

Passiamo ora ad esporre la soluzione approssimata del problema del taglio, già preannunziata più sopra, a pag. 331.

### 55. TRATTAZIONE APPROSSIMATA DEL PROBLEMA DEL TAGLIO.

Questa trattazione consiste nel ricercare direttamente il valor medio della  $\tau_{yz}$  lungo una corda generica condotta nella sezione parallelamente all'asse  $x$ , a distanza  $y$  da questo. La ricerca del detto valor medio si può fare rigorosamente; il calcolo diviene solo approssimato poi, in quanto si identifica tale valor medio col valore effettivo locale della  $\tau_{yz}$ .

In alcuni trattati di elasticità tecnica, in questa trattazione approssimata si ritiene inoltre  $\tau_{yz} = 0$ ; noi qui vedremo che si può fare a meno di introdurre una nuova ipotesi semplificativa (fonte di inesattezze) oltre a quella precedente, or ora enunciata, e che è facile determinare invece la  $\tau_{yz}$  in funzione del definito valor medio di  $\tau_{yz}$  su ogni corda  $y = \text{costante}$ .

Consideriamo una sezione generica riferita ai soliti assi  $x$  ed  $y$  baricentrici, ma del resto qualunque (anche non principali di inerzia) come all'inizio del n.º 54. Sia  $x$  l'asse neutro: l'asse di sollecitazione — parallelo al taglio complessivo di componenti  $T_x$  e  $T_y$  — sarà congiunto dell'asse  $x$  rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione, come risulta del resto pure dalla 4ª e dalla 5ª delle (306) e dalla (308). (V. fig. 37). Si consideri la detta corda contenente i punti a distanza  $y$  dall'asse  $x$ ; e sia  $b$  la sua lunghezza.

Per tale corda conduciamo un piano parallelo all'asse geometrico  $z$  (sezione longitudinale) e, consideriamo la porzione  $V_0$  di cilindro (tratteggiata in figura) compresa tra questo piano, la superficie dell'asse  $z$  rispetto a detto piano, e due sezioni trasversali a distanza  $dz$ : v. la fig. 37 ove a destra è segnata la proiezione sul piano  $yz$  del tratto di cilindro limitato tra le dette sezioni trasversali.

Studiamo l'equilibrio della porzione  $V_0$  ora definita, la quale sulla faccia piana di sezione longitudinale, rettangolo di lati  $b$  e  $dz$ , è sollecitata dalla tensione tangenziale  $-\tau_{yz}$ , e quindi in totale, indicando con  $\tau_{yz}$  il valore medio della  $\tau_{yz}$ , lo sforzo tangenziale complessivo sul detto rettangolo è:

$$-\tau_{yz} \cdot b \cdot dz$$

ed il segno — indica che se  $\tau_{yz}$  è positiva, detto sforzo, (agente sulla porzione  $V_0$ ) è diretto nel senso delle  $z$  negative. Per l'equilibrio

Del taglio  $T$   
complesso è  
dato con solo la  
divisione; rice-  
vete  $b \cdot y$  col po-  
sitivo  $1/y$ ;  
rimoto, dalla  
lea distal-  
ve di inerzia  
(p. 355 e 364)

colle' effettive  
retta d'azione del  
taglio, non data  
più in sola  
divisione.

della porzione  $V_0$  tale sforzo deve essere uguale ed opposto al differenziale, dovuto all'incremento  $dz$ , della risultante degli sforzi elementari di trazione normale su tutta l'area  $A_0$  (tratteggiata in fig. 37 a sinistra) della porzione di sezione trasversale limitante lateralmente il volume  $V_0$ .

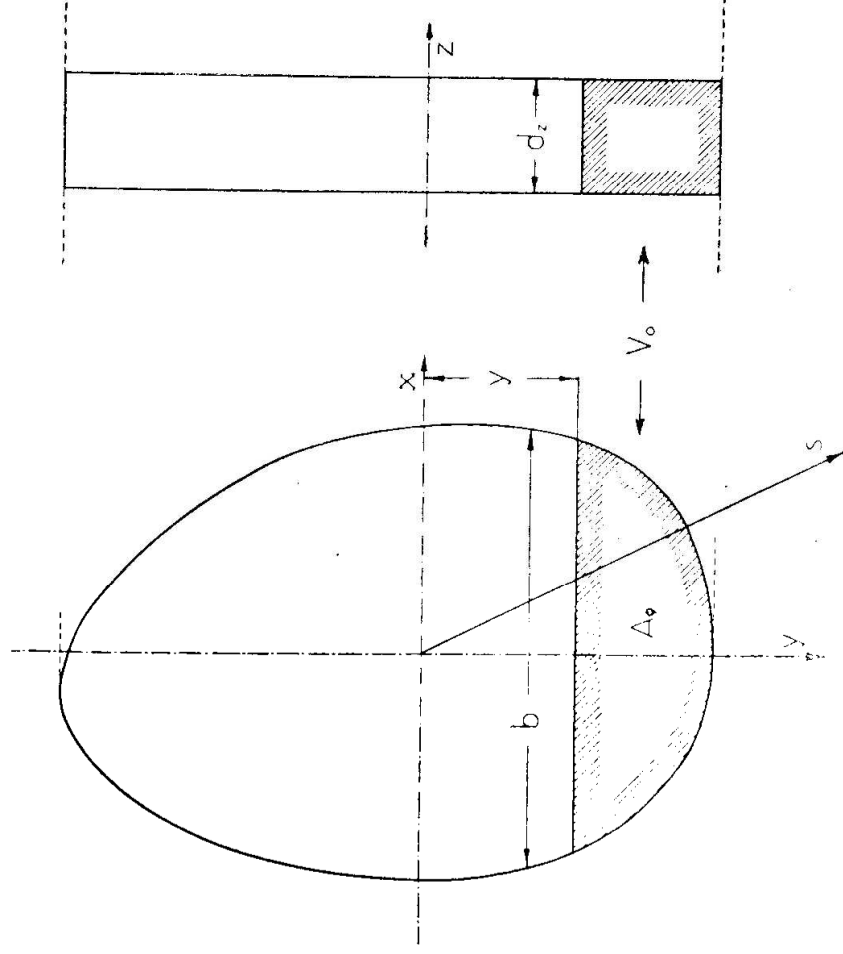


Fig. 37

Si deve quindi avere :

$$\tau_{yz} \cdot b \cdot dz = \frac{\partial}{\partial z} \left| \int_{A_0} \sigma_z dA \right| dz = dz \int_{A_0} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA$$

intendendo l'integrale esteso all'area  $A_0$ . È ora opportuno osservare che secondo la (303) e la (305), la 4<sup>a</sup> della (306), che è l'equazione dei momenti intorno all'asse  $x$ , ci fornisce la 1<sup>a</sup> delle (316), anche nel caso generale, in cui l'asse  $y$  non sia di simmetria per la sezione.

Già patibile momento torcente rispetto all'asse  $x$  -  $\tau_{yz}$  momento di torsione  
 valore del momento torcente  $\tau_{yz} = 0$  (l'asse  $x$  è di simmetria)  
 In  $\tau_{yz}$  non si può avere nulla di nuovo in senso



Si ritrova così immediatamente la (330), da cui, come sopra, si ricava la (330 bis) (1).

E' utile notare che il complemento dell'area  $A_0$  a tutta l'area della sezione trasversale — ossia la porzione di sezione non tratteggiata in figura — ha, rispetto all'asse  $x$  un momento statico uguale a  $-\mathcal{I}C_0$ , (poichè il momento statico di tutta l'area rispetto allo stesso asse  $x$  baricentrico è nullo); e detti momenti statici  $\mathcal{I}C_0$  e  $-\mathcal{I}C_0$  si devono intendere applicati nei *centri relativi* dell'asse  $x$  rispetto alle due dette aree parziali, come insegna la statica: detti momenti, considerati come forze normali alla sezione, costituiscono una coppia, parallela all'asse  $s$  di sollecitazione, coniugato di  $x$ : di questa coppia il momento rispetto all'asse  $x$  è precisamente il momento d'inerzia  $I_x$  della sezione rispetto allo stesso asse  $x$  (computando misurando le distanze normalmente a questo stesso asse).

Ne consegue che il rapporto:

$$\frac{I_x}{\mathcal{I}C_0} = h_0 \quad (331)$$

rappresenta la *distanza, misurata normalmente all'asse  $x$  tra i centri relativi dello stesso asse  $x$  rispetto alle due parti in cui la corda  $b$  considerata, di ordinata  $y$ , divide la sezione.*

Con questa osservazione la (330 bis) si può pure scrivere come segue:

$$\tau_{y/z} = \frac{T_y}{bh_0} \quad (332)$$

Questa nuova forma è utile particolarmente perchè la distanza  $h_0$  si può ricavare facilmente colle ben note costruzioni della statica grafica, alle quali rimandiamo.

Dalla (330 bis) risulta che  $\tau_{y/z}$  diviene massimo per quel valore di  $y$ , per cui si abbia:

$$\frac{\partial \tau_{y/z}}{\partial y} = 0 \quad \text{ovvero} \quad -b \frac{\partial \mathcal{I}C_0}{\partial y} = \mathcal{I}C_0 \frac{\partial b}{\partial y}$$

La  $\frac{\partial \mathcal{I}C_0}{\partial y}$  è sempre nulla per  $y=0$ , cioè sull'asse  $x$ ; in molti casi <sup>particolarmente per sezioni simmetriche</sup> e perciò commissimi nelle applicazioni si ha pure, per  $y=0$ ,  $\frac{\partial b}{\partial y} = 0$  e perciò in tali casi la  $\tau_{y/z}$  diviene massima proprio sull'asse neutro  $x$ . <sup>ovvero, come si vede, in tutti i casi di simmetria.</sup>

(1) Per questa dimostrazione cfr. la mia nota: « *Ritorni sulla trattazione approssimata delle travi soggette a sforzo di taglio* ». Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Vol. LXV, 1930 - VIII.

La  $\tau_{yz}$  poi si annulla nei punti del contorno più lontani dall'asse  $x$ ; poichè quando la corda  $b$  si avvicina indefinitivamente a tali punti, se pure la lunghezza  $b$  divenga infinitesima, il momento  $M_0$  diviene infinitesimo di ordine superiore.

