

diretto, di componenti T_x e T_y , potremo applicare il principio della sovrapposizione degli effetti col criterio appositamente proposto poco sopra; e perciò continuando ad indicare con x ed y gli assi principali, riterremo che le tensioni espresse dalle (360 bis) e (360) siano rispettivamente le componenti secondo gli stessi assi della tensione tangenziale τ_x nel punto generico di coordinate x ed y .

Ne risulta subito che la tensione τ_x massima che si ha nel baricentro O , diretta secondo l'asse di sollecitazione, è ancora uguale ai $3/2 \frac{T_y}{T_x}$ della tensione media $T'bh$.

È ora facile studiare le traiettorie delle tensioni tangenziali delle ten-
ci danno una rappresentazione chiara della distribuzione delle tensioni, e ci possono permettere di constatare direttamente in questo caso, a titolo d'esempio, come la teoria approssimata direttamente applicata ad un asse di sollecitazione generico non si trovi in generale concorde col principio della sovrapposizione degli effetti, secondo ciò che si disse poco sopra in proposito.

* È facile esprimere l'equazione differenziale delle ora dette traiettorie delle τ_x .

Infatti, secondo le (360) e (360 bis) l'inclinazione di una di tali traiettorie rispetto all'asse x , in un punto generico sarà data da:

$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{T_y}{T_x} \times \frac{1 - \frac{4y^2}{h^2}}{1 - \frac{4x^2}{b^2}} \quad (363)$$

e questa è la cercata equazione differenziale intendendo che y sia funzione di x nell'equazione della detta traiettoria.

Si possono immediatamente separare le variabili, ottenendo:

$$\frac{dy}{T_y \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)} = \frac{dx}{T_x \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)} \quad (364)$$

e così la soluzione dell'equazione è ridotta alle quadrature.

Ora ricordiamo che si ha:

$$\int \frac{dx}{1 - a^2 x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax)}{1 - (ax)^2} = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(ax)}{1 + ax} + \int \frac{d(ax)}{1 - ax} \right) = \frac{1}{2a} \left| \log(1 + ax) - \log(1 - ax) \right| = \frac{1}{2a} \log \frac{1 + ax}{1 - ax}.$$

Applicando questa relazione ad integrare ambo i membri della (364), $\alpha = \frac{2}{h} \circ \frac{2}{h} \frac{1}{x}$ ed omettendo in entrambi gli integrali un divisore comune 4, che si può intendere conglobato nella costante arbitraria C , si ottiene:

$$\frac{h}{T_y} \log \frac{h+2y}{h-2y} - \frac{b}{T_x} \log \frac{b+2x}{b-2x} = C.$$

Questa è l'equazione in termini finiti di una generica tra le cercate traiettorie delle τ_z .

Se si stabilisce che tale linea debba passare per un dato punto di coordinate x_0 ed y_0 , la costante C sarà evidentemente il valore che il primo membro di questa equazione assume ponendovi x_0 ed y_0 in luogo di x ed y . Con ciò l'equazione si può pure scrivere nella forma:

$$\frac{h}{T_y} \log \frac{(h-2y_0)(h+2y)}{(h+2y_0)(h-2y)} = \frac{b}{T_x} \log \frac{(b-2x_0)(b+2x)}{(b+2x_0)(b-2x)}$$

od anche, passando dai logaritmi ai numeri:

$$\frac{h-2y_0}{h+2y_0} \times \frac{h+2y}{h-2y} = \left[\frac{b-2x_0}{b+2x_0} \times \frac{b+2x}{b-2x} \right]^{\frac{b}{h} \cdot \frac{T_y}{T_x}} \quad (365)$$

Riesce agevole verificare che, qualunque siano x_0 ed y_0 , e se T_y e T_x sono dello stesso segno, l'equazione è sempre soddisfatta dai punti di coordinate:

$$x = \frac{b}{2} \quad \text{ed} \quad y = \frac{h}{2}; \quad x = -\frac{b}{2} \quad \text{ed} \quad y = -\frac{h}{2},$$

il che vuol dire che tutte le dette traiettorie delle τ_z passano per gli estremi della diagonale del rettangolo più prossima all'asse di sollecitazione.

Inoltre si noti che per $y = y_0 = \pm \frac{h}{2}$ il primo membro della (365) assume la forma indeterminata $0:0$, e perciò l'equazione è soddisfatta per qualunque valore di x ; analogamente per $x = x_0 = \pm \frac{b}{2}$ la detta forma indeterminata è assunta dal secondo membro della (365), e quindi l'equazione è soddisfatta per qualunque valore di y . Ciò prova che i lati del rettangolo soddisfano all'equazione delle traiettorie, come deve essere.

È notevole poi il caso in cui l'asse di sollecitazione coincide con una diagonale, per esempio con quella contenuta nel quadrante $+x, +y$; in tal caso l'esponente a secondo membro della (365) si riduce ad 1: l'equazione diviene perciò di 2.^o grado, e rappresenta delle coniche. Si vede subito che nell'equazione così ridotta, tra i termini a secondo grado è diverso da zero solo quello «rettangolare» in xy ; ciò dimostra che dette coniche sono iperboli equilateri aventi gli asintoti paralleli agli assi coordinati.

E poichè tali coniche passano tutte per gli estremi della diagonale asse di sollecitazione, da notissime proprietà dell'iperbole risulta che i vari centri delle iperboli stesse debbono trovarsi sull'altra diagonale del rettangolo. E' facile constatare che le iperboli aventi archi interni al rettangolo, (e quindi utili a costituire traiettorie effettive), hanno i centri esterni al rettangolo stesso. La diagonale asse di sollecitazione è essa stessa una traiettoria (iperbole degenerata col centro all'infinito); inoltre nei punti dell'altra diagonale (asse neutro) che è coniugata della prima rispetto a tutte le dette iperboli, le τ_z , tangenti alle rispettive traiettorie, sono tutte parallele alla prima diagonale.

Nel caso generale, con \bar{T} comunque diretto, per facilitare il tracciamento delle traiettorie delle τ_z [dato che il calcolo numerico della (356) potrebbe essere ritenuto relativamente laborioso], può essere opportuno studiare le *linee isocline* delle dette traiettorie, in modo analogo a quanto già fu fatto nel caso della torsione del prisma triangolare (pag. 286 e 287, e fig. 19).

Indichiamo con i_0 l'inclinazione all'asse x dell'asse di sollecitazione secondo cui agisce \bar{T} , ossia poniamo:

$$i_0 = \frac{T_y}{T_x};$$

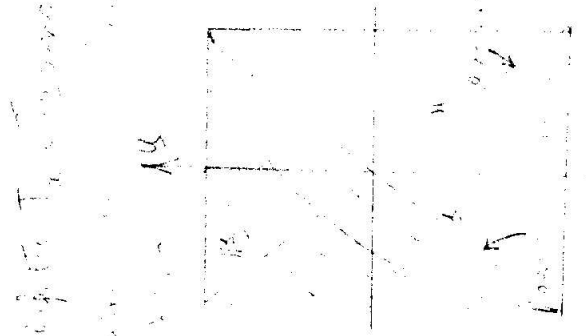
con ciò l'equazione delle isocline cercate ci è fornita dalla (363), che diventa:

$$i \left(1 - \frac{4x^2}{b^2} \right) = i_0 \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right),$$

e poi, con ovvie trasformazioni:

$$\frac{x^2}{b^2} \times \frac{i - i_0}{i} - \frac{y^2}{h^2} \times \frac{i - i_0}{4} = 1; \tag{366}$$

