

Inoltre l'intervallo di integrazione per il denominatore della (290) risulta molto più piccolo che nel caso dell'a sezione intatta; quindi il fattore di torsione q è assai più grande.

Ne consegue che a parità di momento torcente l'angolo di torsione ϕ risulta molto maggiore, e pure aumentate risultano in valore assoluto le τ_z , (in particolare la $\tau_{z_{max}}$), poichè la diminuzione del rapporto $\frac{A'}{S'}$ nella (288) non è sufficiente a compensare l'aumento notevole del valore di q .

L'interpretazione idrodinamica poi ci dà pure modo di renderci conto dell'influenza di cavità interne nel materiale, come soffiature di fusione, corpi estranei, fenditure, e simili.

Queste soluzioni di continuità debbono interpretarsi come ostacoli al deflusso del liquido, sicchè le linee di corrente sono costrette a deviare, contornando l'ostacolo ed addensandosi intorno ad esso: perciò ne risulta un locale aumento della velocità, ossia della τ_z .

Altre interessanti conseguenze si potrebbero ritrarre dall'analogia idrodinamica; ma qui ora ci basta aver esposte di esse le più caratteristiche e le più utili.

Altre significative ed istruttive analogie sono state istituite: noi le esporremo in un'Appendice in fine di questo volume.

SOLLECITAZIONI COMPOSTE

54. FLESSIONE COMPOSTA — (OVVERO FLESSIONE, TAGLIO E TORSIONE).

(*Quarto caso particolare*).

Colle stesse ipotesi già fatte in principio del n.º 53 (cioè assumendo come origine O il baricentro della base del cilindro vincolata, ed essendo quindi x ed y due assi baricentrici, ma del resto qualsiasi per ora), indichiamo qui con e e e' due costanti piccolissime, e poniamo:

$$\begin{aligned}
 u &= -c \frac{xy}{m} - c' \left(\frac{xy}{m} - a \right) z \\
 v &= -\frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - c' \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2 - y^2}{2m} - b \right) z \\
 w &= cyz + c' \left(\frac{yz^2}{2} - yx^2 + \Psi_{xy} - ax - by \right)
 \end{aligned}
 \tag{299}$$

essendo, come nel caso precedente della torsione semplice, Ψ_{xy} una funzione ad un solo valore, finita, continua, determinata in tutti i punti della sezione retta del cilindro, ed essendo poi a e b due costanti da determinarsi secondo le ben note condizioni di vincolo.

Constatiamo ora facilmente che le u v w ora definite soddisfano alle (159), (160), (161) e (162); inoltre esse soddisfano pure la (163) se la funzione Ψ è armonica, ossia verifica l'equazione di Laplace $\Delta_2 \Psi = 0$ già riprodotta nella (246) a pag. 262.

Le condizioni di vincolo, fornite dalle (164), richiedono poi che sia nell'origine:

$$\Psi_0 = 0; \quad a = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_0; \quad b = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_0 \quad (300)$$

Si noti che la Ψ deve essere termine di 3° ordine rispetto alla lunghezza e perciò le a e b sono termini di 2° ordine rispetto alla lunghezza.

Infine deve sul contorno della sezione essere verificata la terza delle (149) (v. pag. 195), cioè deve essere:

$$\gamma_{xx} \alpha_x + \gamma_{yy} \alpha_y = 0$$

e da questa condizione, con trasformazioni del tutto analoghe a quelle fatte a pag. 262 e 263, si può facilmente dedurre la seguente:

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{2m+1}{m} xy \frac{dx}{dn} + \left(\frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \frac{dy}{dn} \quad (301)$$

essendo al solito n la direzione della normale al contorno, positiva verso l'interno; se poi $f(xy) = 0$ è l'equazione del contorno, l'ultima condizione si può anche esprimere:

$$\frac{d\Psi}{dn} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} = \frac{2m+1}{m} xy \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (302)$$

do v in l , l , l , l
 come il 2° addendo
 con l , con l , l , l
 costanti della sezione
 unipolare in l , l , l , l
 quello 3° parte qui
 è y e y^2 ; e
 si verifica che con
 do c l , l , l , l
 il 3° addendo [11].
 sopra il valore
 equato anche da l , l , l , l
 316 l , l , l , l
 la l , l , l , l

Questa è la condizione al contorno che deve essere soddisfatta dalla funzione armonica Ψ_{xy} , e serve a determinarla in unione coll'equazione di Laplace, e colla prima delle (300); ritornando così ad un problema noto in analisi, ed esposto già a pag. 263.

Per trovare le tensioni interne corrispondenti alla deformazione ora definita, applichiamo prima la (153), ed otteniamo così:

$$\sigma_z = E(c + c'z)y \quad (303)$$

ed applicando poi le prime due delle (148), si trova:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= Gc' \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right) \\ \tau_{zx} &= Gc' \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right) \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

È opportuno osservare, ricordando la (197), che in questo caso la tensione normale σ_z è distribuita su una sezione trasversale con legge del tutto analoga a quella che si ha nel caso della flessione semplice, già trattato, al quale del resto qui ci si riduce, se poniamo $c' = 0$.

Però in questo caso la σ_z è pure funzione lineare di z , e perciò varia da sezione a sezione.

Possiamo fare in modo che la σ_z sia nulla su una data sezione: quella la cui z annulla la parentesi nella (303); per esempio possiamo proporci che ciò avvenga sulla base libera (non vincolata) del cilindro, cioè per $z = l$. In tale ipotesi dovrà essere:

$$\text{ossia: } \left. \begin{aligned} c + c'l &= 0 \\ \frac{c}{c'} &= -l \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

Applicando ora le (183) si ottiene, per una sezione generica:

$$N_z = 0$$

$$T_x = Gc' \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA - \frac{2m+1}{m} \int_A xy dA$$

$$T_y = Gc' \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} dA - \frac{2m-1}{2m} \int_A x^2 dA - \frac{1}{2m} \int_A y^2 dA$$

$$M_x = E(c + c'z) \int_A y^2 dA \tag{306}$$

$$M_y = E(c + c'z) \int_A xy dA$$

$$M_z = Gc' \int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA - \frac{2m-1}{2m} \int_A x^3 dA + \frac{4m+1}{2m} \int_A xy^2 dA$$

Ed in particolare sulla base libera, per $z = l$, si ha, secondo la (305):

$$M_{x,l} = M_{y,l} = 0 \tag{307}$$

Si ottengono così le *caratteristiche* del sistema di forze esterne; dalla 1.^a delle (306) e dalla (307) risulta che detto sistema si riduce ad una forza unica giacente nel piano della base libera $z = l$.

Quindi per una sezione generica qualunque si dovrà avere: $\frac{T_y}{T_x} = -\frac{M_x}{M_y}$

$$T_x M_x + T_y M_y = 0 \tag{308}$$

ossia il piano della coppia flettente complessiva risulta parallelo alla direzione dello sforzo di taglio complessivo. (Vedi anche alla B. 02)

Convieni ora richiamare le (186), pag. 214; da esse si ricava, per questo caso:

$$M_x = -T_y(l-z); \quad M_y = T_x(l-z) \tag{309}$$

Confrontando la prima di queste con la 4.^a delle (306) trasformate secondo la (305), si ottiene:

$$c' = \frac{T_y}{EI_x} \tag{310}$$

Con questa relazione e con la (305) restano così individuate le due costanti piccolissime c e c' che nella « posizione » delle (299) erano restate indeterminate.