Come già si disse, possiamo poi determinare la  $\tau_{zx}$  agli estremi della corda  $b$  considerata, colla condizione che la  $\tau_z$  (risultante di  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ ) riesca tangente al contorno. Perciò, se si indica con  $\alpha$  l'angolo che coll'asse delle  $x$  forma la tangente al contorno nel punto considerato, avremo ivi:

$$\tau_{zx} = \tau_{yz} \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\tau_{zx} = \frac{y}{b} \tau_z$$

(333)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0$$

Quanto poi alla distribuzione della  $\tau_{zx}$  lungo la detta corda nell'interno della sezione, dobbiamo richiamare la (151), (equazione indefinita dell'equilibrio), ed osservare che la  $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$  è sempre funzione della sola  $y$ , e che lo stesso qui si deve affermare della  $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$ , poichè per approssimazione riteniamo che la  $\tau_{yz}$  sia costante lungo la corda, ed uguale al valore medio  $\tau_{yz}$ .

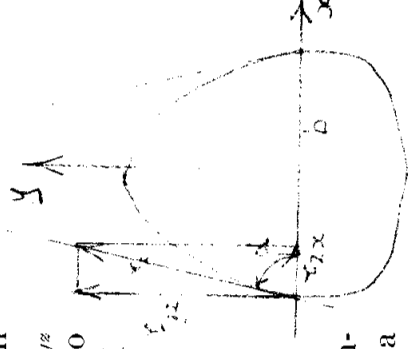
(1) Dalla detta (151) risulta dunque che pure la  $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}$  è funzione della sola  $y$ , e che perciò resta costante per un dato valore di  $y$ : da ciò consegue dunque che *lungo la detta corda la  $\tau_{zx}$  varia linearmente colla  $x$* ; perciò essa risulta determinata in ogni punto della corda, quando si siano calcolati i suoi valori ai due estremi di questa.

Ne consegue che *le tensioni tangenziali totali  $\tau_z$  nei punti della detta corda convergono tutte nel punto  $N$  d'intersezione delle tangenti al contorno nei due punti estremi della corda stessa*.

In alcuni trattati questo fatto viene enunciato ed ammesso come una ulteriore ipotesi semplificativa; mentre dalla precedente dimostrazione risulta chiaramente che il fatto stesso, in armonia con la terza equazione indefinita dell'equilibrio, è conseguenza dell'unica precedente ipotesi semplificativa fatta a pag. 347, col sostituire il vero valore di  $\tau_{yz}$  con il suo valor medio lungo la corda generica  $y = \text{costante}$ .

Se indichiamo con  $P$  un punto generico di una corda  $y = \text{costante}$ , al variare di  $P$  lungo la stessa corda la  $\tau_z$  si mantiene dunque diretta secondo il raggio che unisce  $P$  col punto  $N$  sopra definito in relazione con la detta corda. Indichiamo ora con  $\alpha$  l'angolo che il raggio  $PN$  (o la  $\tau_z$ ) forma con l'asse  $x$ . Da quanto precede, risulta che la (333), inizialmente stabilita per i punti del contorno, vale pure

(1)  $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \tau_z \operatorname{ctg} \alpha$



per qualsiasi punto generico  $P$  (anche interno) della sezione e che, al variare di  $P$  lungo la detta corda, la  $\cotg \alpha$  (come la  $\tau_{yz}$ ) varia linearmente con l'ascissa  $x$  del punto considerato  $P$ .

Il valor medio della  $\tau_{yz}$  lungo la corda si avrà nel punto  $M$  di mezzo di essa, e quindi si otterrà dalla (333) ponendo in luogo di  $\alpha$  l'angolo  $\alpha_m$  che coll'asse delle  $x$  forma la tangente in  $M$  alla linea  $\mu$  luogo dei punti di mezzo delle corde parallele all'asse  $x$  (V. fig. 38).

Indicando pure tale valor medio con  $\tau_{yz}$  si ha:

$$\tau_{yz} = \tau_{yz} \cotg \alpha_m \quad (333 \text{ bis})$$

È ora facile constatare che la distribuzione delle  $\tau_{yz}$  così individuata soddisfa, come deve essere, alle equazioni di equilibrio alla traslazione secondo i due assi  $x$  ed  $y$ .

Anzitutto la risultante di tutte le  $\tau_{yz} dA$  è uguale alla componente  $T_y$  del taglio secondo l'asse  $y$ : si

$$\int_A \tau_{yz} dA = \int_{y_1}^{y_2} \tau_{yz} b dy$$

ha infatti, essendo  $\tau_{yz}$  funzione della sola  $y$ :

$$\int_A \tau_{yz} dA = \frac{T_y}{T_x} \int_{y_1}^{y_2} \tau_{yz} b dy \quad (334)$$

ove  $y_1$  ed  $y_2$  sono i due valori estremi delle  $y$  al contorno ( $y_1 < 0$ ). Poi per la (330 bis) deve essere:

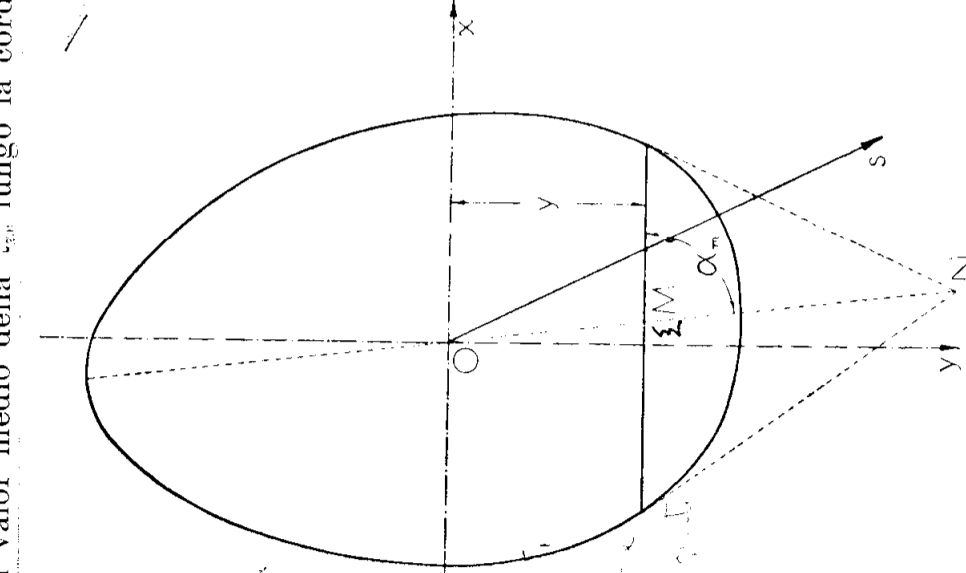


Fig. 38

*Handwritten notes:*  
 Invece di  $\tau_{yz}$  si può usare  $\tau_{xy}$ .  
 (333 bis)  
 (334)

Si noti poi che:

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} by^2 dy = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot by dy = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dMy$$

L'ultimo integrale si può eseguire per parti ponendo come *fat-  
tore da integrarsi*:

$$by dy = -d \varrho | \xi_0$$

ove il segno — sta ad esprimere che, colle convenzioni fatte più sopra,  
al crescere di  $y$ ,  $\varrho | \xi_0$  diminuisce.

Si ha quindi:

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} -y \varrho | \xi_0 \Big|_{y_1}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \varrho | \xi_0 dy$$

Ma la parentesi a secondo membro è nulla, perchè agli estremi  
dell'intervallo è nullo  $\varrho | \xi_0$ : perciò dalla (334) risulta, come deve essere:

$$\int_A \tau_{yz} dA = T_y$$

Possiamo ora calcolare la  $T_x$  come somma di tutte le  $\tau_{zx} dA$ ; a  
tale somma il contributo della striscia  $b dy$  è evidentemente:

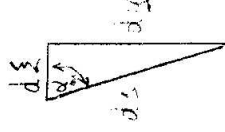
$$\tau_{zx} b dy = \tau_{yz} b \cotg \alpha_m dy$$

Se indichiamo con  $\xi$  la distanza dall'asse  $y$  del punto  $M$  medio  
della corda generica di ordinata  $y$ , e con  $s$  la lunghezza dell'arco  
generico della linea  $\mu$ , luogo di  $M$ , abbiamo:

$$\cotg \alpha_m \cdot dy = d\xi = \cos \alpha_m \cdot ds$$

e perciò detto contributo è:

$$\tau_{zx} b dy = \tau_{yz} b \cos \alpha_m \cdot ds$$



donde si ricava:

$$T_x = \int_{y_1}^{y_2} \tau_{xy} b dy = \int_{s_\mu} \tau_{xy} b \cos \alpha_m \cdot ds$$

e per la (330 bis):

$$T_x = \frac{T_y}{I_x} \int_{s_\mu} \mathcal{D}(\xi_0) \cos \alpha_m \cdot ds, \tag{335}$$

esteso l'ultimo integrale a tutta la lunghezza  $s_\mu$  della linea  $\mu$ .  
 Calcoliamo ora il momento centrifugo  $I_{xy}$  della sezione rispetto ai due assi  $x$  ed  $y$ : come si sa dalla statica, esso è espresso da:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_{y_1}^{y_2} by \xi dy; \quad \text{b} = \text{larghezza della sezione } x \text{ ad } y; \quad \xi = \text{distanza dell'asse } x \text{ dal centro della sezione } dA.$$

anche questo integrale si può eseguire per parti, assumendo come fattore da integrarsi:

$$by dy = -d \mathcal{D}(\xi_0)$$

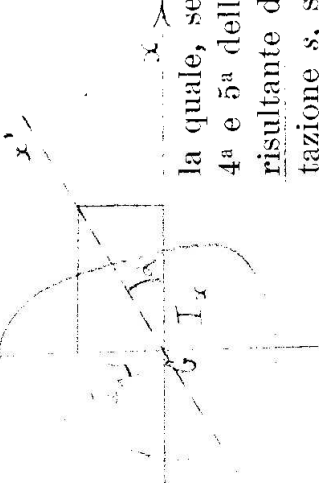
e tenendo conto della precedente espressione di  $d\xi$ , si ha:

$$I_{xy} = \left[ -\xi \mathcal{D}(\xi_0) \right]_{y_1}^{y_2} + \int_{s_\mu} \mathcal{D}(\xi_0) \cos \alpha_m \cdot ds;$$

ma anche qui la parentesi è zero, perchè  $\mathcal{D}(\xi_0)$  si annulla agli estremi dell'intervallo: perciò la (335) ci fornisce:

$$T_x = T_y \frac{I_{xy}}{I_x}$$

(336)



la quale, secondo quanto è noto dalla statica, e che risulta pure dalle 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> delle (306) ci esprime che lo sforzo di taglio  $T$  complessivo, risultante di  $T_x$  e  $T_y$  è realmente diretto secondo l'asse di sollecitazione  $s$ , sicchè risulta soddisfatta pure la (308).