equazione, che per un dato valore di i rappresenta la corrispon-



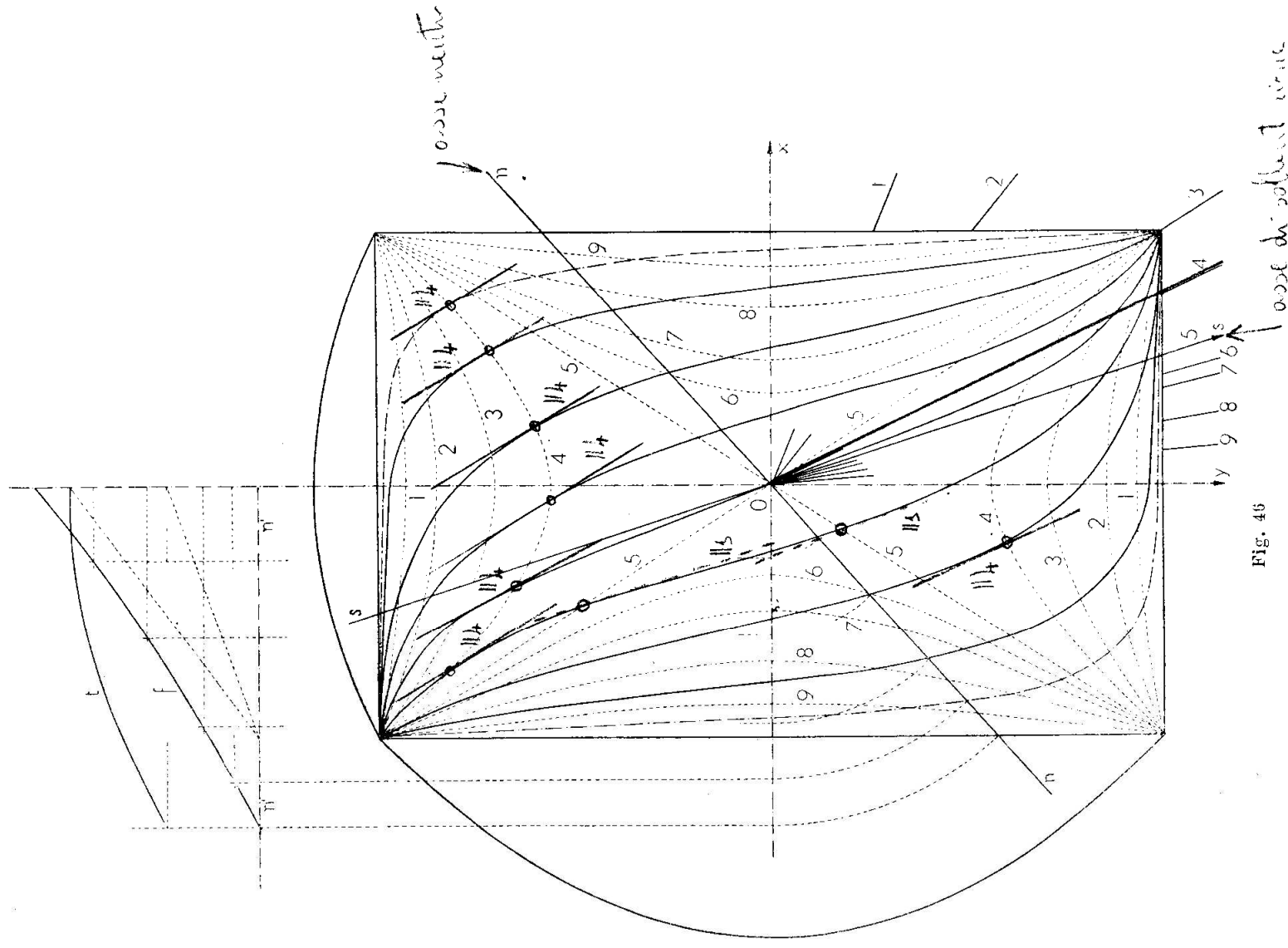


Fig. 46

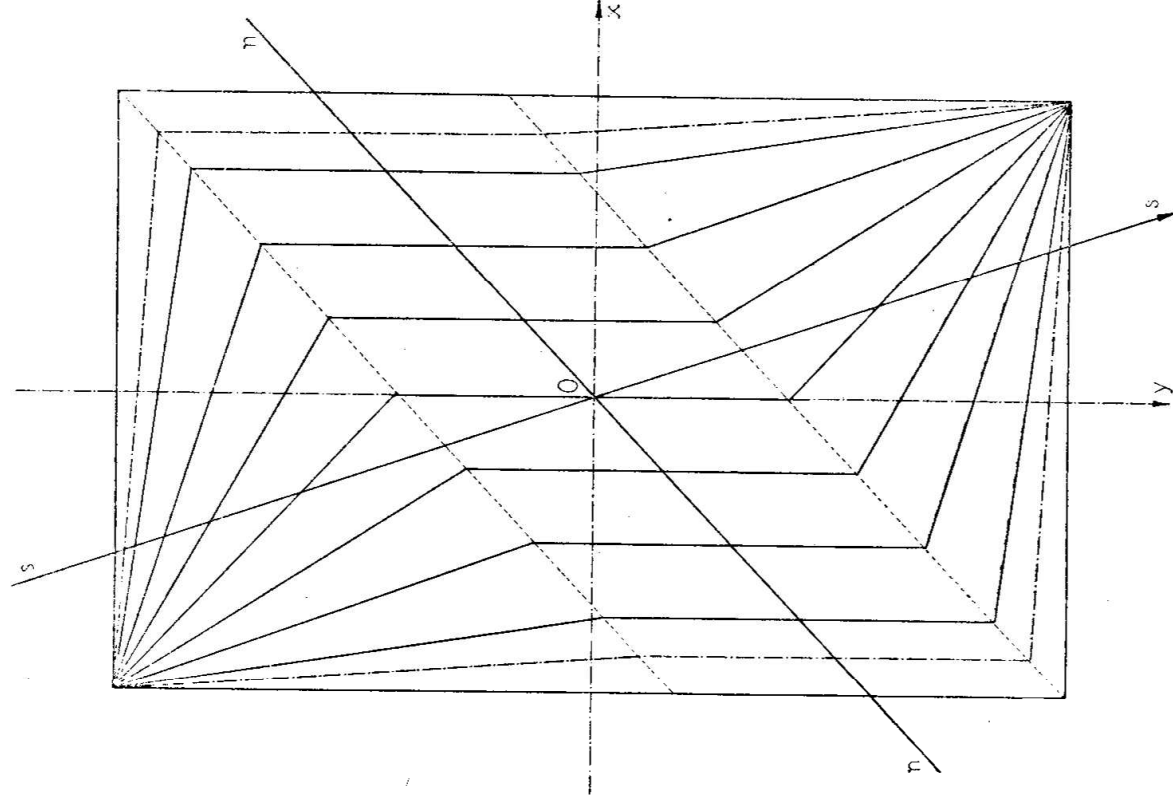


Fig. 46 bis

dente isocline; al variare di i si ottengono poi tutte le isocline della « famiglia ».

Dalla (366) risulta che la linea generica è l'iperbole avente per assi quelli coordinati, e per semiassi rispettivamente le lunghezze:

$$\frac{b}{2} \sqrt{\frac{i-i_0}{i}} ; \quad \frac{b}{2} \sqrt{\frac{i-i_0}{i_0}}$$

ove il primo è il semiasse « reale » per $i > i_0$, mentre per $i < i_0$ è « reale » il secondo.

La detta « famiglia » di linee è quindi il fascio delle iperboli col centro nel baricentro O e passanti per i quattro vertici del rettangolo, (comprese come iperboli degeneri le coppie di lati opposti del rettangolo, per $i = 0$ o per $i = \infty$).

Per $i = i_0$ i detti semiassi divengono entrambi nulli, e l'iperbole degenera perciò nella coppia delle due diagonali del rettangolo. Ciò vuol dire che nei punti delle dette diagonali le τ sono dirette parallelamente all'asse di sollecitazione.

Gli asintoti dell'iperbole generica hanno rispetto all'asse x una inclinazione (data dal rapporto dei due semiassi) uguale a:

$$V = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{i}{i_0}}$$

Ciò prova che per una stessa iperbole, al variare dell'asse di sollecitazione, la i varia proporzionalmente ad i_0 .

Nella figura 46 a titolo di esempio, per una sezione rettangolare sollecitata da un taglio obliquo agente secondo l'asse di sollecitazione s , si tracciarono, pure coll'ausilio delle relative isocline, (segnate a linea punteggiata), alcune traiettorie delle τ , secondo la (365) (segnate a tratto continuo).

Le isocline son tracciate per le inclinazioni di varie rette uscenti dal centro segnate in figura e contraddistinte con numeri progressivi corrispondenti.

Le traiettorie a tratto continuo furono al solito tracciate in modo da comprendere sull'asse neutro n segmenti attraversati da uguali flussi di τ ; verso le estremità dell'asse neutro tale flusso fu ancora suddiviso per metà con ciascuna delle traiettorie intercalate, e segnate a tratti e punti: si credette opportuno di tracciare pure queste linee per mostrare meglio l'andamento delle traiettorie in prossimità dei vertici più lontani dall'asse di sollecitazione.

La ripartizione del flusso sopra accennata fu fatta nella figura in alto, ove si tracciò, su una metà dell'asse neutro riportato in n' , il diagramma t delle tensioni tangenziali normali all'asse neutro stesso (diagramma ricavato da quelli delle τ_{yz} e τ_{zx} segnati lateralmente ed esternamente al rettangolo).

Si fece poi il diagramma f , integrale di quello t , ed esso si può considerare come diagramma dei flussi di τ_{yz} ; l'ordinata estrema fu suddivisa in quattro parti uguali, delle quali la più prossima all'asse delle ascisse fu poi ripartita ancora in due parti uguali: i punti di divisione furono riportati sul diagramma integrale f , proiettandoveli parallelamente all'asse delle ascisse, e le posizioni delle corrispondenti ordinate ci diedero sull'asse neutro le posizioni dei punti per cui si dovevano far passare le traiettorie per realizzare la proposta ripartizione di flusso.

Nella fig. 47 furono tracciate le analoghe traiettorie per il caso particolare già poco sopra considerato, in cui l'asse di sollecitazione s coincide con una delle diagonali; allora, come già s'è detto, l'asse neutro n coincide coll'altra diagonale e le traiettorie delle τ_{yz} sono iperboli passanti per gli estremi della diagonale s , ed aventi gli asintoti paralleli ai lati b ed h , ed i vari centri sulla diagonale n . La ripartizione del flusso sull'asse neutro n fu fatta in modo analogo a quello descritto per la fig. 46; soltanto come diagramma t (v. sopra), si assunse lo stesso diagramma delle τ_{yz} lungo uno dei lati h , poichè è ben noto che in questo caso su un tale lato e sull'asse neutro n in punti aventi la stessa y le τ_{yz} assumono valori proporzionali secondo un rapporto che resta costante al variare delle y .

Nella fig. 46 bis fu segnata la distribuzione delle traiettorie delle τ_{yz} per l'identico caso di sollecitazione della figura 46, applicando però *direttamente* per la data sollecitazione la teoria approssimata, tenendo presenti per le traiettorie le proprietà riscontrate a suo tempo (vedi pag. 356 e seg. ⁶ fig. 39).

Si nota che con questi concetti le traiettorie risultano spezzate trilatera, coi vertici situati sulle parallele all'asse neutro n condotte per i due estremi della diagonale più prossima all'asse n stesso: il lato intermedio di ogni trilatera risulta in figura parallelo ai lati h del rettangolo, mentre i lati estremi della trilatera stessa concorrono rispettivamente nei vertici del rettangolo più prossimi all'asse di sollecitazione s .