Si noti che negli usuali trattati di elasticità tecnica per giungere alla (310), si fa l'ipotesi che l'asse x sia principale d'inerzia per la sezione, e poi si fa una non breve dimostrazione applicando, tra l'altro, anche il *lemma di GREEN*.

La dimostrazione che invece qui è data, oltre ad essere semplicissima ed immediata, è anche della massima generalità, e non richiede altra ipotesi restrittiva, oltre a quella dell'essere l'asse neutro x baricentrico per la sezione.

La piena generalità qui specificata della (310), e la conseguente generalità di tutta la trattazione di questo caso di sollecitazione, per x baricentrico, ma di qualsiasi direzione generica, fu dimostrato, in altra forma, nel mio lavoro: « *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione* ». (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie 4.^a Vol. V.º 1935, XIII).

È istruttivo osservare che la 4.^a e la 5.^a delle (306), trasformate secondo le (305) e (310), e combinate con la (308), dimostrano che lo sforzo di taglio complessivo T_x (parallelo al piano della coppia flettente complessiva M_x) ha la direzione coniugata dell'asse x rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione.

La distanza poi di questo sforzo di taglio T dall'asse z dipende dal momento M_x , espresso dall'ultima delle (306), il quale per essere calcolato, richiede la conoscenza della funzione Ψ . Nell'Appendice in fine di questo volume indicheremo alcuni artifici per agevolare questo calcolo.

Sostituendo poi nelle (299) otterremo le componenti di spostamento:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{T_y}{EI_x} \cdot \left| \frac{xy}{m} (l-z) + az \right| \\ v &= \frac{T_y}{EI_x} \left| \frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l-z) + bz \right| \\ w &= \frac{T_y}{EI_x} \left| \frac{yz^2}{2} - yx^2 - lyz + \Psi_{xy} - ax - by \right| \end{aligned} \right\} \quad (311)$$

È facile verificare che la deformazione individuata da questi spostamenti presenta genericamente i caratteri di una *flessione*.

Infatti si consideri nell'interno del solido non deformato una

qualunque retta parallela all'asse z ; per i punti di essa sono costanti x ed y , e varia la sola z . Dopo la deformazione le coordinate dei suoi punti diverranno:

$$x' = x + u; \quad y' = y + v; \quad z' = z + w.$$

E poichè x ed y sono costanti, se tra queste relazioni eliminiamo la z , otteniamo le equazioni della linea in cui la retta considerata si trasforma per effetto della deformazione.

Dovendo ritenere piccolissimi gli spostamenti, come pure i coefficienti della z nelle (311), noi potremo fare la detta eliminazione, ponendo $z = z'$ nelle due prime delle dette (311). Così si ottengono le due equazioni (approssimate) della curva cercata:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{T_y}{EI_x} \left| \frac{xy}{m} (l - z') + az' \right| \\ y' &= y + \frac{T_y}{EI_x} \left| \frac{z'^2}{2} \left(l - \frac{z'}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l - z') + bz' \right| \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

La prima dimostra che la curva si trova in un piano parallelo all'asse y , il quale piano incontra il piano xy su una retta a distanza x (costante) dall'origine, ed incontra poi l'asse z in un punto che dista dall'origine della lunghezza:

$$z'_0 = \frac{EI_x}{T_y} + \frac{l}{m} \frac{y}{xy - a}$$

La seconda poi delle (312) dimostra che la curva considerata è una parabola cubica.

Per $x = y = 0$ tale curva diviene la così detta *linea elastica*, cioè la *deformata dell'asse geometrico del cilindro*; essa ha le equazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{T_y}{EI_x} a z \\ y' &= \frac{T_y}{EI_x} \left| \frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) + bz \right| \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

La sua tangente nell'origine ha rispetto all'asse z l'inclinazione:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0}^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=0}^2} = \frac{T_y}{EI_x} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (314)$$

Le coordinate f_x ed f_y del baricentro della base libera del cilindro dopo lo spostamento, si ottengono dalle (313) ponendovi $z=l$:

$$f_x = \frac{T_y}{EI_x} al \quad ; \quad f_y = \frac{T_y}{EI_x} \left(\frac{l^3}{3} + bl\right) \quad (315)$$

e lo spostamento risultante:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \frac{T_y l}{EI_x} \sqrt{a^2 + \left(\frac{l^2}{3} + b\right)^2} \quad (315 \text{ bis})$$

si dice anche *freccia d'incurvamento*.

La tangente della curva in un punto generico ha un'inclinazione all'asse z data da:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \frac{T_y}{EI_x} \sqrt{\left[z\left(l - \frac{z}{2}\right) + b\right]^2 + a^2}$$

e l'inclinazione della tangente all'estremità libera, per $z=l$ è:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=l}^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=l}^2} = \frac{T_y}{EI_x} \sqrt{a^2 + \left(\frac{l^2}{2} + b\right)^2}$$

ed è facile verificare che questa tangente estrema incontra la tangente iniziale sopra considerata per $z = \frac{l}{3}$.

Dobbiamo ora proseguire ad *analizzare lo stato di tensione*; a tale proposito conviene tener presente che, a differenza di tutti gli altri casi particolari precedentemente studiati, le sollecitazioni interne variano qui da una sezione all'altra. Infatti dalle (306) risulta che, mentre la T_y è indipendente da z , invece i momenti flettenti M_x ed M_y sono funzioni lineari di z , com'è espresso anche dalle (309).

La distribuzione delle tensioni interne su una sezione trasversale generica risulta definita dalle relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x y}{I_x} = \frac{T_y}{I_x} (z-l)y = \frac{l x \cdot y}{I_x} \\ \tau_{xy} &= \frac{T_y}{2(m+1)I_x} \left| m \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right| \\ \tau_{yx} &= \frac{T_y}{2(m+1)I_x} \left| m \frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2m+1)xy \right| \end{aligned} \right\} \quad (316)$$

Dalla prima di queste espressioni si riconosce che la tensione normale σ_z dipende dal momento flettente M_x colla stessa legge che abbiamo a suo tempo trovata per la flessione semplice.

Invece le tensioni tangenziali τ_{yz} e τ_{zx} , (che non sono funzioni di z), sono provocate esclusivamente dallo sforzo di taglio T_y .

Si noti poi che la distribuzione delle τ_z dovute al taglio *dipende dal coefficiente m* . Anzi le τ_z diventano infinite per $m = -1$; questo fatto, che può sembrare paradossale, verrà delucidato più innanzi con un esempio significativo.

Le tensioni normali e quelle tangenziali si possono riguardare come due sistemi di forze indipendenti l'uno dall'altro, e sovrapposti per la simultanea presenza del momento flettente e dello sforzo di taglio.

Osserviamo però che una tale separazione dei due sistemi di tensioni è puramente ideale, ma non è fisicamente possibile; e precisamente può esistere da solo il momento flettente (flessione semplice), ma la presenza dello sforzo di taglio è sempre accompagnata da quella del momento flettente, salvo che in qualche sezione isolata, nella quale questo sia zero (per es. nel caso qui studiato ciò accade sulla base libera del cilindro).

Tuttavia tale distinzione è molto vantaggiosa per l'analisi del fenomeno meccanico, e può essere interessante approfondirla ancora, estendendola pure all'*analisi della deformazione*.

A tale scopo cerchiamo di calcolare le componenti u_f , v_f , w_f dello spostamento generico quale sarebbe prodotto dal solo momento flettente M_x , conforme alle (202) [pag. 222] che valgono per la flessione semplice, tenendo però presente che ora il momento flettente varia da una sezione all'altra, ossia è funzione della z .