E' facile poi calcolare il momento  $M_z$  degli sforzi tangenziali ele-

*Se G è il centro di gravità della sezione, si calcola il momento Mz degli sforzi tangenziali (Tx) e (Ty) rispetto all'asse z. Per fare questo si moltiplica per ogni elemento di area dA il suo momento rispetto all'asse z (Iz) per lo sforzo tangenziale (Tx) e (Ty) e si integra tutto il momento rispetto all'asse z. Il momento Mz è dato da Mz = Ixy (Tx/Ix + Ty/Iy) = Ixy T/I.*



mentari  $\tau_z dA$  rispetto all'asse  $z$ ; ciò si fa agevolmente mediante l'ultima delle (183), pag. 212.

Poichè la  $\tau_{yz} \equiv \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z) dA$  si è supposta costante lungo ciascuna corda, le forze elementari  $\tau_{yz} dA$  per una striscia elementare di ordinata  $y$  e di spessore  $dy$  hanno una risultante  $\tau_{yz} b dy$ , applicata nel punto  $M$  medio della corda; il momento di questa risultante rispetto a  $z$  è dunque:  $\tau_{yz} b \xi dy$ ; d'altra parte le forze  $\tau_{zx} dA$  per gli elementi della detta striscia, sono tutte a distanza  $y$  dall'asse neutro, e perciò il loro momento rispetto a  $z$  è:

$$-\tau_{yz} b y dy = -\tau_{yz} b y \cotg \alpha_m dy.$$

Ne consegue che, applicando la citata espressione di  $M_z$  (183) e sostituendo a  $\tau_{yz}$  la sua nota espressione (330 bis), si trova in questo caso:

$$M_z = \frac{T_y}{I_x} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{D}(\xi - y \cotg \alpha_m) dy \quad (336 \text{ bis})$$

L'integrale dipende solo dalla forma della sezione e si può agevolmente calcolare, sia pure con metodi approssimati.

Dividendo  $M_z$  per  $T_y$  si trova una lunghezza  $x_0 = \frac{M_z}{T_y}$ , che rappresenta l'ascissa del punto  $X_0$ , in cui l'asse  $x$  viene incontrato dalla risultante  $\overline{T}$  delle  $\tau_z$  aventi la distribuzione sopra descritta.

TRAIETTORIE DELLE TENSIONI TANGENZIALI  $\tau_z$ .

Tali traiettorie sono individuate e caratterizzate dal fatto che in ogni punto di una corda parallela ad  $x$  la tangente ad una traiettoria deve concorrere nel punto  $N$  colle tangenti al contorno agli estremi della corda stessa.

Poichè riteniamo  $\tau_{yz}$  costante lungo una stessa corda parallela ad  $x$ , ne consegue che il *flusso della  $\tau_z$*  è uniformemente distribuito su ognuna delle dette corde, e da ciò deriva che una stessa traiettoria taglia in un rapporto costante tutte le corde parallele all'asse  $x$ . Perciò tali traiettorie si possono considerare come riferite al contorno in una corrispondenza in certo modo analoga ad un' *affinità in di-*

d'origine le direzioni  
 della tensione  $\tau_z$   
 si riferisce ad una  
 forza  $T$  tangenziale  
 si riferisce per  $X_0$   
 punto  $N$  dove si  
 incontrano le  
 (vedi pure p. 367,  
 $X_0$  e il punto  $X_0$   
 della figura  $\alpha$ )  
 p. 367.

rezione dell'asse  $x$ , con asse curvilineo nella linea  $\mu$  sopra definita.

E' chiaro che se la linea  $\mu$  risulta retta (asse di simmetria obliqua od ortogonale per la sezione), la detta corrispondenza è una vera e propria affinità rispetto a tale asse.

Le traiettorie delle  $\tau_z$  concorrono poi tutte nei due punti estremi della linea  $\mu$ , che sono i punti del contorno più lontani dall'asse  $x$ ; ed ivi esse riescono tutte tangenti al contorno.

Conforme a quanto si è ora esposto, nella fig. 39 furono tracciate le dette traiettorie delle  $\tau_z$  per la sezione già disegnata nelle due figure precedenti: esse furono disposte in modo da comprendere fra loro strisce di ugual flusso di  $\tau_z$  attraverso la corda, e perciò dividono tutte le corde in parti uguali. La linea  $\mu$  è essa stessa una traiettoria di  $\tau_z$ .

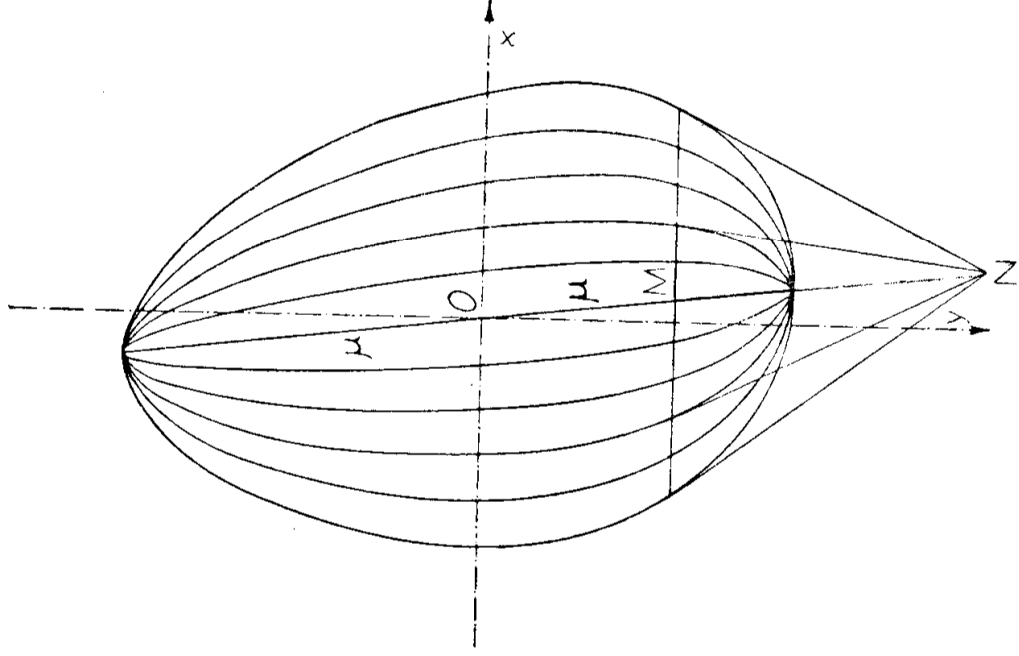


Fig. 39

#### LAVORO DI DEFORMAZIONE. — COEFFICIENTE $\lambda$ DI FORMA (O FATTORE DI TAGLIO).

Il lavoro di deformazione dovuto al taglio vien fornito, come sappiamo, dalla (322) e (322 bis).

Per facilitare il calcolo dell'integrale che in questa compare viene considerato il valor medio di  $\tau_{zx}^2$  lungo la corda di ordinata  $y$ ; tale valor medio si può indicare con  $[\tau_{zx}^2]$ ; indichiamo pure con  $[\cotg^2 \alpha]$  il valor medio di  $\cotg^2 \alpha$  lungo la stessa corda, intendendo ancora con  $\alpha$  l'angolo che la  $\tau_z$  in un punto generico forma coll'asse  $x$ , com'è detto a pag. 351 e 352, e ricordando che, come là si è dimostrato, lungo la corda  $y = \text{cost.}$ , la  $\cotg \alpha$  varia linearmente con  $x$ .

Quindi, secondo le (322), (330) e (333), avendo sostituito alla

$$\psi = \frac{\beta_z^2}{2\lambda} + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (193), \quad \text{avendo sostituito } k \text{ con } \lambda \text{ dipendente dal taglio; } \lambda = \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) dV = \frac{1}{2G} \int_A \tau_z^2 dx \quad \text{perché } \tau_x = 0 \text{ e } \tau_y = 0 \text{ e } \tau_z \text{ è costante per } A \text{ che}$$

$$L_t = \frac{l}{2G} \int_A (r_{2x}^2 + r_{2y}^2) dA = \frac{l}{2G} \frac{T_y^2}{I_x^2} \int_0^{\xi_0^2} \left( 1 + [\cot^2 \alpha] \right) dy ; \text{ e } \text{però} \\ L_t = X \frac{T_y^2 l}{2GA} \quad \text{con } X = \dots$$

funzione il suo valor medio lungo la corda, ponendo poi  $dA = bdy$ , e ricordando che:  $I_x = A\rho^2$ , si ha:

$$\chi = \frac{1}{A\rho^4} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\xi_0^2}{b} (1 + [\cot^2 \alpha]) dy \quad (337)$$

Per calcolare  $[\cot^2 \alpha]$  conviene indicare con  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  i due valori di  $\alpha$  agli estremi della corda, e così con  $x_1$  ed  $x_2$  i due valori di  $x$  negli stessi punti rispettivamente: posto ciò, è facile dimostrare che:

$$[\cot^2 \alpha] = \frac{1}{3} (\cot^2 \alpha_1 + \cot^2 \alpha_1 \cdot \cot^2 \alpha_2 + \cot^2 \alpha_2) \quad (338)$$