Infine il flusso di τ_{yz} sull'asse neutro risulta ripartito uniformemente.

Nella fig. 47 bis fu tracciata analogamente la distribuzione delle dette traiettorie, coll'applicazione *diretta* della teoria approssimata

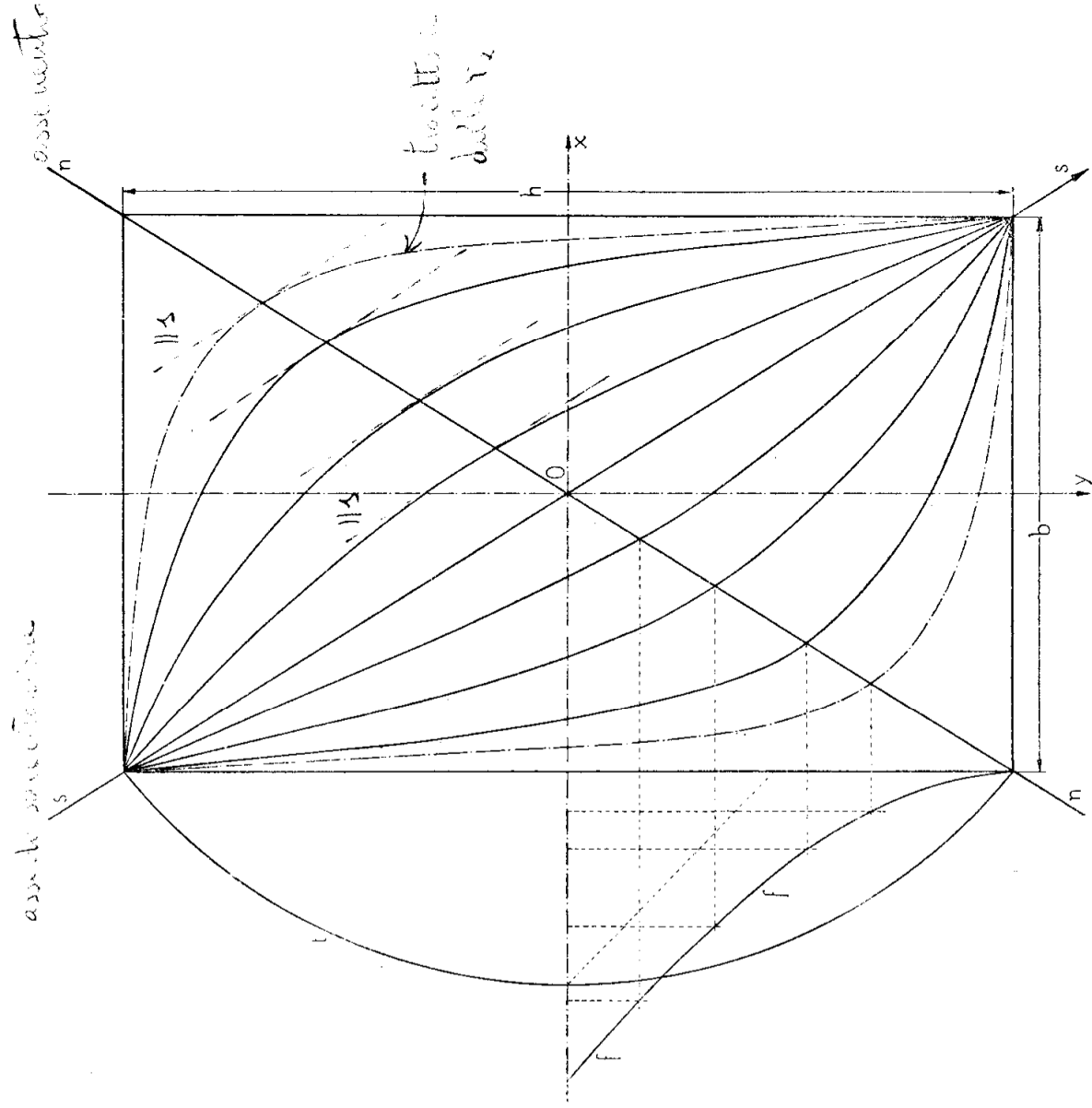


Fig. 47.

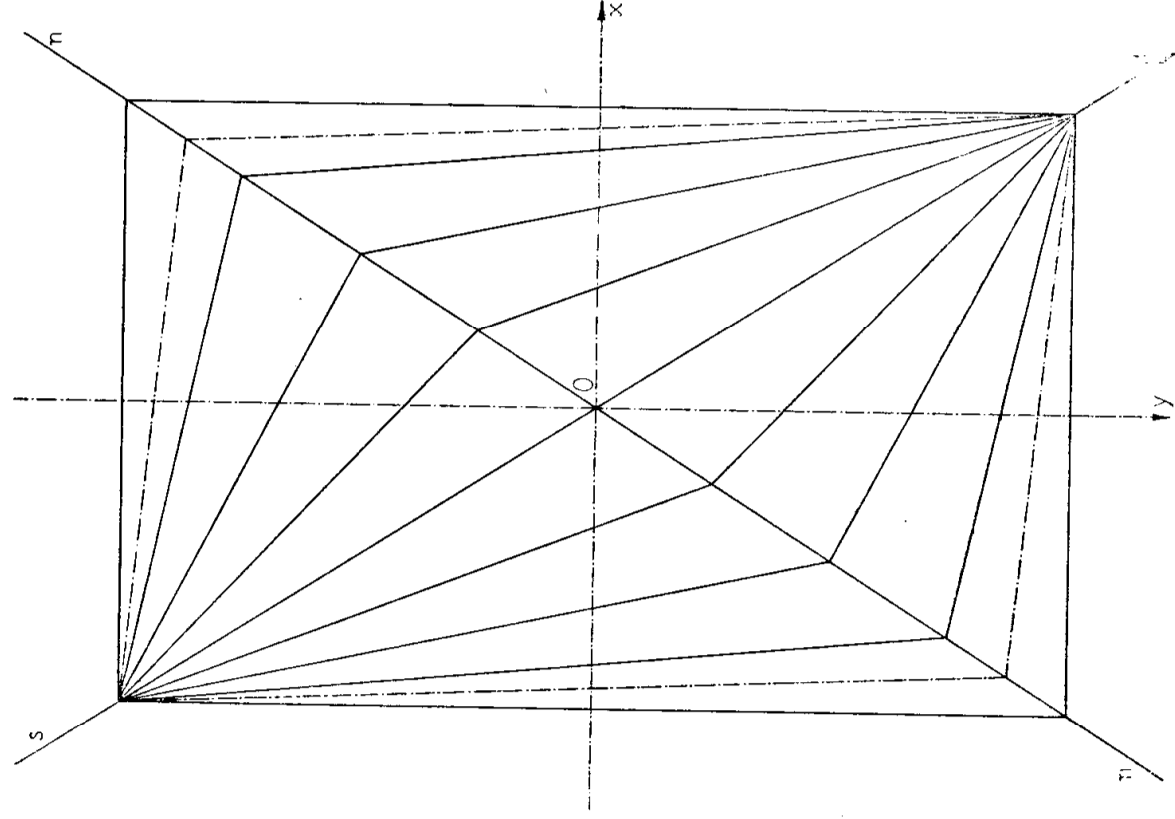


Fig. 47 bis

al caso particolare di sollecitazione già contemplato nella fig. 47. Si ottengono così ovviamente delle traiettorie spezzate bilatere coi lati passanti rispettivamente per gli estremi della diagonale s , ed aventi i vertici sulla diagonale n ; anche in questo caso il flusso τ_2 sull'asse neutro n risulta distribuito uniformemente.

Dal confronto della fig. 46 colla 46 bis e della 47 colla 47 bis, risulta chiaramente illustrato quanto si disse poco sopra sul disaccordo tra la teoria approssimata direttamente applicata a qualsiasi asse di sollecitazione ed il principio della sovrapposizione degli effetti, inoltre risulta come il criterio basato appunto su questo principio e da noi proposto poco sopra, cioè il criterio in base al quale furono tracciate le distribuzioni nelle fig. 46 e 47, sia, anche nei risultati, molto più attendibile e plausibile dell'altro (teoria approssimata applicata direttamente), non solo perchè esso è in armonia con un principio fondamentale imprescindibile, ma anche perchè dà luogo a distribuzioni di τ_2 più verosimili di quelle dell'altro metodo, in quanto evita per le traiettorie i punti angolosi (v. fig. 46 bis e 47 bis) che nell'interno della sezione non sono spiegabili nè ammissibili, ed anche in quanto la « rarefazione » del flusso di τ_2 verso le estremità dell'asse neutro n , s'accorda bene col fatto che la τ_2 deve risultare nulla nei vertici del rettangolo estremi della diagonale più vicina all'asse neutro stesso.

Al lettore non devono far meraviglia questi apprezzamenti di carattere *qualitativo* su metodi in parte discrepanti e discordi: non si deve dimenticare che si tratta qui di *procedimenti approssimati*; e che perciò può essere lecito discuterli e scegliere tra essi il più plausibile, il quale perciò si presenta come quello di approssimazione probabilmente maggiore (1).

Altro tipo di sezione interessante per la pratica ed atta ad una trattazione semplice è la

Sezione triangolare.

Cominciamo a supporre che l'asse di sollecitazione sia una delle mediane; allora l'asse neutro è parallelo al lato bisecato dalla mediana stessa, lato che diremo b_1 .

Applichiamo direttamente la teoria approssimata, colle notazioni della fig. 48.

