta \tau_{zr}$.

La linea v è dunque il diagramma delle tensioni ideali massime σ_{im} , espresse in funzione delle τ' , definite dalla 2.^a delle (402).

Si noti che la stessa τ' dipende dal raggio r della sezione, il quale raggio è proprio l'incognita nel problema del calcolo di progetto diretto.

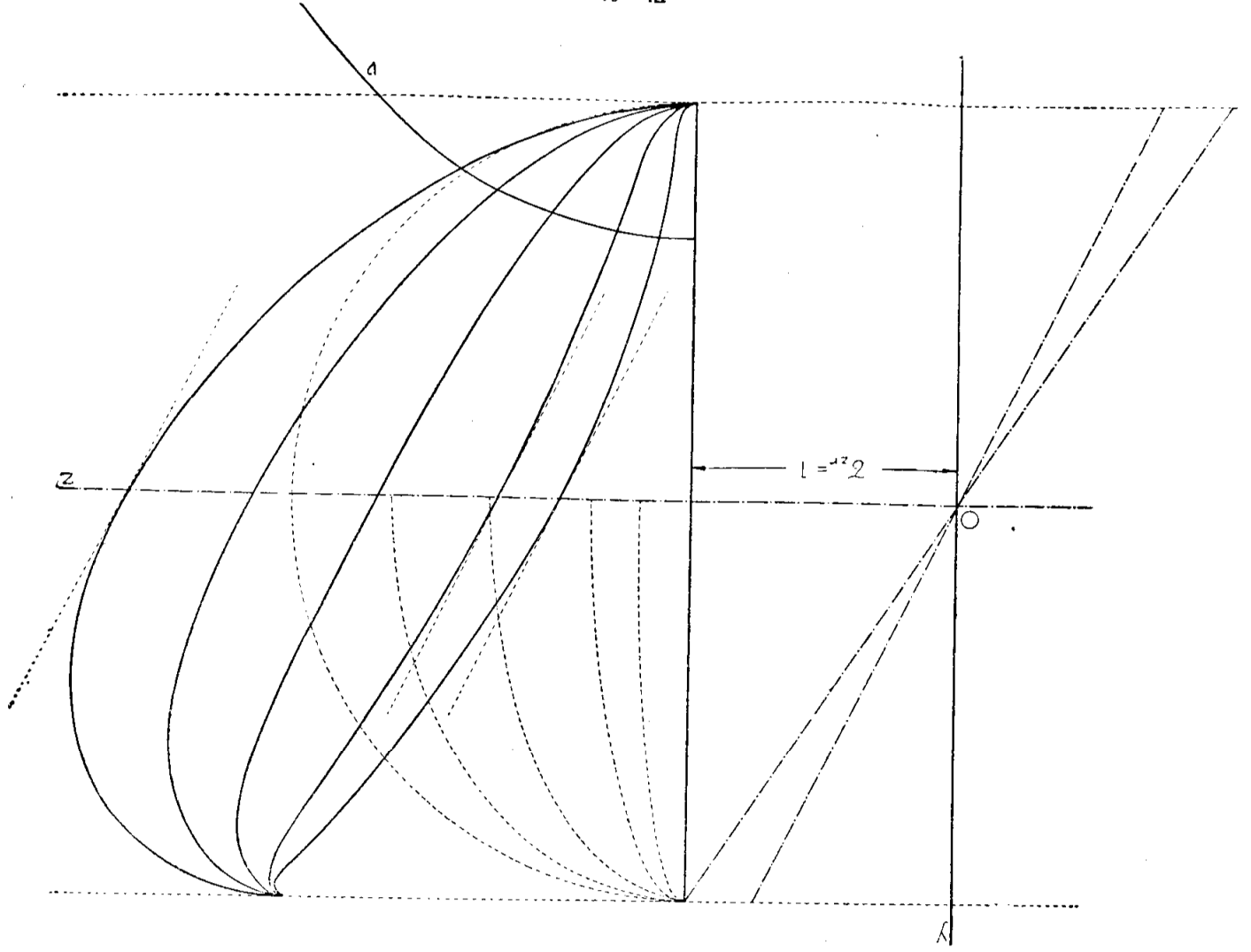


Fig. 61

Perciò è certo utile ed opportuno ricavare dall'equazione di stabilità

$$\sigma_{im} = \eta \tau_{zr} = k \quad (403)$$

una relazione non contenente r , ma contenente solo i parametri della sollecitazione esterna, per poter trovare poi a quale punto del diagramma ν deve corrispondere il comportamento della sezione che cerchiamo. Tale relazione si può trovare eliminando r tra la seconda delle (401) e la (403), e tenendo presente la seconda delle (402).