In primo luogo, dalla prima delle (202) risulta che nell'espressione di u il fattore che moltiplica M_x non dipende da z ; perciò la u_f che qui cerchiamo dovrà avere la stessa espressione di quella u , ove però al posto di M_x si dovrà porre il suo valore dato dalla (309).

Inoltre è chiaro che la v_f e la w_f devono essere calcolate in modo che ogni tronco elementare di cilindro, compreso tra due sezioni rette a distanza infinitesima dz , contribuisca ai detti valori con incrementi espressi secondo le stesse (202), e secondo il valore — variabile — che M_x assume in corrispondenza dell'elemento stesso; inoltre è pure evidente che per $z = 0$ dovrà essere $w_f = w = 0$ e $v_f = v_0 =$ al valore dato dalla 2.^a delle (202) per $z = 0$ ed $M_x = -T_y l$.

In altri termini dovrà essere, per un valore generico di z :

La T_y è costante
 e nel cilindro
 se una coppia
 tende a ruotare,
 il cilindro, che
 tende a ruotare,
 tende a ruotare
 [316]

$$dv_f = \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw_f = \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

e quindi integrando, col tener conto delle condizioni sulla base vincolata $z = 0$, or ora specificata, si ha:

$$v_f = \int_0^z \frac{\partial v}{\partial z} dz + v_0$$

$$w_f = \int_0^z \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

e, ripetiamo, le derivate che qui compaiono devono essere ricavate dalle (202) ed in esse in luogo di M_x si deve porre il valore dato dalla prima delle (309).

Facendo queste operazioni, si ha infine:

$$\left. \begin{aligned} u_f &= \frac{T_y}{EI_x} \cdot \frac{xy}{m} (l-z) \\ v_f &= \frac{T_y}{EI_x} \left[\frac{z^2}{2} \left(l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l-z) \right] \\ w_f &= - \frac{T_y}{EI_x} yz \left(l - \frac{z}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (317)$$

Orbene, sottraendo queste ordinatamente dalle (311) otteniamo rispettivamente delle componenti di spostamento, le quali *non* sono ritenersi provocate dall'azione del momento flettente variabile; perciò esse devono attribuirsi esclusivamente allo sforzo di taglio T_y ; esse rappresentano lo spostamento dovuto al taglio, e le distinguiamo coll'indice t . Abbiamo così:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \frac{T_y}{EI_x} az \\ v_t &= \frac{T_y}{EI_x} bz \\ w_t &= - \frac{T_y}{EI_x} [yx^2 + ax + by - \Psi_{xy}] \end{aligned} \right\} \quad (318)$$

Le u_1 e v_1 sono indipendenti da x e da y : perciò esse rappresentano uno scorrimento che la sezione retta generica subisce nel suo stesso piano, senza deformarsi; tale scorrimento avviene nella direzione dello spostamento di componenti a e b , ed è proporzionale alla quota z della sezione stessa.

Per effetto di questo scorrimento, — quando esso si verificasse da solo, — tutte le rette inizialmente parallele all'asse z si trasformerebbero in altre rette pure tra loro parallele ed aventi rispetto al primitivo asse z l'inclinazione $\frac{T_y}{EI_x} \sqrt{a^2 + b^2}$. Si ritrova così, come deve essere, il valore già ottenuto più sopra, nella (314).

La componente w_1 dipende invece solo dalle coordinate x ed y ; perciò essa rappresenta un ingobbimento di ciascuna sezione retta, il quale resta lo stesso per tutte le sezioni del cilindro.

Si noti però che la nuova forma che la sezione assume, come pure l'inclinazione or ora considerata dipendono dalla funzione armonica Ψ , più sopra definita.

Perciò ci troviamo qui in condizioni analoghe a quelle del caso della torsione; però ora le difficoltà analitiche per la determinazione della Ψ sono anche più notevoli che nel caso precedente [v. (302)]. Perciò noi qui ci limiteremo ad indicare la soluzione esatta solo in un caso speciale, particolarmente facile, e passeremo poi ad esporre una soluzione generale approssimata, la quale viene comunemente adottata nella pratica, essendo molto semplice, ed insieme atta a rappresentare il fenomeno con buona approssimazione, come conferma l'esperienza.

Un istruttivo complemento della presente analisi della deformazione si ottiene calcolando dallo spostamento definito dalle (311), la componente r della rotazione o del vorticale, secondo la terza delle (18) a pag. 26. — Si ottiene in modo ovvio:

$$r = -\frac{T_y}{nEI_x} (l-z) x \quad (319)$$

$$\Delta r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Poichè l'asse y si è supposto baricentrico, se ne deduce che per una sezione qualunque il valor medio della rotazione r è nullo. Inoltre sulla base libera $z=l$ la detta rotazione r è nulla in tutti i punti.

Ne consegue che per effetto dello spostamento definito dalle (311), la base libera e caricata $z=l$, si ingobbiisce secondo la terza delle stesse, ruota rigidamente intorno ad un asse normale a z (in virtù della flessione e del taglio), inoltre essendo nulle le σ_z e quindi le ε (in virtù della base stessa non subisce deformazioni parallele al suo piano pri-

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

mitivo: infine, — fatto caratteristico e significativo, — essa base $z = l$ non subisce rotazione r intorno all'asse z .

Questo fatto ci permette di affermare che lo spostamento definito dalle (311) ed il conseguente stato di tensione rappresentato dalle (316) costituisce flessione composta (flessione con taglio), pura, cioè senza torsione.

La (319) e le successive conseguenze qui esposte, furono stabilite nel mio lavoro « *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali, ecc....* » già citato a pag. 326.

DIVERGENZA E ROTAZIONE DELLE τ_z .

Dalla terza delle (151) e dalla prima delle (316) si ricava facilmente:

$$\boxed{\operatorname{div} \tau_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{T_y}{I_x} y} \quad (320)$$

e si verifica pure che questa relazione è soddisfatta dalle ultime due delle (316), come deve essere, in quanto le (299) soddisfano, tra le altre condizioni fondamentali del problema, anche la (163), che è conseguenza della terza delle (151), ora citata.

Prendiamo ora in considerazione le *condizioni di congruenza* (17), a pag. 25. È facile verificare che per il problema di De Saint Venant la terza delle (17) è sempre identicamente soddisfatta, in quanto la ε_z non è funzione di x e le varie γ non sono funzioni di z . Invece le prime due delle (17), trasformate esprimendo le componenti di deformazione in funzione di quelle di tensione mediante le (148), (153), (154) (pag. 195 e 196), e tenendo conto della prima delle (316), ci danno:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot} \tau_z &= \frac{T_y}{2(m+1)I_x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot} \tau_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (321)$$

Da queste condizioni si deduce che la $\operatorname{rot} \tau_z$ deve essere indipendente da y , e funzione lineare della x , e precisamente:

$$\boxed{\operatorname{rot} \tau_z = \frac{T_y}{2(m+1)I_x} x + C} \quad (322)$$

ove C è una costante arbitraria d'integrazione.

Calcolando rot τ_z dalle seconda e terza delle (316) si ritrova la (322), per $C = 0$; e ciò costituisce una *proprietà caratteristica* della *distribuzione* (316), *flessione composta pura (senza torsione)*. Si noti poi che nel caso della torsione, per $T_y = 0$ le (320) e (322) si accordano rispettivamente con la (286) a pag. 308 e con la (280) a pag. 294.