Inoltre si ha evidentemente:

$$\cot^2 \alpha_1 = \frac{dx_1}{dy} ; \quad \cot^2 \alpha_2 = \frac{dx_2}{dy}$$

$$x_2 - x_1 = b \quad x_2 + x_1 = 2\xi$$

(notando che la differenza e la somma vanno intese in *senso algebrico*, poichè  $x_1$  può risultare negativo) e quindi:

$$\cot^2 \alpha_2 - \cot^2 \alpha_1 = \frac{db}{dy}$$

$$\cot^2 \alpha_2 + \cot^2 \alpha_1 = 2 \frac{d\xi}{dy}$$

da cui si ricava:

$$\cot^2 \alpha_2 = \frac{d\xi}{dy} + \frac{1}{2} \frac{db}{dy}$$

$$\cot^2 \alpha_1 = \frac{d\xi}{dy} - \frac{1}{2} \frac{db}{dy}$$

Sostituendo nella (338) i valori ora espressi otteniamo:

$$[\cot^2 \alpha] = \frac{1}{3} \left| \left( \frac{dx_1}{dy} \right)^2 + \frac{dx_1}{dy} \cdot \frac{dx_2}{dy} + \left( \frac{dx_2}{dy} \right)^2 \right| \quad (339)$$

$$\chi = \frac{1}{A\rho^4} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\xi_0^2}{b} \left( \left( \frac{dx_1}{dy} \right)^2 + \frac{dx_1}{dy} \cdot \frac{dx_2}{dy} + \left( \frac{dx_2}{dy} \right)^2 \right) dy$$

ovvero anche :

$$[\cotg^2 \alpha] = \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{db}{dy}\right)^2 \quad (339 \text{ bis})$$

Sostituendo poi questi valori nella (337) si ottiene infine :

$$\chi = \frac{1}{A\rho^4} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathcal{O}(\xi_0^2)}{b} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left| \left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2 + \frac{dx_1}{dy} \cdot \frac{dx_2}{dy} + \left(\frac{dx_2}{dy}\right)^2 \right| \right\} dy \quad (340)$$

ovvero anche :

$$\chi = \frac{1}{A\rho^4} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathcal{O}(\xi_0^2)}{b} \left| 1 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{db}{dy}\right)^2 \right| dy \quad (341)$$

Gli integrali a 2° membro si possono agevolmente calcolare, almeno per approssimazione, ed eventualmente per via grafica; la funzione della  $y$  da integrare è infatti pienamente determinata quando sia dato il contorno della sezione.

Ricordiamo che spesso (come dicemmo a pag. 347, all'inizio di questo n.° 55) nei trattati di elasticità tecnica, non si tiene conto delle  $\tau_{xz}$ , e perciò l'espressione di  $\chi$  là calcolata è quella che si ottiene dalla (341) o (341 bis) sopprimendo i termini che seguono l'1 nella parentesi sotto l'integrale. Faremo più sotto qualche confronto di valori numerici in alcuni casi particolari.

In quanto è fin qui esposto sulla trattazione approssimata del taglio è *implicitamente supposto che la sezione sia semplicemente connessa*, cioè piena, senza cavità interne.

Ci riserviamo di esporre più sotto alcune osservazioni sulle sezioni doppiamente connesse (cave), sia per ciò che riguarda l'espressione di  $\chi$ , sia per mettere in evidenza qualche anomalia nella distribuzione della  $\tau_z$ , che si presenta nei punti del contorno interno, nei quali la tangente è parallela all'asse  $x$ .

Ed ora passiamo a studiare :

#### ALCUNE SEZIONI PARTICOLARI (TRATTAZIONE APPROSSIMATA). Sezione circolare di raggio $r$ .

In questo caso ricordiamo che è:  $I_x = \frac{\pi}{4} r^4$ ;  $T_y = T$ ; inoltre se-

$$\tau_z = \frac{3}{8} r^2 \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{dy}{dx}$$

condo le indicazioni della fig. 40, ed avendo  $\alpha$  lo stesso significato di poco sopra, (sul contorno) si ha:

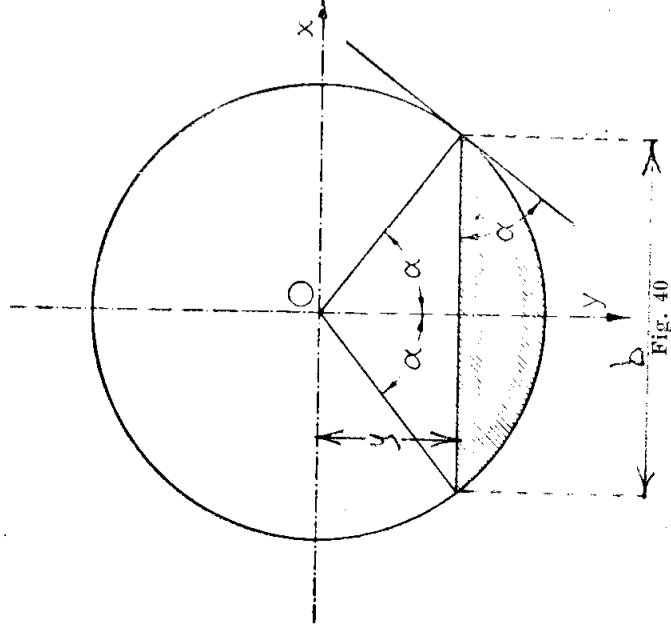
$$\varpi(\xi_0) = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

(ciò si deduce da quanto si sa dalla statica sui momenti o sul baricentro di un segmento circolare); inoltre:

$$b = 2r \operatorname{sen} \alpha ;$$

quindi, applicando la (330) si ottiene: 
$$\gamma_{yz} = \frac{I_y I_z}{b I_x} = \frac{T \cdot 2 r^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{3 \cdot 2 r \operatorname{sen} \alpha \pi r^2} \quad (342)$$

$$\tau_{yz} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \operatorname{sen}^2 \alpha$$



Poi, per la (333) si ha, sul contorno:

$$\sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (343)$$

e poichè lungo una corda la  $\tau_{xy}$  varia proporzionalmente alla  $x$ , si ha in un punto interno generico:

$$\tau_{xy} = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (343 \text{ bis})$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} = \sqrt{r^2 - y^2} \cdot x$$

Osservando poi che è:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{y}{r}$$

le (342) e (343 bis) divengono:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta/2} &= \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^3} (r^2 - y^2) \\ \tau_{\text{max}} &= -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^3} xy \end{aligned} \right\} \quad (344)$$

E' opportuno osservare che questi valori coincidono con quelli, che per  $m=2$  forniscono le (325) ricavate dalla teoria esatta (pag. 337). E' poi chiaro che lungo una corda la  $\tau_z$  totale risulta minima sull'asse  $y$  ed assume i valori maggiori (*non* massimi in senso analitico geometrico) agli estremi della corda.

Dalle (342) e (343) risulta che sul contorno si ha:

$$\left[ \frac{16}{3} \frac{T^2}{\pi^2 r^4} \sin^2 \alpha \sqrt{r^2 - y^2} \right]_{\theta/2} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \operatorname{sen} \alpha$$

Ne consegue che il valore massimo di  $\tau_z$  si ha sull'asse delle  $x$ , (ove esso coincide con  $\tau_{\theta/2}$ , essendo ivi zero la  $\tau_{\text{cor}}$ ).

Tale valore quindi è, per  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ :

$$\boxed{\tau_{z \text{ max}} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} ;} \quad (345)$$

valore che coincide con quello dato dalla (325) per  $m=2$ , come deve essere.

Dunque la tensione tangenziale massima è uguale ai  $4/3$  di quella media.

A titolo di confronto numerico ricordiamo di aver trovato a pag. 337 colla (326), che secondo la teoria esatta, per  $m=4$  si ha la tensione massima uguale ai  $7/5$  di quella media: come si vede la differenza è relativamente assai piccola.

Le traiettorie delle  $\tau_z$  sono qui delle ellissi aventi per asse maggiore quel diametro del cerchio che è disteso sull'asse  $y$ , secondo

quanto si disse a pag. 355 e 356; perciò, conforme a ciò che fu riconosciuto poco sopra, a proposito della coincidenza delle (344) colle (325) per  $m=2$ , si ritrova qui direttamente la stessa configurazione delle traiettorie delle  $\tau_z$  già trovata per  $m=2$  nella trattazione esatta a pag. 342, secondo la (328). Quindi, data questa coincidenza nella distribuzione delle  $\tau_z$ , ne consegue che il valore del *fattore di taglio*  $\chi$  corrispondente a questa trattazione approssimata, deve coincidere con quello della trattazione esatta per  $m=2$ . Esso quindi si deve ottenere dalla (327) a pag. 339 per  $m=2$ ; ivi già si era trovato:

$$\chi = \frac{32}{27} = 1,185\dots \quad (185 \text{ periodico}).$$

Lo stesso valore, — come deve essere, — si ritrova applicando a questo caso la (341) o la (341 bis), tenendo conto delle espressioni di  $\omega_0$  e di  $b$  trovate a pag. 359 ed osservando che per la simmetria della sezione, conforme alla (338), essendo  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$  al contorno, si ha:

$$[\cotg^2 \alpha] = \frac{1}{3} \cotg^2 \alpha$$

e che inoltre è:

$$u = r \cos \alpha$$

$$dy = -r \sin \alpha d\alpha$$

E' facile verificare che, fatte le dette sostituzioni nella (341), e ricordando ben noti integrali, si ottiene appunto il valore di  $\chi$  ora trovato per altra via.

Tale valore è relativamente molto prossimo a quello 1,1733... trovato nella trattazione esatta per  $m=4$ . L'errore del valore approssimato rispetto a quello esatto è dell'1%  $\sim$  in eccesso.

E' opportuno confrontare questi valori con quello che di solito si dà nei trattati e nei manuali, colla trattazione approssimata che trascura le  $\tau_{\text{osc}}$ ; valore che si ottiene dalla (341) trascurando nella parentesi i termini che seguono l'1, come già si è detto.

E' facilissimo verificare che, mediante i soliti integrali già citati, si ottiene allora:

$$\chi = \frac{10}{9} = 1,111\dots \quad (\text{periodico})$$

il quale valore differisce da quello vero per  $m=4$  del 6,25%  $\sim$  in difetto.

Questo confronto prova ancora una volta come sia opportuno non trascurare le  $\tau_{gr}$ , e come con questa avvertenza la teoria approssimata possa dare risultati molto vicini a quelli della teoria rigorosa.

Si noti come secondo la prima delle (344) lo stesso contorno del cerchio possa servire, quale diagramma delle  $\tau_{gr}$ , nella scala, in cui il raggio  $r$  rappresenta la  $\tau_{z\ max}$  data dalla (345).

Passiamo ora per analogia a studiare la:

*Sezione ellittica di semiassi  $m$  ed  $n$ , sollecitata secondo  $n$ .*  
Fig. 41, a).