Sia h l'altezza relativa al lato b_1 ed indichiamo con y_1 la distanza

(1) Su ciò che precede in questo N. 55 cfr. il mio lavoro: « *Rilievi sulla trattazione approssimata delle travi soggette a sforzo di taglio* » (Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino... Vol. LXV - VIII.° già citata a pag. 350).

normale della corda generica (parallela all'asse neutro) dal vertice B opposto al lato b_1 ; cioè poniamo:

$$y_1 = \frac{2}{3} h - y$$

Ciò posto il rapporto $\frac{\mathcal{O}C_0}{I}$: b , che compare nella (330 bis) diviene in questo caso:

$$\frac{\mathcal{O}C_0}{I} = \frac{1}{2} y_1 \cdot \frac{2}{3} (h - y_1) = \frac{1}{3} y_1 (h - y_1) \quad (367)$$

e perciò la (330 bis) dà:

$$\tau_{yz} = \frac{1}{3} \frac{T_y}{I_x} y_1 (h - y_1) \quad (367 \text{ bis})$$

Se ne deduce che in funzione di y_1 , detto rapporto e la τ_{yz} , che

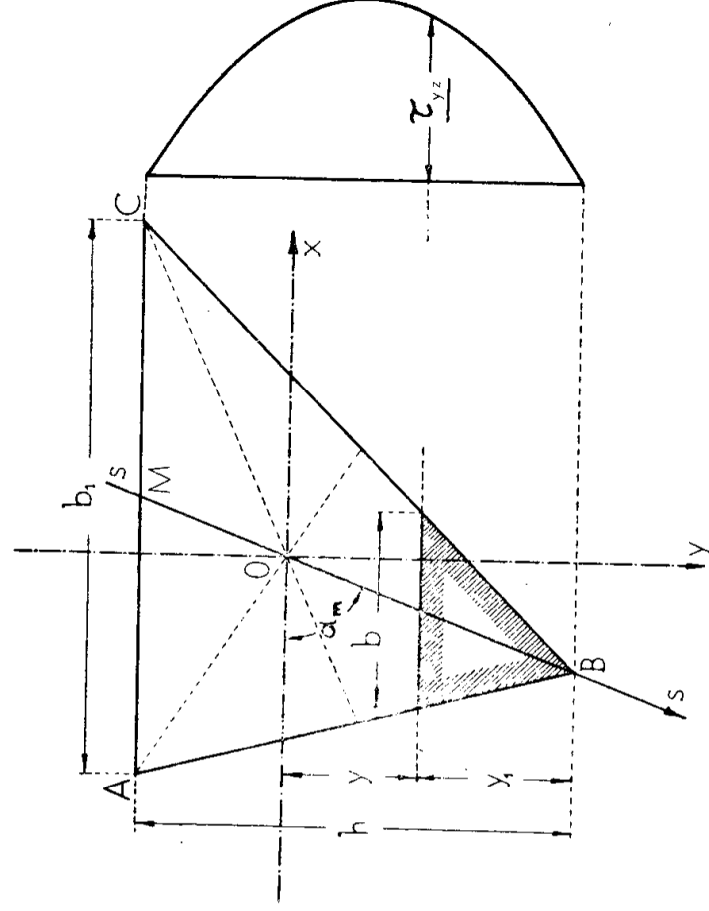


Fig. 48

ad esso è proporzionale, variano con legge parabolica, annullandosi

per $y_1 = 0$ e per $y_1 = h$, e diventando massimi per $y_1 = \frac{h}{2}$, coi valori:

$$\left(\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_0}{b}\right)_{max} = \frac{h^2}{12};$$

e

$$\tau_{yz\ max} = \frac{T_y}{I_x} \cdot \frac{h^2}{12}$$

e poichè dalla Statica grafica si sa che

$$I_x = \frac{b_1 h}{2} \cdot \frac{h^2}{18} = \frac{b_1 h^3}{36},$$

sostituendo nell'espressione precedente si trova:

$$\tau_{yz\ max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{b_1 h}; \quad (368)$$

ossia anche qui, come per la sezione rettangolare la $\tau_{yz\ max}$ è una volta e mezza la *tensione tangenziale media corrispondente al taglio* T_y .

Nella fig. 48 è indicato a fianco il diagramma parabolico della τ_{yz} . S'intende, secondo quanto è noto, che la tensione τ_z lungo una qualunque retta passante per il vertice B , varia colla stessa legge parabolica. In particolare *nel punto di mezzo della mediana asse di sollecitazione la tensione tangenziale τ_z è uguale ad una volta e mezza quella media corrispondente al taglio totale* T .

E' ovvio poi che il valore massimo di τ_z si ha nel punto di mezzo del lato più inclinato rispetto all'altezza h , lato che nel caso della fig. 48 è quello BC .

Calcoliamoci ora il *coefficiente di forma*, o *fattore di taglio* χ secondo le (341) o (341 bis), e conseguentemente il coefficiente χ_1 definito dalla (349).

Incominciamo a calcolare l'integrale:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{C}_0^2}{b} dy$$

che compare nelle (341) e (341 bis) osservando che in questo caso i coefficienti di correzione entro parentesi $[1 + \dots]$ sono indipendenti da y e perciò si possono porre fuori del segno d'integrazione.

Possiamo poi assumere pure qui come variabile indipendente la y_1 , e perciò l'integrazione dovrà essere tra 0 ed h . Quindi osservando che $b = \frac{b_1}{h} y_1$, e ricordando la (367), con ovvie riduzioni, abbiamo:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathcal{C}_0^2}{b} dy = \int_0^h \frac{\mathcal{C}_0^2}{b} dy_1 = \frac{b_1}{9h} \int_0^h y_1^3 (h-y_1)^2 dy_1 = \frac{b_1 h^5}{540}$$

Da quanto è noto poi nella Statica grafica, si ha per questo triangolo:

$$A \varphi_m^4 = \frac{b_1 h^5}{2 \times 18^2}$$

Inoltre la parentesi [1+...] di correzione, che compare nella (341 bis) in questo caso è:

$$1 + \cotg^2 \alpha_m + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_1^2}{h^2}$$

indicando con α_m , secondo la fig. 45, l'angolo compreso tra l'asse delle x e la mediana asse di sollecitazione.

Sostituendo ora i valori qui trovati nella (341 bis), dopo ovvie riduzioni si trova:

$$\chi = \frac{6}{5} \left(\operatorname{cosec}^2 \alpha_m + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_1^2}{h^2} \right);$$

e ponendo $m = BM =$ lunghezza della mediana, si ottiene poi:

$$\chi = \frac{6}{5} \operatorname{cosec}^2 \alpha_m \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_1^2}{m^2} \right) \quad (369)$$

Volendo poi ottenere il fattore χ_1 definito dalla (349) basta osservare che evidentemente si ha:

$$T_y \operatorname{cosec} \alpha_m = T,$$

e quindi combinando le (349) e (369), si trova infine:

$$\chi_1 = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{b_1^2}{m^2} \right) \quad (370)$$

E' ovvio che questa relazione per ognuna delle mediane, considerata a sua volta come asse di sollecitazione.

In base a questa formula, e secondo ciò che si vide poco sopra, a proposito della legge di variazione della λ_1 nella fig. 49, per la stessa sezione della fig. 48, riprodotta però in scala più grande, si tracciò l'ellisse d'inerzia (v. Statica grafica), e poi l'ellisse dei fattori di taglio, f (punteggiata), e quella degli spostamenti dovuti al taglio, s

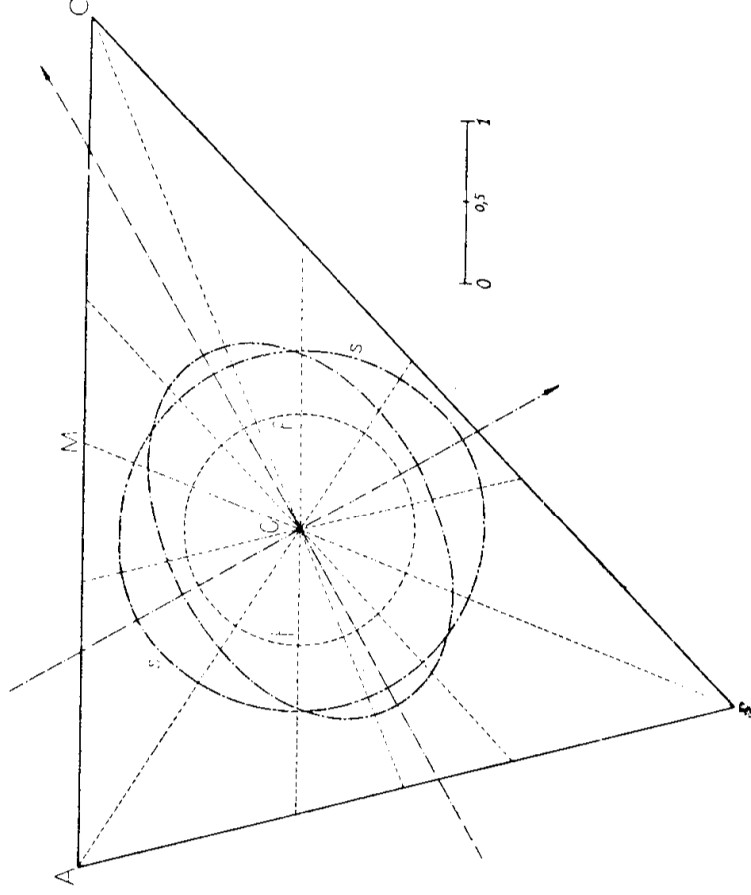


Fig. 49

(a tratti e punti), portando i raggi vettori nella scala indicata nella stessa figura. L'ellisse f in questo caso si scosta pochissimo dalla forma circolare.