Anzi notiamo che le (320) e (322) permettono che il problema della distribuzione delle τ_z dovute al taglio, venga posto sotto questa forma: « *determinare nell'area della sezione un vettore τ_z , il quale in ogni punto dell'area abbia la divergenza espressa dalla (320), la rotazione data dalla (322) ed inoltre abbia per traiettoria il contorno della sezione.* » Dobbiamo notare che se nella (322) si attribuisce alla costante C un valore diverso da zero, si definisce una distribuzione di τ_z più generale di quella espressa dalle due ultime delle (316).

Questo argomento verrà ripreso nell'Appendice in fine di questo volume. Resta ormai evidente che l'impostazione ora enunciata vale anche per il problema della torsione, quando si consideri la (254 ter) in luogo della (320) e la (254 bis) in luogo della (322).

TRAIETTORIE DELLE TENSIONI TANGENZIALI τ_z , E RELATIVE ISOCLINE.

Analogamente a quanto si vide per la torsione, sappiamo che anche qui le traiettorie delle τ_z hanno l'equazione differenziale:

$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xy}}$$

ove al secondo membro si devono sostituire i valori dati dalle 2^a e 3^a delle (316).

La soluzione di tale equazione differenziale è in generale molto ardua, anche quando già sia stata determinata la Ψ , che per lo più è una funzione trascendente tutt'altro che semplice.

Il tracciamento delle traiettorie può essere facilitato tracciando preventivamente le rispettive *isocline*, le cui equazioni si ottengono dall'espressione precedente, attribuendo ad i il valore che compete a ciascuna isoclina, nel modo già indicato per la torsione, al n.º 53, a pag. 287.

LAVORO DI DEFORMAZIONE. — FATTORE DI TAGLIO.

Il potenziale elastico è espresso, come sappiamo, dalla (165); inoltre dalla (316) risulta che esso si può considerare come la somma di due

parti, delle quali, l'una è quella che si avrebbe per il solo momento flettente: l'altra parte perciò è dovuta al solo taglio.

Questa seconda parte si può indicare con Φ_t , e viene espressa da:

$$\Phi_t = \frac{1}{2G} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2)$$

Tale espressione, com'è ben noto, è indipendente da z ; sostituendo i valori (319) ed integrando, si ha per tutto il cilindro il valore di deformazione L_t dovuto al taglio, espresso da:

$$\begin{aligned} L_t &= \int_V \Phi_t dV = \frac{l}{2G} \int_A (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2) dA = \\ &= \frac{T_y^2 m^2 l}{8G(m+1)^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right)^2 \right] dA \end{aligned}$$

Nella tecnica, per semplicità e per analogia con gli altri casi di sollecitazione, si usa esprimerlo sotto la forma:

$$L_t = \lambda \frac{T_y^2 l}{2GA} \quad (323)$$

ponendo:

$$\lambda = \frac{m^2}{4(m+1)^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right)^2 \right] dA \quad (323 \text{ bis})$$

Questo coefficiente λ , che è un numero astratto o puro, com'è facile verificare, si chiama *fattore di taglio*, od anche *coefficiente di forma*, in quanto esso, come si rileva dalla (322 bis), dipende, oltre che da m , soltanto dalla forma della data sezione.

Si deve notare che per $m = -1$, pur essendo infinito G , dalle (322) e (322 bis) risulta $L_t = \infty$. Questo è un altro fatto quasi paradossale, in relazione con quello segnalato a pag. 329, a proposito delle τ_z infinite: esso pure verrà delucidato ed illustrato tra breve mediante l'esempio significativo colà preannunziato.

FLESSIONE COMPOSTA PER IL CILINDRO CIRCOLARE.

Sia r il raggio della sezione retta circolare; in tal caso l'analisi dimostra facilmente che conforme alle (300) e (302) si ha:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \frac{y}{4} \left(\frac{3m+2}{m} r^2 + 3x^2 - y^2 \right) \\ b &= \frac{3m+2}{4m} r^2. \end{aligned} \right\} \quad (324)$$

ed in conseguenza :

D'altra parte è facile verificare in senso inverso che la Ψ così espressa soddisfa all'equazione di *Laplace*, ed alle (300) e (302), essendo ben inteso qui :

$$f = x^2 + y^2 - r^2.$$

Ciò posto, l'ultima delle (321) fornisce :

$$w_t = -\frac{T''}{4EI_x} (x^2 + y^2) y \quad (324 \text{ bis})$$

e questa ci definisce così l'ingobbimento sopra detto della sezione trasversale.

Le curve di livello della sezione ingobbita, rispetto al suo piano primitivo si ottengono facendo nella (324 bis) $w_t = \text{costante}$, e quindi hanno per equazione :

$$(x^2 + y^2) y = \text{costante} :$$

sono perciò delle cubiche, tutte omotetiche rispetto all'origine O .

L'equazione è soddisfatta per $y=0$, ossia la sezione ingobbita contiene l'asse x (asse neutro) della sezione primitivamente non ingobbita.

Le altre linee di livello hanno l'andamento rappresentato nella fig. 34.

Esse sono state tracciate per vari valori della costante, indicati in corrispondenza di ciascuna linea. Si noti che i punti di esse situati sull'asse y hanno le ordinate y , che stanno fra loro come le radici cubiche dei rispettivi valori della costante: i punti di dette curve situati invece sul contorno della sezione hanno ordinate y , che stanno fra loro nello stesso rapporto delle costanti.

È facile verificare che le dette linee presentano punti di flesso sulle due rette f, f' , inclinate di $\pm 30^\circ$ rispetto all'asse x (vedi fig. 34).

Nella stessa figura, a sinistra, adottando per le z' una scala molto ampliata, si è rappresentata la proiezione della sezione ingobbita, sul piano di sollecitazione yz .