Una tale sezione si può considerare come ottenuta per trasfor-

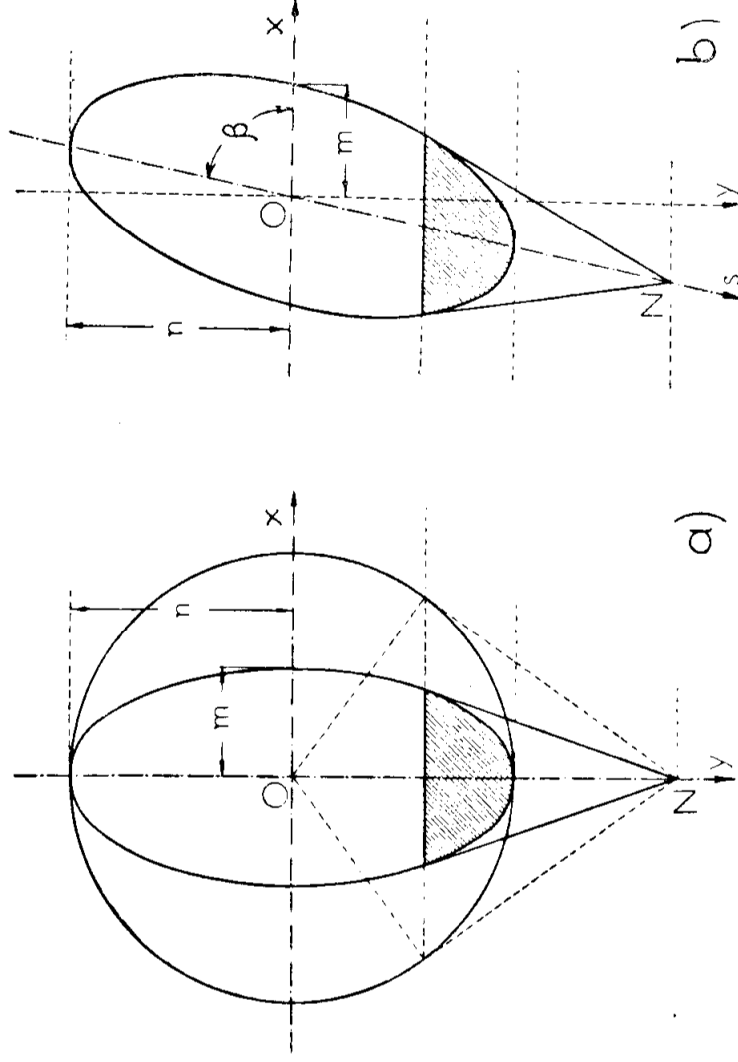


Fig. 41

mazione secondo un'affinità ortogonale di rapporto  $K = \frac{m}{n}$ , dal cerchio di raggio  $n$  essendo asse di affinità l'asse  $y$  [vedi fig. 41, a)], che d'altra parte qui si suppone asse di sollecitazione.

Con tale trasformazione è facile verificare che il rapporto  $\frac{\mathcal{C}_0}{I_x b}$  viene diviso per il rapporto di affinità  $K$ , mentre il valore di  $\cotg \alpha$



al contorno viene moltiplicato per  $K$ ; ne consegue che le (344) si trasformano ora nelle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{4}{3} \frac{T}{\pi m n^3} (m^2 - y^2) \\ \tau_{zx} &= -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi m n^3} xy \end{aligned} \right\} \quad (346)$$

La *forma* della distribuzione delle  $\tau_z$  risulta quindi la stessa che nel caso della sezione circolare; ciò si accorda col fatto che il detto contorno ellittico è una traiettoria delle  $\tau_z$  per la sezione circolare, e perciò il tagliare la sezione secondo detta linea non deve alterare la distribuzione delle  $\tau_z$ , come già si disse a suo tempo più sopra.

Inoltre, per ciò che riguarda il valore di  $\chi$  si deve osservare che nella (341) o (341 bis) i termini che seguono l'1 nella parentesi — e che si riducono a  $\frac{1}{3} \cotg^2 \alpha$  — nella trasformazione per affinità vengono *ovunque* moltiplicati per  $K^2$ ; mentre  $\frac{\partial \zeta_0^2}{b}$  ed  $A$  vengono moltiplicati per  $K$ ; e  $\zeta^4$  resta inalterato; d'altra parte il valore di  $\chi$  per la sezione circolare, come si vide sopra, si può esprimere come segue:

$$\chi = \frac{32}{27} = \frac{10}{9} + \frac{2}{27}$$

e delle due parti la prima è il contributo corrispondente al termine 1 della detta parentesi della (341) e la seconda parte è il contributo dovuto agli altri termini della parentesi.

Da quanto è detto sopra risulta perciò súbito che colla trasformazione per affinità la prima parte deve restare inalterata, mentre la seconda parte dovrà venir moltiplicata per  $K^2$ .

Perciò nel caso qui studiato si ha:

$$\chi = \frac{10}{9} + \frac{2}{27} K^2 \quad (347)$$

Per esempio la sezione indicata in fig. 41 *a*) corrisponde a  $K = \frac{1}{2}$ ; e per essa si ha

$$\chi = \frac{61}{54} = 1,1288... \infty \quad (8 \text{ periodico}).$$

È poi ovvio che se nelle formole ora scritte si cambia  $m$  con  $n$ , e  $K$  con  $\frac{1}{K}$  si ottengono i valori per la stessa sezione sollecitata secondo l'asse  $x$ .

Così per la sezione della fig. 39  $a$ ) all'asse di sollecitazione  $x$  corrisponde un  $\chi = \frac{38}{27} = 1,407 \dots$ .

*Sezione ellittica sollecitata secondo un diametro generico s.*

Nella fig. 41  $b$ ) è poi rappresentata una sezione ellittica che si può immaginare ottenuta da quella della fig. 41  $a$ ) con un'inclinazione dell'asse  $y$  che passi alla posizione  $s$ , e con un conseguente scorrimento di tutte le corde parallele all'asse  $x$ , (in modo che esse restino bisecate dall'asse  $s$ ). Tale ellisse quindi ha sull'asse  $x$  il semidiametro  $m$ , ed  $n$  è la proiezione sulla normale  $y$  all'asse  $x$  del semidiametro coniugato a questo.

È facile verificare che, data la sopradetta deduzione della ellisse  $b$ ) da quella  $a$ ), le formole (346) debbono valere inalterate anche per la sezione  $b$ ) supposta sollecitata secondo l'asse  $s$  coniugato di  $x$ , quando si convenga che le  $x$  si misurino a partire dall'asse  $s$  in direzione dell'asse  $x$ , e le  $y$  invece si continuino a misurare in direzione normale all'asse  $x$ , ed a partire da esso.

Le traiettorie delle  $\tau_x$  sono al solito delle ellissi affini al contorno con asse di affinità  $s$  e direzione  $x$ .

Per quanto riguarda il valore di  $\chi$  è chiaro che, data l'inclinazione dell'asse di simmetria  $s$ , (che fa coll'asse  $y$  un angolo  $\beta$ ), al valore dato dalla (347), si dovrà ora aggiungere, conforme alla (341), un termine.

$$\frac{10}{9} \left( \frac{d\bar{\xi}}{dy} \right)^2 = \frac{10}{9} \cotg^2 \beta$$

e perciò si avrà in totale:

$$\chi = \frac{10}{9} \operatorname{cosec}^2 \beta + \frac{2}{27} K^2 \quad (348)$$

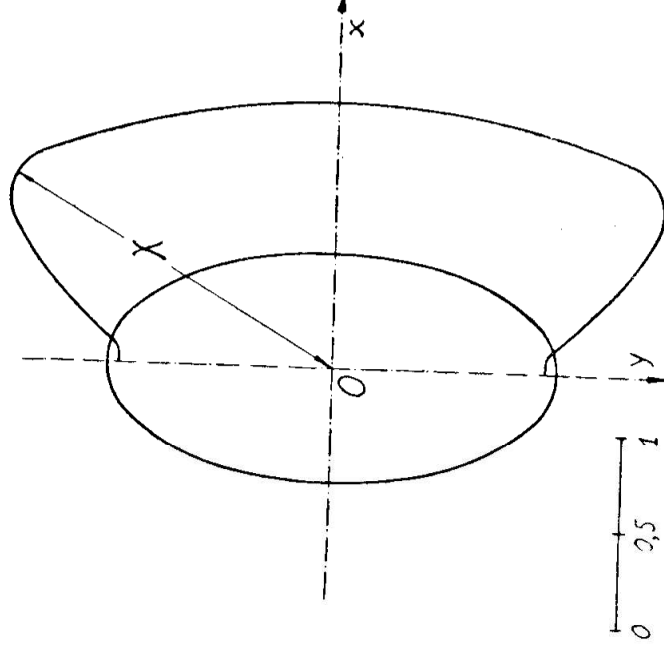
Per la sezione della fig. 41  $b$ ), oltre ad aversi ancora  $K = \frac{1}{2}$

si ha pure:  $\cotg \beta = 0,2$  e perciò  $\operatorname{cosec}^2 \beta = 1,04$ , e perciò:

$$\chi = \frac{10}{9} \cdot 1,04 + \frac{1}{54} = \frac{317}{270} = 1,172 \sim .$$

Nella fig. 42 poi, per la sezione della fig. 41 a) si calcolarono nel modo testè indicato i valori di  $\chi$  relativi a vari assi di sollecitazione, e si portò ciascuno di tali valori in una data scala come raggio vettore a partire dal centro, e sullo stesso asse di sollecitazione.

Si ottenne così il *diagramma polare* del coef. ficiente (o fattore di taglio)  $\chi$  contato sui vari assi di sollecitazione; tale diagramma è naturalmente esteso a solo mezzo giro (perchè su ogni asse si ha un unico valore di  $\chi$ ).



ALCUNE OSSERVAZIONI GENERALI SULL' APPLICABILITÀ DELLA TEORIA AP.

Fig. 42

PROSSIMATA, IN RELAZIONE COL PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI. — CRITERIO PER IL CALCOLO APPROSSIMATO DEL TAGLIO DEVIATO (CON ASSE DI SOLLECITAZIONE GENERICI).