Può essere ora opportuno dimostrare che la teoria approssimata direttamente applicata, come sopra, nei casi in cui l'asse di sollecitazione coincide successivamente con ciascuna delle tre mediane, dà risultati tra loro concordanti, in relazione col principio di sovrapposizione degli effetti.

In altri termini, dato uno sforzo di taglio agente secondo una delle tre mediane, si può scomporre tale sforzo secondo le altre due mediane, calcolare colla teoria approssimata in ogni punto la tensione τ_z provocata da ciascuna di dette componenti, e poi pure in ogni punto fare la somma geometrica delle tensioni τ_z così trovate;

la tensione risultante in tal modo ottenuta è proprio uguale a quella che si può calcolare applicando direttamente la teoria approssimata allo sforzo di taglio dato.

Questo enunciato è degno di nota, perchè l'accordo tra la teoria approssimata direttamente applicata ed il principio di sovrapposizione degli effetti *non* è vero in generale, come si disse e verificò poco sopra. Ricordando che la risultante cambiata di segno fa equilibrio alle sue componenti, l'enunciato sopra esposto si può più brevemente formulare come segue:

Dati tre sforzi di taglio agenti rispettivamente secondo le tre mediane del triangolo e di intensità tali da farsi equilibrio, le ten-

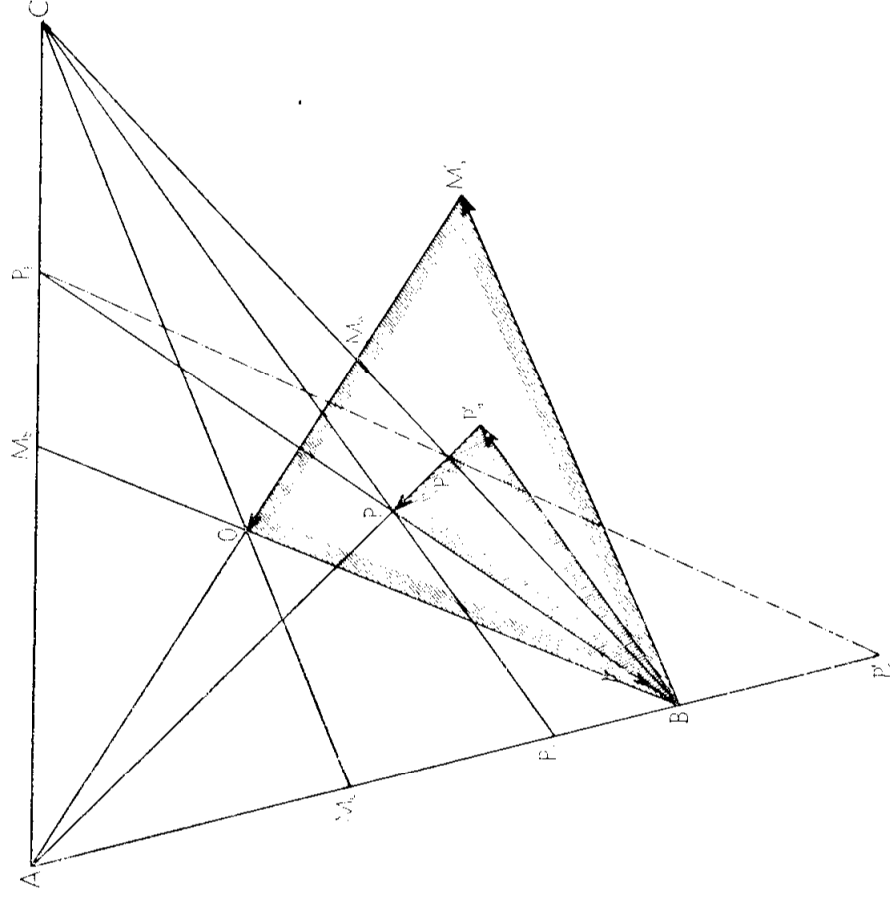


Fig. 50

sioni tangenziali calcolate come provocate rispettivamente da ciascuno dei detti sforzi, colla teoria approssimata direttamente e separatamente applicata, sono in ogni punto della sezione tali da farsi pure tra loro equilibrio.

Per dimostrare ciò ci riferiamo alla fig. 50, ov'è riprodotta la

sezione triangolare della figura precedente. Sono indicati con M_a, M_b, M_c i punti di mezzo dei lati a, b, c rispettivamente opposti ai vertici ABC ; O è il baricentro, P un punto generico, e P_a, P_b, P_c sono le proiezioni di P su ciascun lato a, b, c dal vertice rispettivamente opposto.

I tre sforzi di taglio agenti secondo le tre mediane e facentisi equilibrio, come sopra è detto, sono rispettivamente proporzionali ai lati del triangolo M_aOB , avente il lato M'_aO sulla mediana AM_a ed il lato BM'_a parallelo alla mediana BM_c . Risulta subito, per l'uguaglianza dei triangoli $BM_aM'_a$ e CM_aO , che i lati del triangolo M'_aOB sono uguali rispettivamente ai $\frac{2}{3}$ delle mediane corrispondenti. Ne consegue che le tensioni τ_2 provocate separatamente da ciascuno dei tre sforzi di taglio nel punto di mezzo della rispettiva mediana sono proporzionali ordinatamente alle lunghezze delle mediane. (v. pag. 388).

Per quanto è noto dalla teoria approssimata se ne deduce che nei punti di mezzo dei tre segmenti AP_a, BP_b, CP_c le tensioni tangenziali separatamente dovute ai tre sforzi di taglio sono rispettivamente proporzionali alle lunghezze dei segmenti stessi.

Quindi, chiamando τ_a, τ_b, τ_c le tre tensioni tangenziali separatamente provocate in P dai tre sforzi di taglio (tensioni com'è noto dirette rispettivamente ai tre vertici A, B, C) e ricordando la legge parabolica di variazione della τ_2 lungo una traiettoria rettilinea, risulta subito:

$$\tau_a : \tau_b : \tau_c = \frac{AP \times PP_a}{AP_a} : \frac{BP \times PP_b}{BP_b} : \frac{CP \times PP_c}{CP_c}.$$

Fissiamo ora l'attenzione sul primo di questi rapporti:

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP_b}{PP_b} \cdot \frac{PP_a}{AP_a}$$

e considerando la retta P_bP_a che taglia in P'_c il lato AB , applichiamo il noto *teorema di Menelao*; (v. geometria proiettiva ed analitica) al triangolo ABP ed alla trasversale $P_bP_aP'_c$: otteniamo così:

$$\frac{BP_b}{PP_b} \cdot \frac{PP_a}{AP_a} = \frac{BP'_c}{AP'_c};$$

inoltre dal quadrangolo completo P_bPP_aC si ricava che i quattro

punti $ABP_cP'_c$ costituiscono un gruppo armonico, e perciò *in valore assoluto* si ha :

$$\frac{BP'_c}{AP'_c} = \frac{BP_c}{AP_c};$$

e perciò sostituendo nelle due relazioni precedenti si ha :

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP_c}{AP_c}.$$

D'altra parte a questa formula si può pervenire direttamente dalla precedente espressione di $\tau_a : \tau_b$, applicando al triangolo ABP ed al punto C il pure assai noto *teorema di Ceva*, per il quale si ha *in valore assoluto* :

$$\frac{BP_b}{PP_b} \cdot \frac{PP_a}{AP_a} = \frac{BP_c}{AP_c}$$

Si consideri ora il triangolo P'_aPB ove P'_a è l'intersezione di AP_a colla parallela a CP condotta per B .

Per il teorema di Talete si ricava subito :

$$PP'_a = \frac{AP \times BP_c}{AP_c}$$

e quindi sostituendo nella relazione precedente

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{PP'_a}{BP};$$

cioè le due tensioni τ_a e τ_b sono proporzionali ai lati rispettivi del triangolo P'_aPB , che ha i lati ordinatamente paralleli ai raggi PA , PB e PC ; per ragioni evidenti di simmetria ciclica, analogo fatto si verifica per ciascuno dei rapporti $\tau_b : \tau_c$ e $\tau_c : \tau_a$; il che vuol dire che le tre tensioni τ_a , τ_b e τ_c costituiscono i lati di un triangolo chiuso simile a quello P'_aPB , e perciò si fanno equilibrio, come è detto nell'enunciato, che così risulta dimostrato.

Passando ora a studiare il caso in cui l'asse di sollecitazione abbia una direzione generica affatto qualunque, per ricavare la distribuzione delle τ_z e le relative traiettorie, si può scomporre il dato sforzo di taglio secondo due delle mediane, e poi applicare il prin-

cipio di sovrapposizione degli effetti. Per l'enunciato ora dimostrato la scelta di queste due tra le tre mediane è affatto indifferente.

Per facilitare il calcolo della sovrapposizione degli effetti è opportuno riferire la sezione ad assi in generale obliqui, che conviene scegliere nei due lati del triangolo bisecati rispettivamente dalle due mediane scelte quali linee d'azione delle componenti dello sforzo di taglio.

Per esempio per il triangolo ABC della fig. 50 potremmo scomporre un taglio generico qualunque T in due componenti T' e T'' agenti rispettivamente secondo le mediane M,B ed M,C (considerando positive tali componenti nel verso qui indicato per questi segmenti), e quindi assumere come assi coordinati x ed y rispettivamente i lati AB ed AC positivi in questi versi. La tensione τ_z in un punto generico verrà poi scomposta in due componenti τ_x e τ_y dirette secondo i due assi ed y ; e così diremo τ'_x e τ'_y le componenti della tensione provocata dal taglio T' e designeremo con τ''_x e τ''_y le analoghe grandezze dovute al taglio T'' .