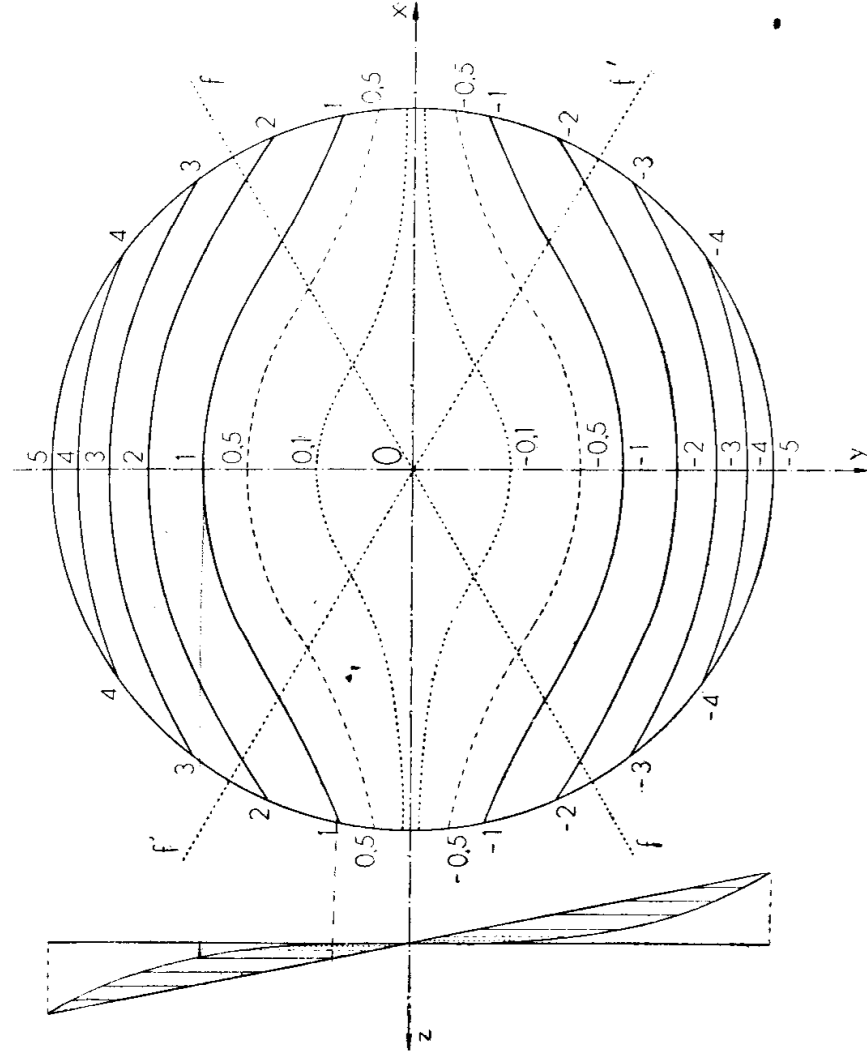


Fig. 34

L'intersezione della detta superficie con questo piano è la parabola cubica di equazione:

$$z' = -\frac{T_y y^3}{4 EI_x}$$

Per i punti del contorno si ha poi:

$$z' = -\frac{T_y r^2}{4 EI_x} y;$$

ne risulta quindi che, mentre la sezione s'ingobbisce, il contorno si conserva piano.

La distribuzione delle τ_x si ottiene dalle (319), tenendo conto della prima delle (323), osservando che in questo caso particolare $T_y = T$ (perchè $T_x = 0$) e ricordando che: $I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$; così, dopo facili riduzioni che omettiamo per brevità, si trova:

$$\begin{aligned} \tau_{zp} &= -\frac{T}{(m+1)\pi r^4} (m+2) xy \\ \tau_{yz} &= \frac{T}{2(m+1)\pi r^4} [(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2] \end{aligned} \quad (325)$$

Ne risulta che la τ_{zp} è nulla sui due assi x ed y : inoltre su una stessa corda parallela ad uno di questi assi la τ_{zp} varia con *legge lineare*, e la τ_{yz} invece varia con *legge parabolica*, raggiungendo il valore massimo in corrispondenza del punto medio della corda stessa: la τ_{yz} poi è nulla nei due estremi del diametro disteso sull'asse y ; il suo valore massimo dei massimi si ha nel centro O .
Esso è dato da:

$$\tau_{yz \text{ max}} = \frac{(3m+2) T_y r^2}{8(m+1) I_x};$$

da cui ponendo in luogo di I_x il suo ben noto valore e poi semplificando si ottiene:

$$\tau_{yz \text{ max}} = \frac{3m+2}{2(m+1)} \cdot \frac{T}{\pi r^2} \quad (326)$$

Si noti che il rapporto $T_y : \pi r^2$ è evidentemente il valore medio della τ_{yz} su tutta la sezione e la (325) ci dà il rapporto tra la $\tau_{yz \text{ max}}$ e detto valore medio; per il valore comunemente assunto nelle applicazioni $m=4$, il rapporto ora detto risulta eguale a $\frac{7}{5}$.

FATTORE DI TAGLIO χ PER LA SEZIONE CIRCOLARE.

Dalla (322 bis), tenendo conto della (323) e dei noti valori particolari di A e di ρ^4 , dopo facili riduzioni si ottiene:

$$\chi = \frac{1}{(m+1)^2 \pi r^6} \int_A (m+2)^2 x^2 y^2 + \frac{1}{4} [(3m+2)(r^2 - y^2) - (m-2)x^2]^2 dx$$

Sviluppato il quadrato []² nel secondo termine sotto integrale, ci si riduce ad eseguire i seguenti integrali:

$$\int_A x^2 y^2 dA ; \quad \int_A (r^2 - y^2)^2 dA ; \quad \int_A (r^2 - y^2) x^2 dA ; \quad \int_A x^4 dA .$$

Per calcolarli, posto $dA = dx dy$, si integra prima rispetto ad x , lungo una corda parallela all'asse x , avente ordinata y , e compresa tra due raggi simmetrici rispetto all'asse y , facenti ciascuno con l'asse x un angolo α : indi si tiene presente che nel contorno circolare si deve avere:

$$x = r \cos \alpha ; \quad y = r \sin \alpha$$

e quindi:

$$dy = r \cos \alpha d\alpha ;$$

con queste sostituzioni la successiva integrazione da eseguire rispetto ad y si riduce all'integrazione rispetto ad α ; siamo così ricondotti a calcolare gli integrali di $\cos^4 \alpha$ e di $\cos^6 \alpha$. D'altra parte è ben noto

che:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi .$$

In conseguenza, dopo facili passaggi, che omettiamo per brevità, si trova:

$$\int_A x^2 y^2 dA = \frac{1}{24} \pi r^6 ; \quad \int_A (r^2 - y^2) dA = \frac{5}{8} \pi r^6 ;$$

$$\int_A (r^2 - y^2) x^2 dA = \frac{5}{24} \pi r^6 ; \quad \int_A x^4 dA = \frac{1}{8} \pi r^6$$

Sostituendo questi valori nell'espressione precedente di χ , sviluppata come s'è detto, si trova infine:

$$\chi = \frac{1}{8(m+1)^2} \left| \frac{(m+2)^2}{3} + \frac{5(3m+2)^2}{4} - \frac{5(3m+2)(m-2)}{6} + \frac{(m-2)^2}{4} \right| \quad (327)$$

Vale la pena di tener presenti i valori di χ per alcuni valori particolari di m : dalla (327), eseguendo i calcoli numerici, si ricava:

$$\text{per } m = 2 \text{ (valore limite) : } \chi = \frac{32}{27} = 1,185\dots$$

$$\text{» } m = \frac{10}{3} = 3,333\dots$$

$$\chi = \frac{596}{507} = 1,175$$

$$\text{» } m = 4$$

$$\chi = \frac{88}{75} = 1,1733\dots$$

$$\text{» } m = \infty \left(\frac{1}{m} = 0 \right)$$

$$\chi = \frac{7}{6} = 1,166\dots$$

$$\text{» } m = -2$$

$$\chi = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$\text{» } m = -1 \text{ (valore limite) : } \chi = \infty$$

TRAIETTORIE DELLE $\bar{\tau}_z$ PER LA SEZIONE CIRCOLARE.

Per tracciare queste traiettorie si può ricorrere alla preventiva determinazione delle relative isocline, col metodo già seguito per la torsione del prisma a sezione triangola equilatera, a pag. 287 e seguenti (cfr. anche n.º 48, pag. 204).