È ovvio che la *effettiva* distribuzione delle tensioni tangenziali dovute al taglio deve (come ogni altra distribuzione di tensioni interne nel caso generale del problema qui trattato) soddisfare al principio generalissimo della sovrapposizione degli effetti.

Ciò vuol dire che la tensione tangenziale  $\tau_x$  dovuta ad uno sforzo di taglio risultante di altri due  $\tau_x$  o  $\tau_y$  più, deve essere in ogni punto uguale alla somma geometrica delle tensioni tangenziali ivi separatamente provocate dagli sforzi di taglio componenti.

Questo fatto deve dunque essere verificato per le tensioni tangenziali calcolate colla teoria esatta.

Orbene per la sezione ellittica, ed in particolare per quella circolare,

*La distribuzione delle tensioni tangenziali dovute a uno sforzo di taglio deve essere uguale alla somma geometrica delle tensioni tangenziali separate.*

si è visto sopra che la teoria approssimata da noi esposta coincide con un caso particolare ( $m=2$ ) della teoria esatta. È quindi chiaro che per tali sezioni anche la teoria approssimata in ogni caso, cioè per qualsiasi asse di sollecitazione, deve dare delle tensioni tangenziali  $\tau_z$  in armonia colla suddetta sovrapposizione degli effetti; e ciò si potrebbe riscontrare facilmente in modo diretto su un esempio.

Ma in generale la teoria approssimata, se pur praticamente accettabile, dà tuttavia sempre dei valori delle  $\tau_z$ , sensibilmente diversi da quelli effettivi, ne consegue che i suoi risultati *in generale* non saranno in armonia col suddetto principio di sovrapposizione; cioè a dire: le tensioni tangenziali  $\tau_z$  dovute ad un dato sforzo di taglio, e *calcolate direttamente* con applicazione della teoria approssimata, non saranno in ogni punto le risultanti delle analoghe tensioni tangenziali  $\tau_z$  ricavate pure direttamente dalla stessa teoria come dovute separatamente l'una o l'altra di due o più sforzi di taglio di cui il primo sia il risultante. Noi verificheremo ciò tra breve su qualche caso particolare; e questo basterebbe — se non altro — a dimostrare che *non sussiste in generale* la ora negata compatibilità della sovrapposizione degli effetti con la teoria approssimata direttamente applicata.

Ne viene come conseguenza che i risultati della teoria approssimata direttamente applicata per vari assi, contraddicendo ad un principio fondamentale generalissimo, si dovrebbero considerare come contraddittori tra loro.

Ma d'altra parte è utilissimo nella pratica poter usare senza riserve (salvo i casi di assoluta inapplicabilità, già a suo tempo accennati — n.º 26, pag. 78) il principio della sovrapposizione degli effetti; ed inoltre, dato che la teoria elementare sopra esposta è *solo approssimata*, non è certamente obbligatorio applicarla direttamente per qualsiasi asse di sollecitazione.

Perciò chi scrive crede opportuno di proporre per il calcolo approssimato delle  $\tau_z$  per vari assi di sollecitazione, il seguente criterio:

La *teoria approssimata sopra esposta* (basata sull'ammettere la  $\tau_{yz}$  costantemente uguale al suo valore medio su una corda parallela all'asse neutro), *si applichi direttamente solo per due dati assi di sollecitazione convenientemente scelti*; questi potrebbero essere gli assi principali d'inerzia della sezione, ovvero assi di simmetria anche obliqua, ovvero anche assi tali che per le singolarità del contorno, (di cui daremo esempi più oltre) si debba ritenere che per essi la teoria approssimata sia più che non per altri ragionevolmente e probabilmente applicabile con buona approssimazione; ciò fatto, la tensione tangenziale  $\tau_z$  in un punto generico provocata da uno sforzo

di taglio agente secondo un qualsiasi altro asse di sollecitazione, si calcoli col principio della sovrapposizione degli effetti, in base al calcolo preliminare prima fatto: ciò vuol dire che si dovrà scomporre il dato sforzo di taglio in due componenti secondo i predetti due assi di sollecitazione preliminarmente scelti quali *assi privilegiati*; valutare separatamente le  $\tau_x$  dovute a queste componenti, e di queste due  $\tau_x$  in ogni punto fare la risultante.

Se gli assi neutri relativi ai due primi assi di sollecitazione sono ortogonali, per fare la risultante delle  $\tau_x$  basterà evidentemente fare la somma algebrica delle omologhe componenti che sono in ambo i casi computate secondo gli stessi assi.

Ciò evidentemente accade quando gli assi di sollecitazione scelti sono quelli principali d'inerzia.

L' utilità e l' opportunità dell' adozione del qui proposto criterio, sia pure approssimato, viene ancora confermato da ciò che verrà esposto qui sotto sulla legge di variazione del coefficiente di forma, o fattore di taglio  $\lambda$ , per vari assi di sollecitazione. Infatti vedremo subito che siffatta legge ricavata in base del detto criterio assume la stessa forma dell' analoga legge valevole per la esatta distribuzione delle  $\tau_x$  e dimostrabile appunto col principio di sovrapposizione.

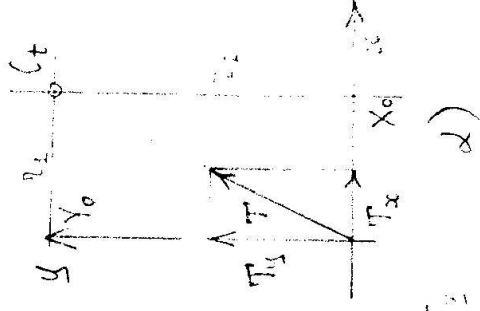
### X CONCEPTO DI CENTRO DI TAGLIO.

Quando si usa il sopra descritto *criterio* per il calcolo delle tensioni  $\tau_x$  dovute ad un taglio  $T$  in direzione generica, e pertanto si applica la teoria approssimata per un asse di sollecitazione avente una delle *due direzioni privilegiate* sopra definite, si può mediante la (336 bis), pag. 355, determinare anche in posizione la retta d' azione, che diremo  $r_1$ , della risultante delle  $\tau_x$  corrispondenti; lo stesso si può fare per l' altra delle due direzioni privilegiate e si trova così la retta d' azione  $r_2$  della corrispondente risultante delle  $\tau_x$ .

Il punto comune alle due rette  $r_1$  ed  $r_2$ , che indichiamo con  $C_t$  si può denominare *centro di taglio*, e gode ovviamente di questa proprietà: una forza tagliante, contenuta nel piano della sezione e passante per  $C_t$ , opportunamente scomposta secondo le due rette  $r_1$  ed  $r_2$  dà luogo ad una distribuzione di tensioni tangenziali  $\tau_x$ , ottenibile per sovrapposizione di due distribuzioni di  $\tau_x$  entrambe del tipo espresso dalle (330 bis) e (333), [v. pag. 349 e 351].

della  $r$  dovuta a  $T_y$  e a  $T_x$ : poi (p. 355) i punti  $X_0$  e  $Y_0$  cui si dicono *centro di taglio*  $T_y$  e  $T_x$   $\mu$  sono quelle  $r$ ,  $\mu$  per cui il punto  $C_t (X_0, Y_0)$   $\mu$  cui si dice *centro di taglio*  $T$ . Se  $T$  dista  $e$  da  $C_t$ , oltre alle studiate distribuzioni della  $r$  per il taglio  $T_y$  e  $T_x$  si ha pure una distribuzione di  $r$  per la sola forza  $T$  che si ottiene per sovrapposizione delle due studiate distribuzioni della  $r$  per il taglio  $T_y$  e  $T_x$ .

+



LEGGE DI VARIAZIONE DEL COEFFICIENTE DI FORMA O FATTORE DI TAGLIO  $\chi$  RELATIVO AD UN ASSE DI SOLLECITAZIONE GENERICICO.

Consideriamo una sezione generica ed indichiamo con  $\xi$  ed  $\eta$  i suoi assi principali d'inerzia, (come già si fece nella fig. 7 studiando la flessione deviata). Sia poi  $s$  l'asse di sollecitazione facente l'angolo  $\varphi$  coll'asse  $\eta$  (v. ancora fig. 7) e sia ancora  $\psi$  l'angolo che collo stesso asse  $\eta$  forma la normale  $y$  all'asse neutro  $x$  (coniugato di  $s$ , al solito).

Se lungo  $s$  agisce uno sforzo di taglio  $T$ , esso si potrà scomporre in due secondo i due assi  $\xi$  ed  $\eta$ , ed avremo:

$$T_{\xi} = T \sin \varphi \qquad T_{\eta} = T \cos \varphi$$

Mentre secondo la (323) il fattore di taglio viene definito con la relazione:

$$L_t = \chi \frac{T_y^2 l}{2 GA}$$

ora può essere opportuno definire un altro fattore di taglio che chiameremo  $\chi_1$ , con la relazione:

$$L_t = \chi_1 \frac{T^2 l}{2 GA}, \qquad (349)$$

cioè, facendo comparire nell'espressione del lavoro di deformazione  $L_t$ , tutto il taglio  $T$ , invece della sua componente  $T_y$ ; e poichè si ha, con le notazioni adottate:

$$T_y = T \cos(\psi - \varphi)$$

sarà pure evidentemente:  $\chi T_y^2 = \chi_1 T^2$

$$\chi = \chi_1 \cos^2(\psi - \varphi) \qquad (350)$$

Passiamo ora ad esprimere il lavoro di deformazione  $L_t$  dovuto al taglio  $T$  agente sull'asse  $s$  e basiamoci sul principio della sovrapposizione degli effetti.

Notiamo che, quando gli assi  $\xi$  ed  $\eta$  sono di simmetria (ortogonale) per la sezione, allora il *lavoro nullo* dei due sforzi di taglio  $T_{\xi}$  e  $T_{\eta}$  è rigorosamente nullo, appunto in virtù della simmetria delle

$\tau_z$  e  $\gamma_z$  rispetto all'asse di sollecitazione, e l'anti-simmetria delle stesse rispetto all'asse neutro.

Ciò si può pure ammettere, per analogia ed in via di approssimazione, anche se  $\xi$  ed  $\eta$  non sono assi di simmetria; e sarebbe facile dimostrare direttamente che l'approssimazione ottenuta con tale ammissione è molto grande, poichè il predetto lavoro mutuo, se pure non rigorosamente nullo, è sempre molto piccolo ed affatto trascurabile.