Indicheremo poi con τ'_{ym} e τ''_{ym} i valori massimi di τ'_y e τ''_y , i quali com'è noto si verificano rispettivamente nei punti M_c ed M_b , e sono funzioni ben note di T' e T'' rispettivamente per quanto s'è studiato sopra. Se si applica direttamente per ciascuno dei tagli componenti la teoria approssimata, tenendo presenti le relative proprietà sopra studiate, con semplicissime considerazioni geometriche, le quali vengono omesse per brevità si ricava facilmente:

$$\left. \begin{aligned} \tau'_x &= \tau'_{ym} \cdot \frac{4}{c^2} x (c-x) \\ \tau'_y &= -\tau'_x \frac{y}{c-x} = -\tau'_{ym} \cdot \frac{4}{c^2} xy \\ \tau''_y &= \tau''_{ym} \cdot \frac{4}{b^2} y (b-y) \\ \tau''_x &= -\tau''_y \frac{x}{b-y} = -\tau''_{ym} \cdot \frac{4}{b^2} xy \end{aligned} \right\} \quad (371)$$

Le componenti τ_x e τ_y dovute al taglio risultante si otterranno poi ordinatamente sommando le precedenti, cioè:

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \tau'_x + \tau''_x \\ \tau_y &= \tau'_y + \tau''_y \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

La distribuzione delle tensioni tangenziali per un taglio generico è con ciò perfettamente determinata.

È utile notare che il rapporto

$$\frac{\tau'_y}{\tau''_x} = \frac{\tau'_{ym}}{\tau''_{ym}} \cdot \frac{b^2}{c^2}$$

resta costante in tutti i punti della sezione.

Può essere ora opportuno studiare le traiettorie delle τ_x , le quali verranno pure riferite agli stessi assi x ed y (in generale obliqui).

La loro equazione differenziale si può scrivere subito, per le (371) e (372).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_y}{\tau_x} = \frac{\tau''_{ym} \frac{y}{b^2} (b-y) - \tau'_{ym} \frac{xy}{c^2}}{\tau'_{xm} \frac{x}{c^2} (c-x) - \tau''_{ym} \frac{xy}{b^2}} \quad (373)$$

Non è facile separare le variabili in questa equazione differenziale, per poi passare a quella in termini finiti. Essa però può sempre essere utile per costruire traiettorie delle τ_x graficamente per approssimazione con metodo progressivo.

A questo scopo sono pure utili le isocline delle traiettorie suddette.

Si noti che il rapporto $dy/dx = \tau_y/\tau_x$ si può sempre considerare come l'inclinazione i della tangente alla traiettoria, inclinazione valutata in assi obliqui, in modo del tutto analogo a quello che serve a valutarla in assi ortogonali.

Per un dato valore di i la (373) ci fornisce l'equazione della corrispondente isoclina, equazione che, raccogliendo i termini simili e facendo sparire i denominatori, diviene:

$$\tau''_{ym} \frac{y}{b^2} (b-y+ix) - \tau'_{ym} \frac{x}{c^2} (ic-ix+y) = 0 \quad (374)$$

E poichè questa equazione è di 2.^o grado, la traiettoria generica è una conica; si verifica subito ch'essa passa per i tre vertici ABC ; e poi è facile vedere che essa è un'iperbole, poichè ha gli asintoti reali.

Complessivamente le parallele agli asintoti condotte per l'origine A sono rappresentate dall'equazione.

$$\left(\tau''_{ym} \frac{y}{b^2} + \tau'_{ym} \frac{x}{c^2} \right) (y-ix) = 0$$

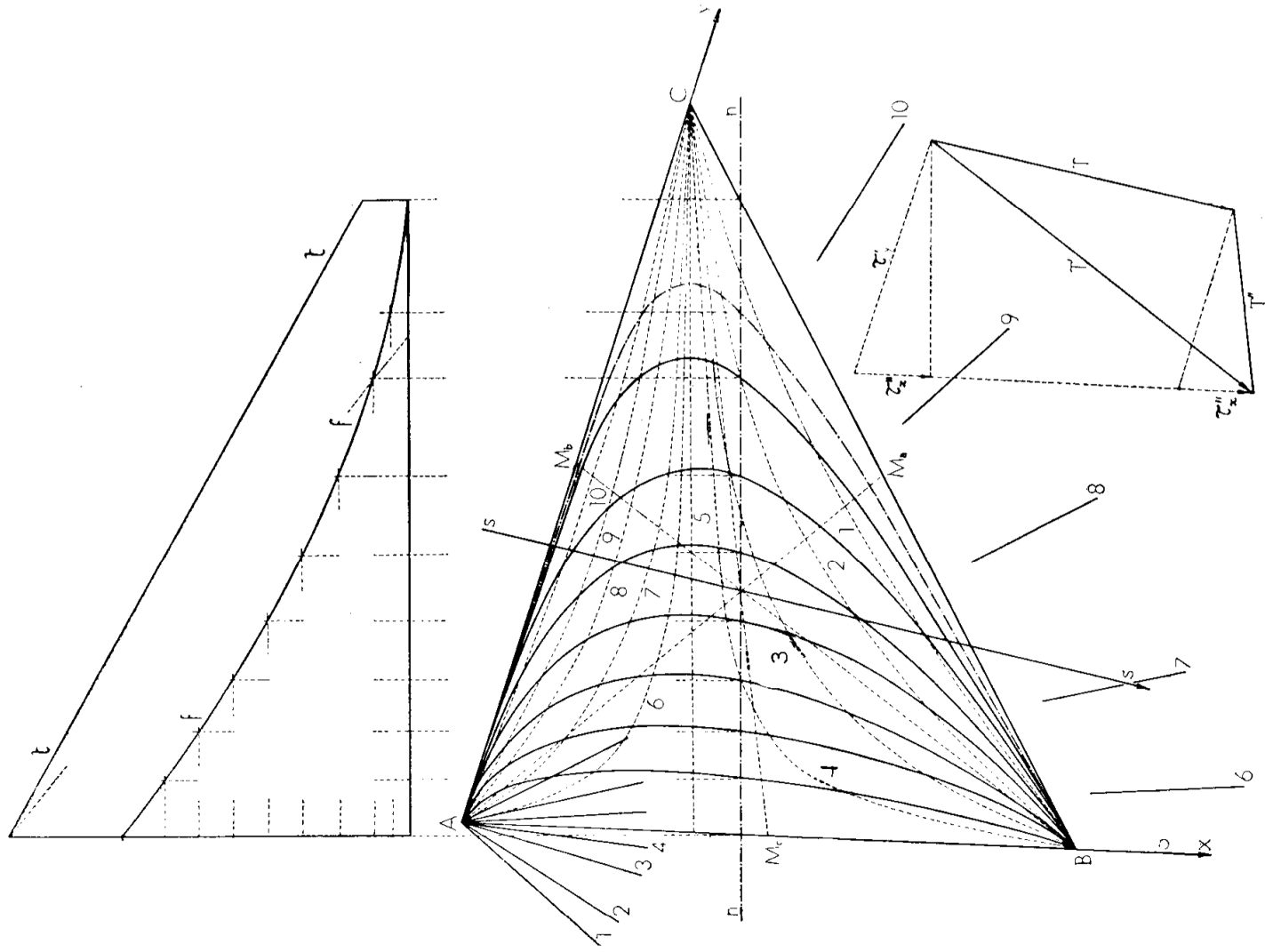


Fig. 51

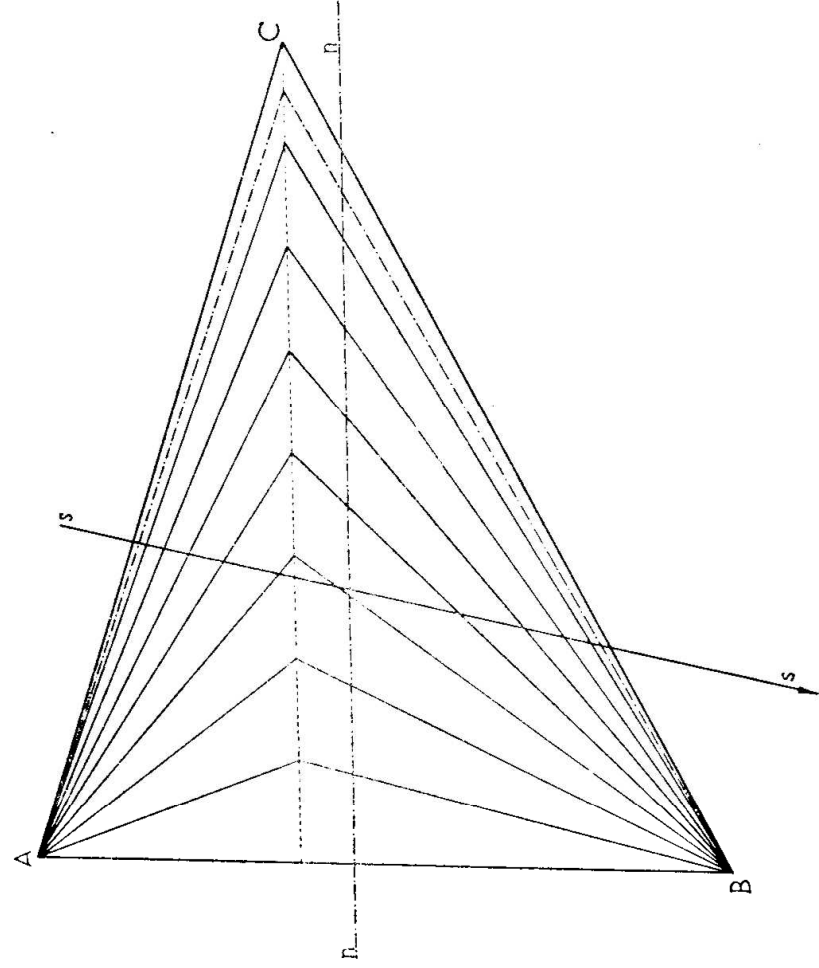


Fig. 51 bis

e perciò sono le due rette reali :

$$y = ix$$

e

$$y = -\frac{\tau'_{ym}}{\tau''_{ym}} \frac{b^2}{c^2} x = -\frac{\tau'_{y'}}{\tau''_{y'}} x \quad [\text{v. (371)}]$$

La prima ha dunque la stessa inclinazione i che caratterizza l'isocelina considerata. Inoltre con semplici rilievi di carattere geometrico, risulta che la seconda retta è parallela all'asse neutro (coniugato di s rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione).