L'inclinazione della $\bar{\tau}_z$ è data da:

$$i = \frac{\bar{\tau}_{yz}}{\bar{\tau}_{xz}}$$

e dalle (325) si ottiene dopo ovvie semplificazioni l'equazione dell'isocline corrispondente al valore generico di i , sotto la forma:

$$(3m+2)(r^2-y^2) - (m-2)x^2 + 2i(m+2)xy = 0.$$

Questa rappresenta una conica col centro nell'origine O (centro della sezione circolare); al variare di i tra $-\infty$ e $+\infty$ si ottiene tutto il « fascio » di coniche passanti per quattro punti fissi: i due estremi

A e B del diametro del cerchio sezione disteso sull'asse y (v. fig. 35) ed i due punti M ed N definiti da $y = 0$ ed $x = \pm r \sqrt{\frac{3m+2}{m-2}}$. Al

fascio appartengono pure come coniche degeneri le tre coppie di lati opposti del *quadrangolo completo* $ABMN$, e precisamente: la coppia degli assi (coordinati xy (iperbole degeneri), e le coppie di rette parallele AM , BN ed AN , BM (parabole degeneri). Nella fig. 35 sono

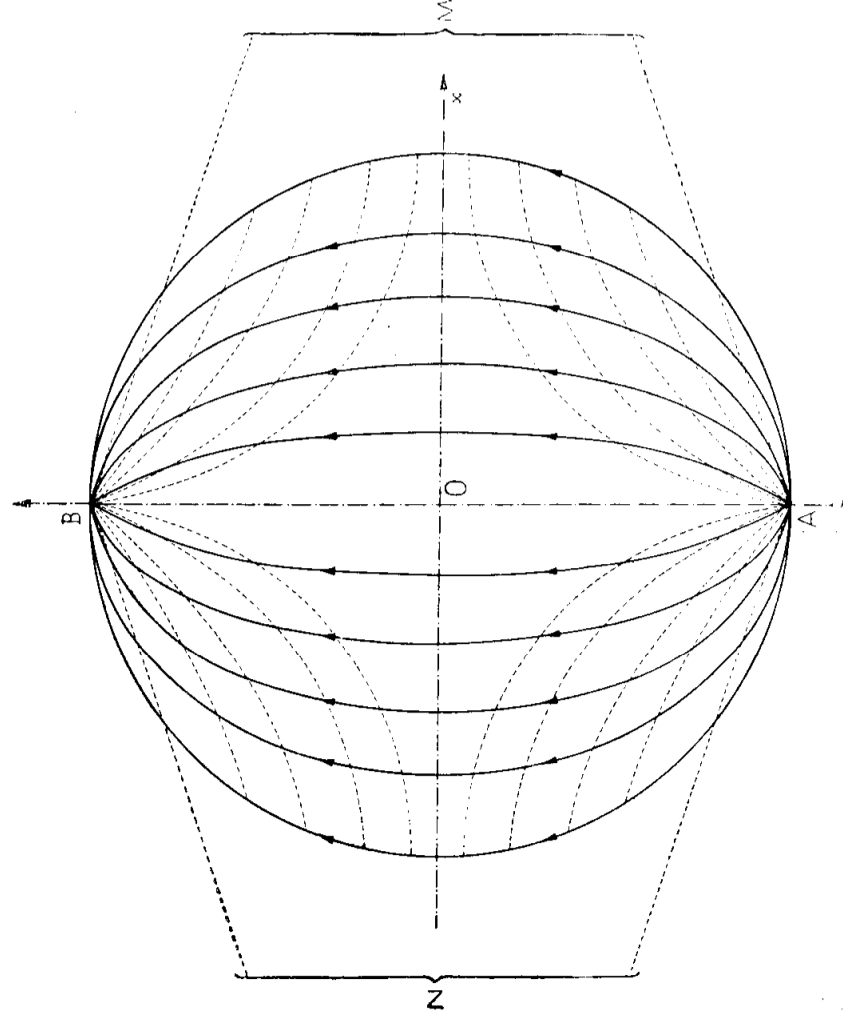


Fig. 35

segnate a tratti alcune di dette coniche, comprese le coppie di rette, per il valore comunemente adottato di $m = 4$; poichè il contorno circolare è esso stesso una traiettoria della τ_x , il valore di i che corrisponde ad una isoclina è l'inclinazione delle tangenti al detto contorno nei due punti diametralmente opposti, nei quali esso è ulteriormente incontrato dall'isoclina stessa, che già l'incontra in A e in B . Nella fig. 35 sono poi segnate con tratto pieno alcune traiettorie, disposte in modo da staccare, sull'asse neutro x , tratti attraversati da uguali flussi di τ_y . Una di tali traiettorie è lo stesso diametro AB , disteso sull'asse y .

Mentre le isocline possono agevolare il tracciamento delle traiettorie, d'altra parte in questo caso è facile ricavare direttamente le equazioni in termini finiti delle traiettorie stesse.

Infatti dalle (325) si ricava subito l'equazione differenziale delle dette traiettorie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3m+2)(r^2-y^2) - (m-2)x^2}{-2(m+2)xy}.$$

Si ponga: $f = r^2 - y^2$, da cui si deduce:

$$\frac{df}{dx} = -2y \frac{dy}{dx};$$

e con ciò l'equazione differenziale diviene:

$$\frac{df}{dx} = \frac{3m+2}{(m+2)x} f - \frac{m-2}{m+2} x.$$

Questa è del primo ordine, lineare, del tipo assai noto:

$$\frac{df}{dx} = Pf + Q$$

ove P e Q sono funzioni della sola x .

È pure ben noto il relativo integrale generale:

$$f = e^{\int P dx} \left(C + \int Q e^{-\int P dx} dx \right),$$

ove C è una costante arbitraria.

Applicando questa espressione al caso nostro, dopo calcoli ovvi, omissi per brevità, si trova:

$$f = r^2 - y^2 = x^2 + C |x|^{\frac{3m+2}{m+2}} \tag{328}$$

[$|x|$ = modulo di x , sicchè la f è funzione *pari* di x].

La costante C si può determinare fissando un punto arbitrario, per cui si voglia far passare la traiettoria, che in conseguenza viene individuata.

L'equazione (328) si presta pure ad una semplice « costruzione » geometrica, in base ad ovvia, ripetuta applicazione dei teoremi di Pitagora e di Euclide.

DISCUSSIONE DEI PRECEDENTI RISULTATI, IN RELAZIONE AI VARI VALORI DI m .

Ricordiamo che $\frac{1}{m}$ può variare nell'intervallo tra -1 ed $\frac{1}{2}$.

Al limite superiore, cioè per $m=2$, della seconda delle (325) si rileva che la τ_{yz} è funzione della sola y , ossia è costante su ciascuna corda parallela all'asse neutro x .

La (328) dimostra che per $m=2$ le traiettorie delle τ_z sono ellissi aventi un asse nel diametro AB , e l'altro asse variabile tra 0 e $2r$.

Per $\frac{1}{m}$ compreso nell'intervallo $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, esclusi gli estremi, le traiettorie (328) passano tutte per i punti A e B , ove risultano tangenti al contorno, e sono simmetriche rispetto all'asse y .

La τ_{yz} è sempre positiva (cospirante con T); la τ_{xz} ha il segno di xy . Se, come in fig. 35 la T è diretta da A a B , le traiettorie, compreso il contorno, nel senso di τ_z sono percorse pure da A verso B .

Per $\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$, cioè $m = -2$ la τ_{xz} è ovunque nulla, la i è ovunque infinita, la $\bar{\tau}_z$ è dappertutto parallela all'asse y , ed è espressa da:

$$\tau_z \equiv \tau_{yz} = \frac{2T}{\pi r^4} (r^2 - y^2 - x^2);$$

ne consegue che essa è nulla sul contorno, varia con legge parabolica lungo ogni corda parallela ad uno degli assi x od y , ed assume il valore massimo dei massimi nel centro O :

$$\tau_{z \text{ max}} = \frac{2T}{\pi r^2}$$

(doppio della tensione media). Le traiettorie della $\bar{\tau}_z$ sono in questo caso rette parallele all'asse y .