Perciò, secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, il lavoro di deformazione  $L_t$  dovuto al taglio  $\bar{T}$  è semplicemente la somma dei lavori di deformazione dovuti separatamente ai due sforzi di taglio componenti  $T_\xi$  e  $T_\eta$ .

Indichiamo con  $\chi_\xi$  e  $\chi_\eta$  i fattori di taglio relativi ai due assi di sollecitazione  $\eta$  e  $\xi$  rispettivamente (ovvero relativi ordinatamente ai due assi neutri  $\xi$  ed  $\eta$ ), notando che per gli assi principali il  $\chi_1$  or ora definito s'identifica col  $\chi$ .

Ciò posto avremo:

$$L_t = \chi_1 \frac{T^2 l}{2GA} = \chi_\xi \frac{T_\eta^2 l}{2GA} + \chi_\eta \frac{T_\xi^2 l}{2GA}$$

e quindi sostituendo alle componenti le loro espressioni in funzione di  $T$  e di  $\varphi$ , e sopprimendo i fattori comuni si trova:

$$\chi_1 = \chi_\xi \cos^2 \varphi + \chi_\eta \sin^2 \varphi \quad (351)$$

(ricordando che  $\chi_1$  è relativo all'asse di sollecitazione generico  $s$ ).

È trovata così la legge che cercavamo per la variazione di  $\chi_1$  in funzione di  $\varphi$ , ed è quindi nota, mediante pure la (350), la legge di variazione di  $\chi$  in funzione di  $\varphi$ , legge che per la sezione ellittica è rappresentata dal diagramma polare della fig. 42.

Per dare di questa legge una rappresentazione più chiara e significativa conviene considerare gli inversi delle radici quadrate dei  $\chi_1$ ; per una evidente analogia coi raggi d'inerzia porremo:

$$\rho_t = \frac{1}{V \chi_1}; \quad \rho_{\xi t} = \frac{1}{V \chi_\xi}; \quad \rho_{\eta t} = \frac{1}{V \chi_\eta} \quad (352)$$

(ove l'indice  $t$  vuol ricordare che ci si riferisce al taglio).

Con queste posizioni, la (351) diviene:

$$\frac{1}{\rho_t^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_{\xi t}^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_{\eta t}^2} \quad (353)$$

e ciò prova che un segmento misurante  $\rho_t$  portato dal baricentro  $O$  della sezione sull'asse generico di sollecitazione  $s$  costituisce il raggio vettore di un'ellisse di centro  $O$  e di semiasse  $\rho_{\xi}$  e  $\rho_{\eta}$  distesi rispettivamente sugli assi  $\eta$  e  $\xi$ .

Essa si può denominare *l'ellisse dei fattori di taglio*. Si noti che i  $\rho_t$  ora definiti sono dei numeri astratti, come i  $\chi$  ed i  $\chi_1$ ; è perciò legittimo chiamarli *fattori*; e solo i segmenti che in una scala arbitraria li misurano, si possono considerare come analoghi ai raggi o semiasse di inerzia.

Nella fig. 43 a titolo d'esempio è stata tracciata l'ellisse dei fattori di taglio per la stessa sezione ellittica già considerata in fig. 42, ed usando la stessa scala per rappresentare i numeri.

Sarebbe facile verificare direttamente con ovvie costruzioni grafiche, (omesse per brevità), che il diagramma polare  $\rho_t$  rappresentato in fig. 43 s'accorda perfettamente con quello  $\chi$  prima costruito in fig. 42.

Mediante i fattori  $\rho_t$  ora definiti il lavoro di deformazione dovuto al taglio  $T$  si può esprimere come segue:

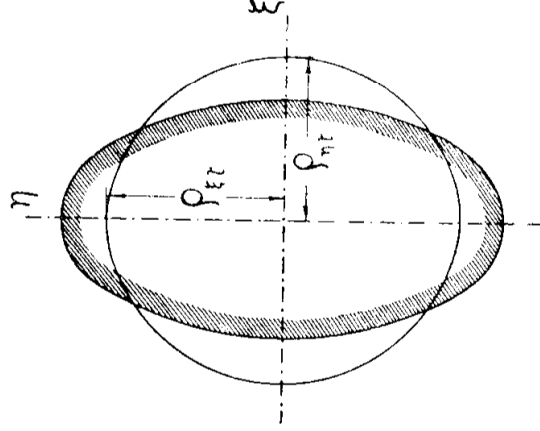


Fig. 43

$$L_t = \frac{T^2 l}{2GA \rho_t^2} \quad (354)$$

e tale espressione è perfettamente analoga a quella corrispondente per la flessione semplice.

Un altro significato notevole dell'*ellisse dei fattori di taglio* risulta da quanto esponiamo ora.

*Spostamento medio in una sezione per effetto del taglio; frecce dovute al taglio.*

Lo spostamento (scorrimento) dovuto al taglio, nel piano di una sezione del prisma rispetto agli assi, tenuti fissi, della sezione di



estremità vincolata, da punto a punto della sezione è diverso per intensità e direzione; infatti sono diverse le  $\tau_z$  e quindi le  $\gamma_z$ .

Nelle applicazioni occorre sovente considerare uno *spostamento medio* nella sezione, da riguardarsi come spostamento complessivo della sezione stessa.

Per tale spostamento medio si è convenuto ragionevolmente di definire quello spostamento che, attribuito ad un ideale punto di applicazione del taglio  $\bar{T}$ , dà luogo ad un lavoro di deformazione uguale a quello effettivo. (S'intende che in entrambi i casi il lavoro stesso si esprime secondo il noto teorema di Clapeyron).

Inoltre se l'asse di sollecitazione è un asse di simmetria ortogonale è necessario ammettere che lo spostamento medio considerato sia diretto secondo l'asse stesso.

Ciò si ammette pure con grandissima approssimazione quando l'asse di sollecitazione è asse principale d'inerzia, e quindi non di simmetria.

Useremo ora le notazioni solite, e quindi indicheremo con  $f_{\xi'}$  ed  $T_{\eta'}$  gli spostamenti medi dovuti rispettivamente agli sforzi di taglio  $T_{\xi}$  e  $T_{\eta}$  diretti secondo i due assi principali di inerzia.

Orbene, col criterio sopra esposto ciascuno dei detti spostamenti medi deve essere definito e calcolato come quello spostamento, che attribuito al punto di applicazione del corrispondente sforzo di taglio componente, gli fa compiere un lavoro (calcolato secondo il teorema di Clapeyron) uguale al lavoro di deformazione corrispondente.

Si deve quindi avere :

$$\frac{1}{2} T_{\xi} f_{\xi'} = \frac{T_{\xi}^2 l}{2GA \rho_{\eta'}^2} ; \quad \frac{1}{2} T_{\eta} f_{\eta'} = \frac{T_{\eta}^2 l}{2GA \rho_{\xi'}^2} ;$$

da cui si deduce :

$$f_{\xi'} = \frac{T_{\xi} l}{GA \rho_{\eta'}^2} ; \quad f_{\eta'} = \frac{T_{\eta} l}{GA \rho_{\xi'}^2} \quad (355)$$

Se gli sforzi  $T_{\xi}$  e  $T_{\eta}$  agiscono simultaneamente, ossia sono le componenti dello sforzo di taglio  $\bar{T}$ , agente secondo l'asse di sollecitazione  $s$ , inclinato dell'angolo  $\varphi$  all'asse principale  $\eta$ , allora  $f_{\xi'}$  ed  $f_{\eta'}$  si possono considerare come le componenti secondo i due assi principali  $\xi$  ed  $\eta$  dello spostamento medio complessivo  $f_t$  dovuto al taglio  $\bar{T}$ . Tale spostamento  $f_t$  deve quindi avere una direzione facente coll'asse  $\eta$  un angolo  $\psi_1$  definito dalla relazione :

$$\tan \psi_1 = \frac{f_{\xi'}}{f_{\eta'}} = \frac{T_{\xi}}{T_{\eta}} \cdot \frac{\rho_{\xi'}^2}{\rho_{\eta'}^2} = \frac{\rho_{\xi'}^2}{\rho_{\eta'}^2} \tan \varphi \quad (356)$$

Orbene, secondo quanto è noto dalla geometria analitica questa relazione esprime che lo spostamento  $f_t$  è normale alla direzione coniugata dell'asse di sollecitazione  $s$  rispetto all'ellisse dei fattori di taglio, di semiasse  $\rho_{\xi t}$  e  $\rho_{\eta t}$ , definita poco sopra.

Si noti che la (356) è perfettamente analoga alla (223), pag. 236, n.° 51, la quale esprime un'egual relazione di coniugio rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione, per il caso della flessione deviata.

Tale analogia poi non è solo formale o geometrica, ma sostanzialmente meccanica, poichè nel caso del n.° 51 ora citato, l'asse individuato dall'angolo  $\psi$  è l'asse di flessione, e quindi ci dà la direzione dello spostamento, che il centro della sezione subisce per effetto della flessione.

La grandezza poi di  $f_t$  è evidentemente fornita da:

$$f_t = \frac{Tl}{GA} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\rho_{\xi t}^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_{\eta t}^4}} \quad (357)$$

e questa relazione è del tutto analoga alla (224), pag. 237 del N.° 51, la quale dà la curvatura per il caso della flessione deviata.

E' facile pure individuare il diagramma che sulla direzione di  $f_t$ , sopra definita, ci determina a partire dal baricentro  $O$  il valore del radicale della (357) proporzionale ad  $f_t$  secondo il fattore  $\frac{Tl}{GA}$ .

E' ovvio che il punto generico di tale diagramma, sulla direzione di  $f_t$ , ha per coordinate rispettivamente:

$$\frac{\sin \varphi}{\rho_{\eta t}^2} \quad \text{e} \quad \frac{\cos \varphi}{\rho_{\xi t}^2};$$

e perciò l'identità

$$\rho_{\eta t}^4 \left( \frac{\sin \varphi}{\rho_{\eta t}^2} \right)^2 + \rho_{\xi t}^4 \left( \frac{\cos \varphi}{\rho_{\xi t}^2} \right)^2 = 1 \quad (358)$$

dimostra che il diagramma stesso è l'ellisse di centro  $O$  ed avente per semiasse rispettivamente

$$\frac{1}{\rho_{\eta t}^2} = \chi_{\eta}, \quad \text{ed} \quad \frac{1}{\rho_{\xi t}^2} = \chi_{\xi}$$

che sono i fattori di taglio relativi agli assi principali.