Infatti il rapporto $\tau'_{y'} : \tau''_{y'}$ che compare nell'ultima equazione, e che risulta costante, come si vede dalle (371), si può calcolare in particolare nel baricentro O , ove le tensioni totali τ' e τ'' stanno tra loro nel rapporto degli sforzi di taglio T' e T'' che rispettivamente le provocano.

Ci riferiamo alla fig. 51 ove si ha la sezione ABC già rappresentata nelle figure precedenti, soggetta, secondo l'asse di sollecitazione s , allo sforzo di taglio T , scomposto nei due T' e T'' agenti rispettivamente secondo le mediane BM_b e CM_c ; la scomposizione è indicata nel diagramma segnato a parte, a destra in basso, ivi pure sono costruiti due segmenti proporzionali alle $\tau'_{y'}$ e $\tau''_{y'}$ nel baricentro O (assimilando T' e T'' alle τ' e τ''). Dalla figura risulta che tali segmenti sono :

$$\frac{T' b}{m_b} \quad \text{e} \quad \frac{T'' c}{m_c}$$

(essendo b e c i lati, m_b ed m_c le mediane rispettive).

D'altra parte possiamo ritenere che T' e T'' agiscano con uno stesso braccio di leva rispetto alla sezione, in modo da provocare in essa due momenti flettenti ad essi proporzionali; allora le rotazioni da essi momenti provocate intorno ai rispettivi assi neutri stanno fra loro nel rapporto delle due quantità :

$$\frac{T'}{m_b h_b} \quad \text{e} \quad \frac{T''}{m_c h_c}$$

(ove h_b ed h_c sono le altezze relative ai lati b e c), ciò si ricava da quanto è ben noto dalla teoria della flessione e dalla statica grafica; ma poichè si ha evidentemente :

$$b h_b = c h_c ;$$

ne risulta che le due ultime quantità sono proporzionali alle due precedenti, e perciò alle τ'_y e τ''_y , le quali d'altra parte sono parallele agli assi neutri dovuti ai momenti parziali rispettivamente; ne consegue che la somma geometrica di queste due tensioni deve essere parallela alla rotazione provocata dal momento flettente risultante (agente esso pure secondo s), e perciò parallela all'asse neutro, relativo allo stesso momento risultante, come si vede in fig. 51, e come volevamo dimostrare.

Se ne deduce dunque che il secondo asintoto di ciascuna delle dette iperboli isocline è parallelo all'asse neutro.

Tali iperboli costituiscono dunque il fascio di coniche passanti per i tre vertici ABC e per il punto all'infinito dell'asse neutro. Sarebbe facile vedere che i centri di tali iperboli stanno sulla parabola che passa per i punti di mezzo dei tre lati e per i tre punti che si ottengono proiettando parallelamente all'asse neutro ciascun vertice sul lato opposto.

Nella stessa figura 51 sono segnate a tratti le iperboli isocline corrispondenti a dieci direzioni delle τ_x , indicate con rette uscenti dal vertice A , e contraddistinte coi numeri rispettivi; poi furono segnate a linea continua sette traiettorie delle τ_x , suddividenti l'asse neutro in otto tratti attraversati da ugual flusso di τ_x : il tratto più prossimo al vertice C , più ampio degli altri per la rarefazione del flusso, fu poi ancora suddiviso in due tratti di flusso metà, mediante una traiettoria segnata a tratti e punti, questa suddivisione del flusso sull'asse neutro fu eseguita al solito mediante i diagrammi t e f analoghi a quelli delle fig. 46 e 47.

Nella fig. 51 bis per la stessa sezione e per lo stesso asse di sollecitazione si tracciarono le traiettorie delle τ_x che si dedurrebbero dalla teoria approssimata direttamente applicata.

Confrontando le figure 51 e 51 bis si possono trarre conclusioni analoghe a quelle ricavate dal confronto della fig. 46 colla 46 bis e della 47 colla 47 bis, alle quali rimandiamo, poichè non dovremmo che ripetere ciò che colà si disse, a proposito del modo più conveniente per applicare la teoria approssimata.

Sezione a corona circolare.

Vogliamo ora calcolare la distribuzione delle tensioni tangenziali provocate dal taglio in una sezione a corona circolare di spessore relativamente piccolo rispetto al raggio esterno.

In tale ipotesi, dato che le circonferenze di contorno sono entrambe traiettorie delle τ_x , potremo ritenere che pure tutte le altre

traiettorie delle τ_z siano circonferenze concentriche colle prime. L' approssimazione così ottenuta sarà evidentemente tanto più grande, quanto più piccolo sarà lo spessore della corona circolare, in confronto del raggio esterno.

Tale distribuzione di traiettorie si scosta da quella effettiva particolarmente nelle regioni prossime alle estremità dell' asse di sollecitazione, poichè in tali estremi (come S) devono convergere tutte le traiettorie, con andamento analogo a quello indicato nella fig. 52 a sinistra. Però in tali regioni per quanto è già noto, le tensioni tangenziali sono piccolissime: quindi dobbiamo ritenere che l' approssimazione sia pochissimo influenzata dallo scostamento descritto; e potremo quindi basare il nostro calcolo sul già ammesso andamento circolare delle traiettorie rappresentato nella fig. 52 a destra.

Ciò posto, la tensione tangenziale τ_z deve in ogni punto riuscire normale al raggio. Per determinarla in un punto generico P situato a distanza r dal centro O , su un raggio formante l'angolo α coll'asse di sollecitazione $s \equiv y$, consideriamo la *striscia di flusso* (tratteggiata in fig. 52) compresa tra due traiettorie circolari a distanza dr , adiacenti a P , e limitata tra l'asse y e l'elemento radiale dr passante per P . A questa striscia applichiamo il *teorema della divergenza*, (o *del flusso*), già citato ed applicato a pag. 349 a base della teoria approssimata e già esplicitamente dimostrato al N.º 12 pagg. 38 e seg.ª colla formula di Gauss generalizzata.

Ricordiamo di aver trovato con la (320) a pag. 332 l' espressione della divergenza della τ_z dovuta al taglio \bar{T} ; essa risulta:

$$\text{div. } \tau_z = -\frac{T_y}{I_x} y$$

Perciò l' integrale della divergenza esteso all' area considerata risulta dal fattore $T_y : I_x$ moltiplicato per il momento statico dell' area stessa rispetto all' asse x . Esso deve poi essere uguale al flusso di τ_z uscente dal contorno dell' area stessa. Per la striscia di flusso considerata, essendo τ_z nulla sull' asse y e tangente ai bordi circolari, il flusso uscente si riduce a: $-\tau_z dr$.

Perciò, ricordando dalla statica grafica l' espressione del momento statico di un arco circolare rispetto ad un diametro si trova:

$$\tau_z \cdot dr = \frac{T}{I_x} r^2 \text{ sen } \alpha \cdot dr$$

ossia :

$$\tau_z = \frac{T}{I_y} r^2 \operatorname{sen} \alpha \tag{375}$$

Proiettando sui due assi si ottiene poi facilmente :

$$\tau_{yz} = \frac{T}{I_x} x^2 \quad ; \quad \tau_{xz} = -\frac{T}{I_y} xy \tag{376}$$

[ricordando che

$$I_x = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) \quad \text{v. fig. 52}]$$

Il valore massimo di τ_z si ha per $r = r_2$ e per $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\tau_{z \max} = \frac{T}{I_x} r_2^2$$