Per $\frac{1}{m}$ invece compreso nell'intervallo tra $-\frac{1}{2}$ e -1 la τ_{xz} ha il segno di $-xy$; la τ_{yz} per un valore generico di y , cioè su una generica corda parallela all'asse x , è positiva in prossimità dell'asse y , è negativa sul contorno, e si annulla in un punto intermedio.

Sull'asse x si hanno due punti di tensione nulla, che sono gli stessi punti M ed N definiti a proposito della fig. 35, i quali in questo caso risultano interni alla sezione.

Per i già citati punti A e B passano solo due traiettorie: la stessa retta AB , percorsa in senso concorde a T , da A verso B , ed il contorno circolare, in cui le due semicirconferenze separate da AB sono

percorse nel senso da B verso A . Le altre traiettorie rappresentate dalla (323) costituiscono due gruppi, simmetrici rispetto all'asse y , di curve chiuse ciascuna su se stessa, non intersecantisi, mentre tutte

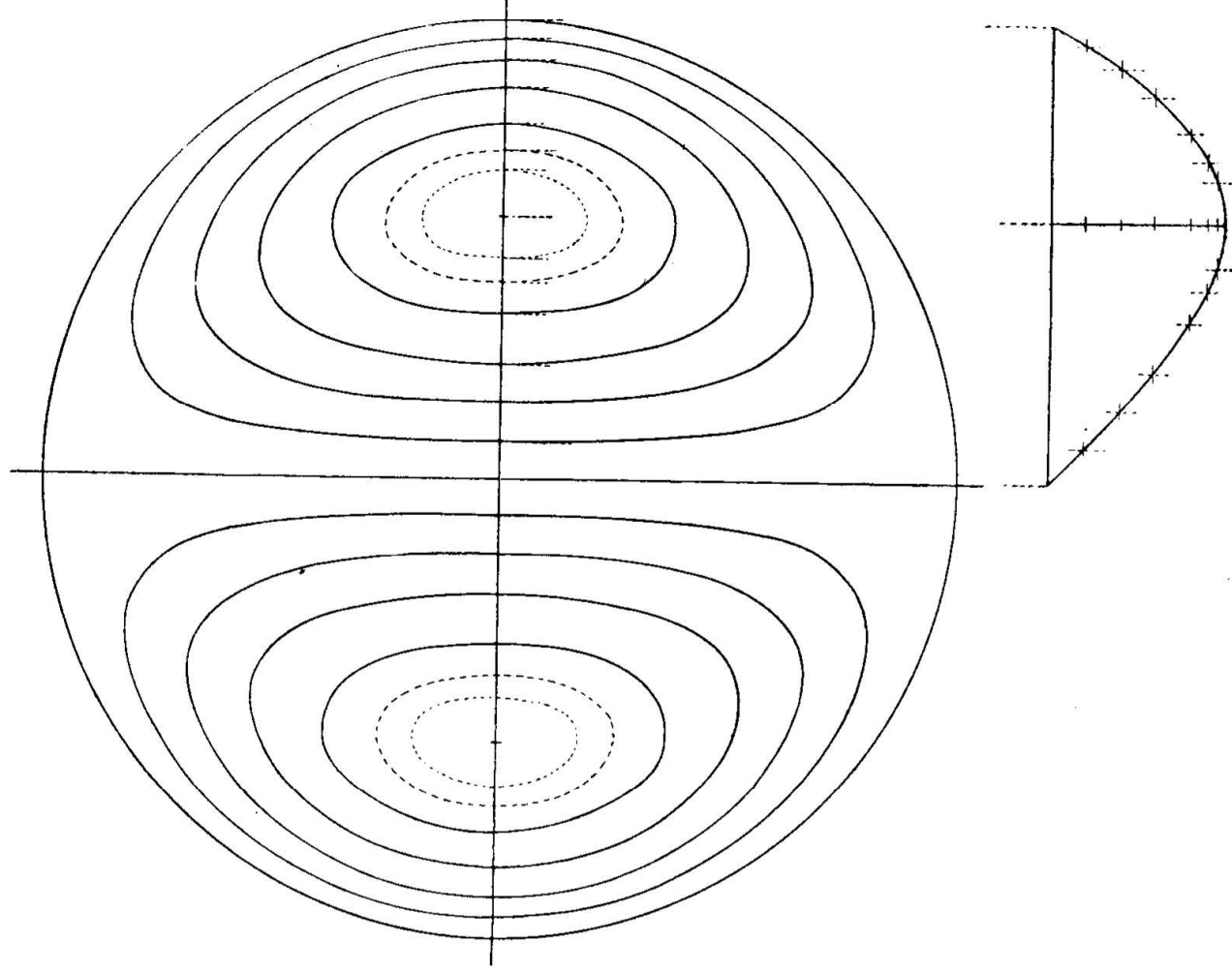


Fig. 36

le curve di ciascun gruppo racchiudono nel loro interno uno e l'altro rispettivamente dei punti di tensione nulla M ed N . L'andamento qui descritto è *analogo* a quello della fig. 36, nella quale furono tracciate alcune delle dette traiettorie per il caso limite $m = -1$.

Questo caso è particolarmente semplice ed istruttivo. Notiamo anzitutto che la (328) diviene ora:

$$r^2 - y^2 = x^2 + C \quad (329)$$

e perciò le traiettorie sono *cubiche*.

Nella fig. 36 sono tracciate a tratto pieno per ognuno dei semicerchi separati dal diametro AB , quattro di tali traiettorie, dividenti il segmento OM (od ON) in 5 parti attraversate da ugual flusso di τ_{yz} ; la parte adiacente ad M (o ad N) fu suddivisa in parti rispettivamente di flusso metà e di flusso $\frac{1}{4}$ di quello precedente con le traiettorie segnate a tratti ed a punti. La suddivisione fu fatta mediante il sottostante diagramma integrale di τ_{yz} sul raggio disteso sull'asse x .

Le componenti di tensione sono in questo caso infinite, come già sappiamo da pag. 329; anzi notiamo che il fattore che in esse compare: $\frac{1}{m+1}$, per $m = -1$, si deve porre $= -\infty$, quale limite di una

quantità grandissima *negativa*, in quanto m può assumere in *prossimità soltanto valori minori di -1*.

Inoltre, a meno di un fattore $= -\infty$, ora precisato, la τ_{yz} risulta proporzionale a:

$$\eta = r^2 - y^2 - 3x^2$$

Il flusso che attraversa una semi-corda per $y = \text{costante}$, ed x variabile tra 0 ed $x_1 = \sqrt{r^2 - y^2}$ è:

$$\int_0^{x_1} \eta dx = \left[x_1^2 x - x^3 \right]_0^{x_1} = 0$$

e poichè ciò si verifica per qualunque valore di y , ne consegue che:

$$\int_{A_1} \eta dA = 0$$

esteso l'integrale di area ad ognuno dei semicerchi (A_1) in cui la sezione viene suddivisa dal diametro AB .

Questo può servire a delucidare e spiegare l'*apparente* paradosso delle tensioni infinite per T finito (per $m = -1$), segnalato a pag. 329.