Tale diagramma si può dunque chiamare *l'ellisse delle grandezze degli spostamenti medi dovuti al taglio*, o brevemente: *ellisse degli spostamenti medi*.

Riassumendo dunque, *dato lo sforzo di taglio, la direzione dello spostamento medio da esso provocato è normale alla direzione coniugata all'asse di sollecitazione rispetto all'ellisse dei fattori di taglio (di semiassi  $\rho_{\eta t}$  e  $\rho_{\xi t}$ ), e la grandezza dello spostamento stesso è data dal fattore  $Tl$ :  $GA$ , moltiplicato per il raggio vettore dell'ellisse degli spostamenti, (avente per semiassi  $\chi_{\eta}$  e  $\chi_{\xi}$  rispettivamente) misurato, beninteso, nella direzione ora detta.*

Inoltre, per note proprietà geometriche, il raggio vettore ora detto, generico dell'ellisse degli spostamenti, [radicale della (357)], proiettato sul corrispondente asse di sollecitazione, deve fornire il fattore di taglio  $\chi_1$  relativo a questo asse:

$$\chi_1 = \frac{1}{\rho_t^2}$$

Ciò è pure espresso dalla relazione:

$$\chi_1 = \frac{1}{\rho_t^2} = \cos(\psi_1 - \varphi) \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\rho_{\xi t}^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_{\eta t}^4}} ;$$

che è facile verificare per mezzo delle (353) e (356).

È evidente e significativa l'analogia tra le leggi qui enunciate e quelle valevoli per la flessione deviata, secondo quanto si vide a pag. 236 e 237. E precisamente in questa analogia *l'ellisse dei fattori di taglio corrisponde all'ellisse di inerzia*, mentre *l'ellisse degli spostamenti medi* trova la sua corrispondente nell'*ellisse delle curvature* definita alla citata p. 237.

A titolo d'esempio, nell'annessa fig. 44, per la sezione ellittica già trattata nelle due figure precedenti, si è riprodotta,

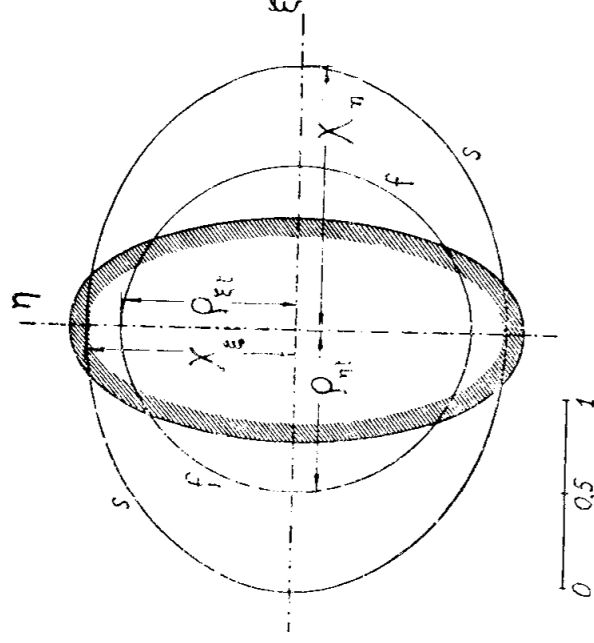


Fig. 44

indicata con  $f$ , l'ellisse dei fattori di taglio, già disegnata nella fig. 42, e colla stessa unità di misura si tracció pure, indicata con  $s$ , l'ellisse degli spostamenti medí sopra definita.

Completate così le nozioni di carattere generale, dobbiamo ora passare a studiare un'altra forma particolare di sezione comunissima nelle applicazioni è cioè la

### X Sezione rettangolare.

Siano  $b$  ed  $h$  rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo, e cominciamo col supporre che l'asse di sollecitazione coincida colla

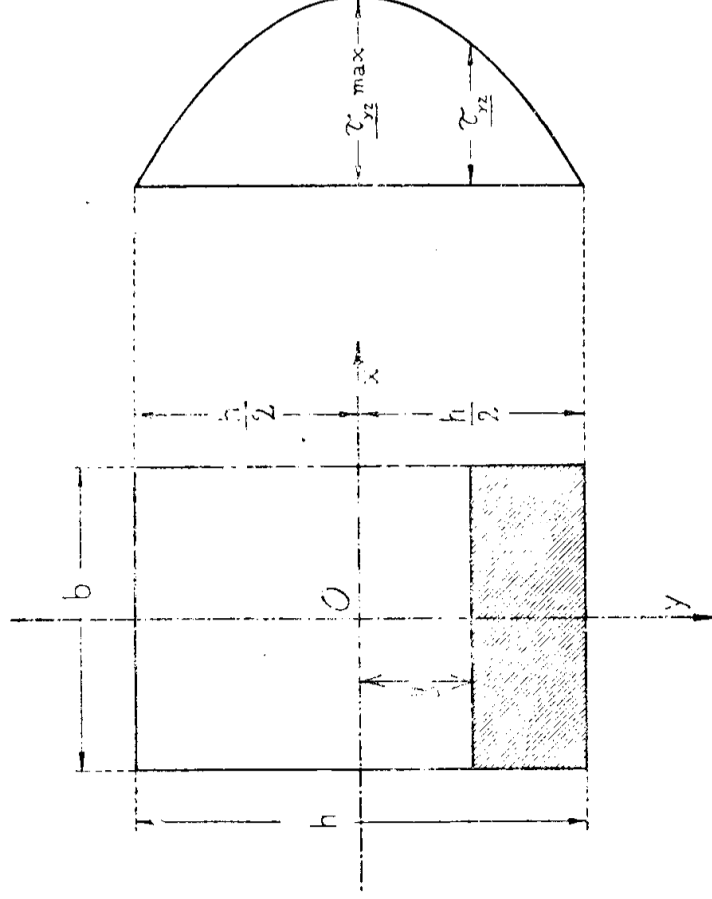


Fig. 45

mediana parallela all'altezza  $h$ ; allora l'asse neutro sarà l'altra mediana, che si assumerà come asse delle  $x$ . (V. fig. 45).

In questo caso, come risulta pure dalla fig. 45, si ha:

$$I_x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + y \right) \right) \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (359)$$

e ricordando che:

$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

si sostituisce nella (330 bis), e con ovvie riduzioni si trova:

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \tag{360}$$

Dunque la  $\tau_{yz}$  varia in funzione di  $y$  con legge parabolica, secondo il diagramma indicato nella fig. 45 a destra (ove, ben inteso, le singole ordinate sono normali alla direzione delle  $\tau_{yz}$ ).

Il valore massimo si ha per  $y=0$  ed è:

$$\tau_{yz \text{ max}} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} \tag{361}$$

ossia la tensione  $\tau_z$  massima è uguale ai  $\frac{3}{2}$  della tensione tangenziale media (che è appunto  $\frac{T_y}{bh}$ ), ed in base ad essa si deve fare la verifica di stabilità di taglio.

In questo caso, sui lati  $h$  paralleli all'asse  $y$  l'angolo  $\alpha$  definito prima della (333) è  $\alpha = \frac{\tau}{2}$ ; quindi ivi, e conseguentemente pure nell'interno, si deve ritenere  $\cotg \alpha = 0$ , e perciò, secondo la (333) stessa deve essere ovunque:

$$\tau_{xy} = 0$$

Quindi in questo caso, colla trattazione approssimata, la tensione totale  $\tau_z$  si identifica colla  $\tau_{yz}$ , e le traiettorie delle  $\tau_z$  sono delle rette parallele all'asse  $y$ .

Inoltre nella (340) e (341) i termini che seguono l'1 entro parentesi sono qui nulli in tutta la sezione.

Poi, conforme alla (359) si ha:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \mathcal{C}_0^2}{b} dy = \frac{b}{4} \int_0^h \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy$$

e con facili riduzioni si trova:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \mathcal{C}_0^2}{b} dy = \frac{bh^5}{120}$$

Ma d'altra parte si ha, com'è ben noto:

$$A \varphi_x^4 = bh \cdot \frac{h^4}{12^2}$$

$$\varphi_x = \frac{1}{12} (h^2 dx/dy)$$

e quindi, facendo il rapporto tra questi valori, secondo la (341) si trova:

$$\chi = \frac{6}{5} \quad (362)$$

È ovvio che scambiando  $b$  con  $h$ , (cioè passando al caso in cui l'asse di sollecitazione è parallelo al lato  $b$ ), il rapporto  $\chi$  deve restare lo stesso.

Ne consegue che per la sezione rettangolare l'ellisse degli spostamenti medi sopra definita si riduce ad un cerchio di raggio uguale appunto a  $6/5$ , mentre l'ellisse dei fattori di taglio, (di cui pure si parlò poco sopra), si riduce ad un cerchio di raggio:

$$\rho_t = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Perciò per qualsiasi asse di sollecitazione il fattore di taglio  $\chi$ , ha sempre lo stesso valore sopra detto, ed inoltre lo spostamento medio è diretto secondo lo stesso asse di sollecitazione.

Supponiamo ora che lo sforzo di taglio sia parallelo alla base  $b$ , e manteniamo invariata la denominazione degli assi, secondo la fig. 45. Perciò indichiamo con  $T_x$  il nuovo taglio, ed inoltre la sola componente diversa da zero della  $\tau_z$  sarà quella diretta secondo l'asse  $x$  e cioè la  $\tau_{zx}$ .

Il suo valore medio  $\tau_{zx}$  lungo una corda parallela al lato  $h$  si ottiene evidentemente dalla (360) scambiando  $b$  con  $h$  ed  $x$  con  $y$ : si ha così:

$$\tau_{zx} = \frac{3}{2} \frac{T_x}{bh} \left( 1 - \frac{4x^2}{b^2} \right) \quad (360 \text{ bis})$$

Il valore massimo di questa grandezza si ha per  $x=0$ , e si ottiene così una espressione perfettamente analoga a quella data dalla (361); cioè la tensione massima è pure qui i  $3/2$  della tensione media dovuta al taglio  $T_x$ .

Se ora immaginiamo di avere un taglio generico  $\bar{T}$ , comunque