Essa risulta uguale alla tensione media moltiplicata per il qua-

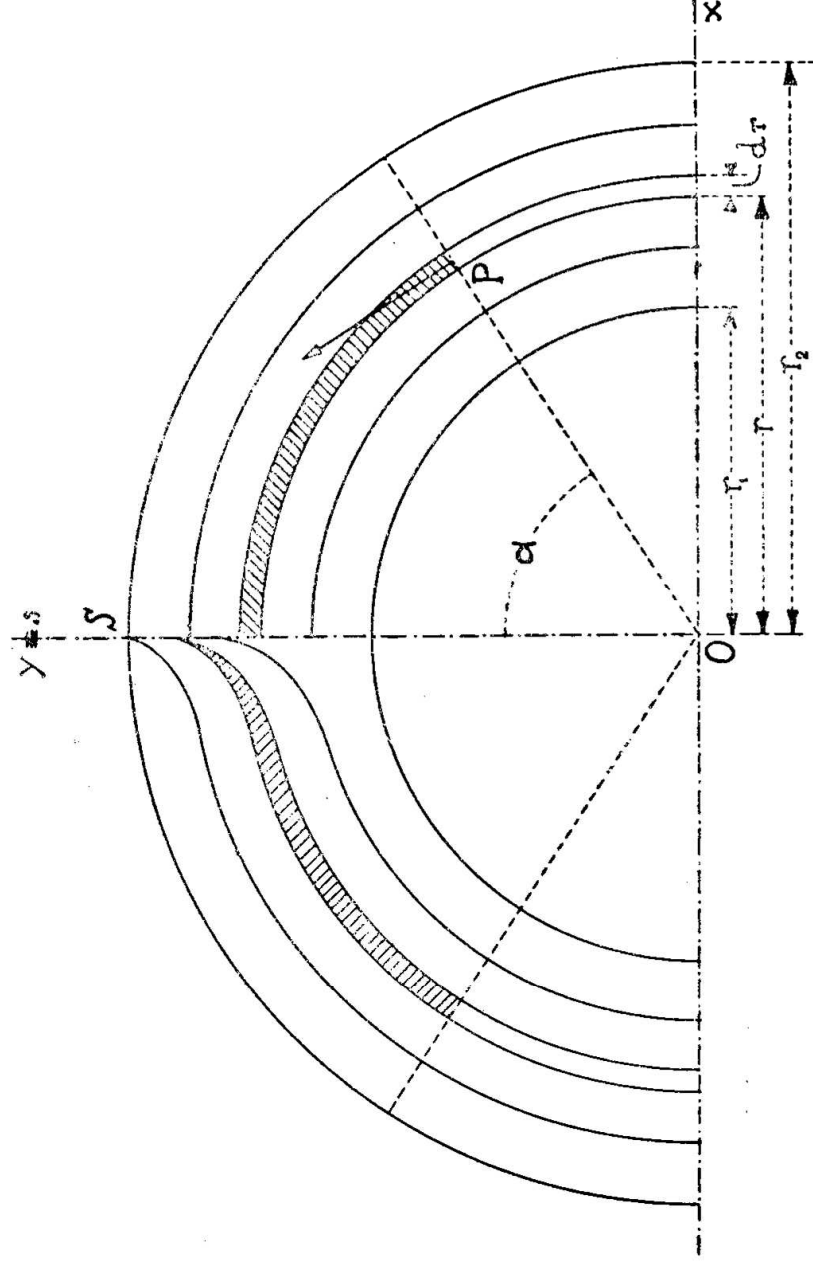


Fig. 52

drato del rapporto del raggio esterno al raggio di inerzia della sezione; (e quest'ultimo com'è noto è la metà dell'ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti i due raggi dei cerchi di contorno esterno ed interno).

Per valutare la probabilità che l'approssimazione di questo calcolo sbrighativo sia grande, possiamo confrontare la striscia di flusso a corona circolare elementare tratteggiata a destra nella fig. 52 con la corrispondente striscia convergente in S , indicata a sinistra nella stessa figura 52, secondo ciò che si disse a pag. 400.

Si nota così che la striscia rappresentata a sinistra ha gli elementi terminali a distanze dall'asse x maggiori di quelle dei corrispondenti elementi della striscia rappresentata a destra; ma però poichè detta striscia a sinistra termina in S con un angolo molto acuto, i suoi elementi terminali hanno pure aree minori dei corrispondenti della striscia a destra; i due fatti si compensano in parte, in modo che il momento statico della striscia stessa [che compare nell'espressione della τ_z (375)] viene pochissimo influenzato dalla sostituzione per approssimazione della striscia circolare a quella effettiva. Ciò ben inteso è valido in punti generici della sezione, ad esclusione della zona immediatamente limitrofa al punto S ed al suo simetrico; tale esclusione ha poi ben poca importanza, in quanto nella detta zona i valori di τ_z sono sempre assai piccoli.

Possiamo perciò ritenere che sia assai soddisfacente l'approssimazione fornita dalla (375). Tale approssimazione è poi grandissima per valori relativamente piccolissimi dello spessore, come si ha nel caso di corpi cilindrici di caldaie, o tubi di condotte a grande diametro.

In tal caso, indicando con s lo spessore, si può ritenere r costante ed uguale al raggio del cerchio medio (a metà spessore) ed assumere:

$$I_x = \pi r s \cdot r^2 = \pi r^3 s;$$

quindi la (375) diviene:

$$\tau_z = \frac{T}{\pi r s} \operatorname{sen} \alpha \quad (377)$$

e si deve notare che il coefficiente di $\operatorname{sen} \alpha$ rappresenta il *doppio della tensione media*.

L'ultima formula si può anche scrivere:

$$\tau_z s = \frac{T}{\pi r} \operatorname{sen} \alpha$$

ed allora il primo membro rappresenta la tensione tangenziale per unità di lunghezza sul cerchio mediano della corona. Sotto questa forma la relazione si applica per calcolare la tensione tangenziale per unità di lunghezza, provocata dal taglio in un involucro di parete dirigibile di forma cilindrica circolare.

Dalla (375) o dalle (376) possiamo ricavare la rotazione della $\bar{\tau}_z$, (che indichiamo con $\text{rot } \tau_z$) e si trova, in duplice forma:

$$2 \text{ rot } \tau_z = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_z}{\partial r} + \frac{\tau_z}{r} = \frac{3T}{I_x} x \quad (378)$$

È notevole che con questa distribuzione approssimata si ottenga la rot τ_z proporzionale alla x , sia pure con un coefficiente diverso da quello trovato nella (322) per la distribuzione esatta.

Influenza del coefficiente di Poisson sulla distribuzione delle tensioni $\bar{\tau}_z$ dovute al taglio.

Riscontriamo ora le formole (301), (302), (304), (306), (316), (322), (324), (325).

Da tutte risulta che la ripartizione *esatta* delle tensioni tangenziali $\bar{\tau}_z$ dovute al taglio dipende dal valore del *coefficiente Poisson* $\frac{1}{m}$.

Ciò costituisce una singolarità della sollecitazione a taglio; infatti per gli altri casi di *sollecitazione semplice* (casi particolari del problema di Saint-Venant) la distribuzione delle tensioni interne (normali o tangenziali), *non* dipende affatto dal valore di m .

Riscontrando poi le formole relative alla *trattazione approssimata del problema del taglio* (N.º 55, da pag. 349) si vede che la relativa distribuzione delle τ_z *non* dipende da m .

Questa ulteriore discrepanza costituisce un'altro aspetto ed un'altro conseguenza dell'ipotesi semplificativa, che sta a base della trattazione approssimata.

Tensioni nei punti angolosi rientranti (o concavi) del contorno.

Prima di chiudere questo studio delle tensioni tangenziali dobbiamo riferire che secondo i risultati della teoria esatta (da noi solo parzialmente riportata), se il contorno della sezione presenta dei punti angolosi *rientranti*, cioè a dire *concavi verso l'esterno*, in essi solo la tensione tangenziale, sia nel caso della torsione, sia nel caso del taglio, assume un valore infinito. Nella realtà fisica, poichè i materiali non possono sopportare tensioni infinite, in vicinanza di detti punti rientranti il materiale si snerva, diviene inadatto ad assumere su di sè la tensione, sicchè la sezione corrispondente al materiale *non snervato*, sulla quale si ha l'effettiva distribuzione delle tensioni,

in corrispondenza di ciascun punto rientrante viene limitata da una brevissima curva di raccordo analoga a quella indicata nell'unita fig. 53, in modo che nel contorno *effettivo* della sezione *realtamente reagente* mancano punti angolosi rientranti, e perciò le tensioni tangenziali assumono ovunque valori finiti. Di questo fatto si può tenere opportunamente conto nel tracciamento approssimato delle traiettorie delle τ_x , le quali con una conveniente applicazione del teorema della divergenza, ci possono fornire, come sappiamo, la distribuzione delle stesse τ_x .

E qui torna acconcio ricordare ciò che si espone al N.º 42, nelle "osservazioni sulle deformazioni anelastiche", e particolarmente ciò ch'è esposto a pag. 151 e seg.^{ti}, a proposito di deformazioni anelastiche (dovute a tensioni oltrepassanti i limiti di elasticità) atte a provocare coazioni elastiche.

Come negli esempi là riferiti, anche nel caso qui considerato, le deformazioni anelastiche permanenti provocate *nelle zone snervate* (fig. 53), producono una coazione elastica, che permane anche al cessare delle forze esterne.

La determinazione delle tensioni dovute a questa coazione elastica non sarebbe difficile, secondo le direttive esposte ai N.ºi 41 e 42; ma poichè essa esorbita dalla natura e dai fini tecnici di questo libro, dobbiamo qui ritenere di aver esaurito l'argomento, coll'avere dato ragione dell'esistenza della coazione sopradetta.

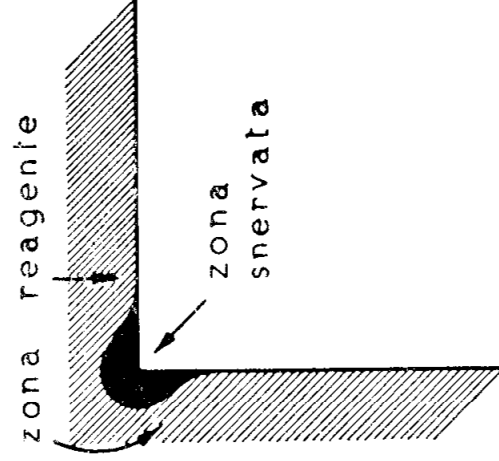


Fig. 53.

56. TRATTAZIONE APPROSSIMATA DEL CASO DI FLESSIONE, TAGLIO E TORSIONE SIMULTANEE.

In principio del N.º 54 assunto come origine il baricentro della sezione, e descritta colle (299) la deformazione denominata *flessione composta*, abbiamo trovato colle (306), che ad essa corrispondono sollecitazioni simultanee di flessione, taglio e torsione, e che i valori delle tensioni dovute alle due ultime dipendono dalla funzione Ψ , definita dalle (300), (301), (302).

Dall'esposizione di tali calcoli risulta che l'ipotesi dell'origine coincidente col baricentro non è ivi utilizzata; essa perciò può essere