Si noti poi che gli spostamenti e gli scorrimenti, pure per $m = -1$ sono finiti, poichè G diventa infinito come $\frac{1}{m+1}$; se ne deduce che il lavoro di deformazione dovuto al taglio deve essere infinito, di modo che il secondo *apparente* paradosso segnalato a pag. 334, ed ivi ricavato per altra via, è diretta conseguenza del primo, poco sopra citato. Il quale poi si può ulteriormente precisare, osservando che quando sia $m < -1$, ma vicinissimo a tale limite, il flusso di τ_z attraverso una qualsiasi corda $y = \text{costante}$ deve essere costituito di due parti di segno opposto, e tali che la loro somma algebrica sia piccolissima in rapporto al valore assoluto di una di esse; e poichè sempre deve essere $\int_A \tau_{yz} dA = T$, le tensioni τ_z devono essere grandissime, e col tendere di m a -1 , esse tendono a valori infiniti, pur restando sempre $\int_A \tau_{yz} dA = T$, finito.

Queste constatazioni fatte in questo caso particolarmente semplice e facile della sezione circolare servono ad illustrare, a titolo d'esempio, il fenomeno anche per una qualunque sezione di forma generica, e ad illuminare la vera natura razionale, e solo apparentemente paradossale dei due fatti $\tau_v = \infty$ ed $L_v = \infty$ per $m = -1$.

AVVERTENZA SULL'APPLICABILITÀ AI CASI CONCRETI PRATICI.

Le considerazioni qui sopra svolte sono anche utili per un'altra questione notevole. Dobbiamo osservare che la distribuzione di τ_z constatata poco sopra per m prossimo al valor limite -1 , (con andamento spiccatamente *circolatorio* delle traiettorie delle τ_z , e presentante su ogni corda $y = \text{costante}$, tratti percorsi da flussi di τ_z di segni opposti, molto vicini in valore assoluto, e con somma complessiva positiva sì, ma molto piccola) è molto e profondamente diversa dalle distribuzioni che nella pratica si possono presentare sulle due basi di un cilindro sollecitato a taglio. Tali distribuzioni sono per lo più incognite molto difficilmente determinabili, ma, con quasi assoluta probabilità, esse devono essere caratterizzate da τ_z tutte *concordi* col taglio T , e con flussi ovunque positivi sulle corde $y = \text{costante}$.

Il divario qui constatato, tra la distribuzione di tensioni interne (325) e quella presumibile presentantesi su ciascuna delle basi del cilindro nelle sollecitazioni concrete dei casi pratici, è dunque troppo grande perchè si possa ottenere buona approssimazione applicando senz'altro, quando sia m assai prossimo a -1 , il criterio di *sostitu-*

zione di sistemi di forze staticamente equivalenti sulle basi del cilindro, criterio esposto e debitamente illustrato al n.º 49, pag. 210. Richiamandoci ad esso, vogliamo ora attirare l'attenzione degli studiosi e dei tecnici sulle riserve qui sopra formulate. L'argomento merita di venir approfondito con ricerche analitiche e con verifiche sperimentali.

Però dobbiamo osservare che l'analisi critica ora svolta e le riserve formulate non sono destinate ad infirmare l'applicabilità dei risultati del problema di De Saint Venant alle questioni tecniche dell'ingegneria, in relazione con ciò che dicemmo al n.º 49, pag. 209 e seguenti: infatti fortunatamente la quasi totalità dei materiali impiegati dagli ingegneri nelle loro costruzioni hanno per il coefficiente di Poisson $\frac{1}{m}$ valori relativamente *molto* lontani dal limite -1 poco sopra considerato, ed anzi per lo più valori maggiori di zero, prossimi all'incirca a 0,2; 0,25; 0,3, di modo che in tali casi *non* si presenta l'anomalia sopra illustrata.

ALTRI CASI DI TRATTAZIONE RELATIVAMENTE SEMPLICE.

Esposta così, a titolo d'esempio significativo ed istruttivo, la trattazione particolarmente semplice del caso della sezione circolare, ci limitiamo ora ad indicare, come notizia, che pure abbastanza semplice risulta il caso della sezione ellittica, sollecitata secondo uno degli assi: la trattazione di questo caso si trova nella classica opera del CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, (traduzione di M. De Saint Venant) alla quale rimandiamo chi volesse approfondire l'argomento. In essa opera è pure trattato il caso della sezione rettangolare, sollecitata secondo una mediana, il quale richiede l'uso delle funzioni ellittiche.

COMPLEMENTI SULLA TORSIONE E SUL TAGLIO RINVIATI IN APPENDICE.

Nei due precedenti numeri 53 e 54 abbiamo esposto della trattazione rigorosa delle due ora dette sollecitazioni, tutto ciò che più direttamente interessa le immediate applicazioni tecniche. Restano ad esporre su entrambi i problemi alcuni complementi di carattere un po' più elevato, con inquadratura più vasta e generale dei vari fenomeni e con significative ed istruttive analogie. Per il loro carattere e la loro natura questi complementi richiedono una esposizione distinta e separata, la quale, per contingenti ragioni di opportunità editoriale e tipografica, noi dobbiamo rinviare all'Appendice in fine al presente volume.

Passiamo ora ad esporre la soluzione approssimata del problema del taglio, già preannunziata più sopra, a pag. 331.

55. TRATTAZIONE APPROSSIMATA DEL PROBLEMA DEL TAGLIO.

Questa trattazione consiste nel ricercare direttamente il valor medio della τ_{yz} lungo una corda generica condotta nella sezione parallelamente all'asse x , a distanza y da questo. La ricerca del detto valor medio si può fare rigorosamente; il calcolo diviene solo approssimato poi, in quanto si identifica tale valor medio col valore effettivo locale della τ_{yz} .

In alcuni trattati di elasticità tecnica, in questa trattazione approssimata si ritiene inoltre $\tau_{yz} = 0$; noi qui vedremo che si può fare a meno di introdurre una nuova ipotesi semplificativa (fonte di inesattezze) oltre a quella precedente, or ora enunciata, e che è facile determinare invece la τ_{yz} in funzione del definito valor medio di τ_{yz} su ogni corda $y = \text{costante}$.

Consideriamo una sezione generica riferita ai soliti assi x ed y baricentrici, ma del resto qualunque (anche non principali di inerzia) come all'inizio del n.º 54. Sia x l'asse neutro: l'asse di sollecitazione — parallelo al taglio complessivo di componenti T_x e T_y — sarà congiunto dell'asse x rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione, come risulta del resto pure dalla 4ª e dalla 5ª delle (306) e dalla (308). (V. fig. 37). Si consideri la detta corda contenente i punti a distanza y dall'asse x ; e sia b la sua lunghezza.

Per tale corda conduciamo un piano parallelo all'asse geometrico z (sezione longitudinale) e, consideriamo la porzione V_0 di cilindro (tratteggiata in figura) compresa tra questo piano, la superficie dell'asse z rispetto a detto piano, e due sezioni trasversali a distanza dz : v. la fig. 37 ove a destra è segnata la proiezione sul piano yz del tratto di cilindro limitato tra le dette sezioni trasversali.

Studiamo l'equilibrio della porzione V_0 ora definita, la quale sulla faccia piana di sezione longitudinale, rettangolo di lati b e dz , è sollecitata dalla tensione tangenziale $-\tau_{yz}$, e quindi in totale, indicando con τ_{yz} il valore medio della τ_{yz} , lo sforzo tangenziale complessivo sul detto rettangolo è:

$$-\tau_{yz} \cdot b \cdot dz$$

ed il segno — indica che se τ_{yz} è positiva, detto sforzo, (agente sulla porzione V_0) è diretto nel senso delle z negative. Per l'equilibrio

Del taglio T
complesso è
dato con solo la
divisione; ricca
sotto la x col po
sione $1/2$
rimoto, dalla
la distanza
in direzione
(p. 355 e 364)
colle' effetto
retta d'azione del
taglio, non data
più in sola
divisione.