Ciò abbiamo :

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{Tr}{2M_t} \\ \eta &= \frac{\pi r^3}{2M_t} \cdot k \end{aligned} \right\} \quad (404)$$

Facendo il cubo di ambi i membri della prima e poi eliminando r^3 colla seconda si trova :

$$\eta = 4\pi \left(\frac{m+1}{m+2} \right)^3 \frac{M_t^2}{T^3} k \cdot \tau'^3 \quad (405)$$

Considerate le τ' ed η come coordinate di un punto (riferite agli stessi assi del diagramma ν), la relazione (405) è l'equazione di una parabola cubica, luogo dei punti, le cui coordinate possono soddisfare entrambe le (404) per uno stesso valore di r .

[Questo r deve assumere valori diversi per diversi punti della curva (405)].

Ciò posto, risulta evidente che una eventuale intersezione della parabola cubica (405) col diagramma ν ci dà con le sue coordinate i valori di η e di τ' , che, mediante una delle (404) ci possono procurare il raggio r della sezione circolare atta a resistere secondo il carico di sicurezza k all'azione simultanea dei tre parametri di sollecitazione esterna M_f , M_t e T .

È bene rilevare dalla figura 61, che in questo caso la tensione ideale massima σ_{im} è sempre maggiore — od almeno uguale — al valore σ'_t assunto da σ_t per $y = r$ all'estremo del diametro di sollecitazione, (ove ad essa contribuiscono solo la σ_{zm} e la τ_{zr} , essendo nulla la τ_{zom}), e poichè le ordinate della linea ν crescono rapidamente, risulta che in taluni casi l'errore commesso trascurando il taglio in questo problema può essere anche molto grave.

Una discussione completa del problema, e dell'importanza relativa dell'influenza del taglio si può fare soltanto tracciando numerosi diagrammi come ν , per vari valori di σ' e studiando così l'andamento della η in funzione delle due variabili σ' , e τ' . Ci pare però che una tale analisi esorbiti dalla natura di questo libro di carattere didattico e professionale; perciò, ai fini del libro stesso crediamo sufficiente avere esposto i capisaldi dell'argomento, rimandando chi volesse approfondirlo, ad apposita memoria che verrà citata in fine del volume.

Per analogia col problema di progetto diretto qui trattato, vogliamo ora, riprendendo lo studio svolto più sopra per flessione e taglio (senza torsione), esporre la soluzione del:

CALCOLO DI PROGETTO DIRETTO PER SEZIONI CIRCOLARI O RETTANGOLARI SOGGETTE A FLESSIONE E TAGLIO.

a) *Sezione circolare.* Nei relativi diagrammi in figura 59 abbia-

mo stabilito di assumere come unità di tensione la $\tau_{zcm} = \frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{T}{\pi r^2}$; perciò la misura della σ_{zm} in tale unità sarà (come sopra):

$$\sigma' = \frac{\sigma_{zm}}{\tau_{zcm}} \quad \text{ed essendo } \sigma_{zm} = \frac{4 M_f}{\pi r^3} \quad (406)$$

$$\sigma' = 4 \frac{m+1}{m+2} \times \frac{M_f}{T r}$$

si ha:

D'altra parte l'equazione di stabilità è:

$$k = \sigma_{tm} = \eta \tau_{zcm} = \eta \frac{m+2}{m+1} \times \frac{T}{\pi r^2}$$

(essendo η l'ordinata del diagramma μ).

Quindi si ottiene:

$$\eta = \frac{m+1}{m+2} \times \frac{\pi r^2}{T} k \quad (407)$$

Se riguardiamo le σ' ed η come coordinate di un punto, riferendole agli stessi assi del diagramma μ , le (406) e (407) si possono considerare come le equazioni parametriche (parametro r) di una