

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= y - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{m_1 \cos h(m_1 x) \operatorname{sen}(m_1 y)}{(2n-1)^3 \cos h(m_1 a)} \\
 &= -y + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{m_2 \operatorname{sen} h(m_2 y) \cos(m_2 x)}{(2n-1)^3 \cos h(m_2 b)} \\
 \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= x - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{m_1 \operatorname{sen} h(m_1 x) \cos(m_1 y)}{(2n-1)^3 \cos h(m_1 a)} \\
 &= -x + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{m_2 \cos h(m_2 y) \operatorname{sen}(m_2 x)}{(2n-1)^3 \cos h(m_2 b)}
 \end{aligned}
 \tag{276}$$

L'inclinazione i della τ_z rispetto all'asse delle x , secondo le (254) è espressa da:

$$i = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x}{\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y};$$

e per le (276) si ottiene:

$$i = \frac{-b^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{m_1 \operatorname{sen} h(m_1 x) \cos(m_1 y)}{(2n-1)^3 \cos h(m_1 a)}}{a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{m_2 \operatorname{sen} h(m_2 y) \cos(m_2 x)}{(2n-1)^3 \cos h(m_2 b)}}$$

Questa relazione, per un dato valore della i , costituisce l'equazione di una linea isoclina rispetto alle traiettorie delle τ_z , (linea analoga a quelle considerate nel caso particolare precedente).

La detta equazione è trascendente, ed in causa delle sommatorie non è facile rappresentarla geometricamente; però la "famiglia", delle linee isocline sopra dette si può costruire per interpolazione approssimata dopo aver ricavato, mediante la detta equazione, i valori di i per diversi punti della sezione che si considera.

Sempre allo scopo di determinare le componenti della τ_z , secondo le (254), occorre conoscere I_ρ , ed il fattore di torsione q .

Dalla statica si sa che, per la nostra sezione rettangolare di lati $2a$ e $2b$, si ha:

$$I_p = \frac{4}{3} ab (a^2 + b^2) .$$

Inoltre dalla (252), tenendo conto della (275), si ottiene, con facili riduzioni:

$$q = \frac{\frac{4}{3} (a^2 + b^2)}{b^2 \left| \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \operatorname{tang} h \left(\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi a}{b} \right) \right|} \quad (277)$$

Nel caso del quadrato ($a=b$) si ha:

$$q = \frac{8}{16 - 3 \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \operatorname{tang} h \left(\frac{2n-1}{2} \pi \right)}$$

da cui, eseguendo i calcoli si trova:

$$q = 1,18559 .$$

Nel caso invece di un rettangolo molto allungato nel senso dell'asse delle x , cioè quando a sia molto grande in confronto di b , dalla (277) si ricava facilmente:

$$q = \frac{a^2 + b^2}{4b^2 \left(1 - 0,630 \frac{b}{a} \right)} \quad (277 \text{ bis})$$

ed ancora, se il rapporto $\frac{b}{a}$ è piccolissimo:

$$q = \frac{a^2 + b^2}{4b^2} \sim , \quad (277 \text{ ter})$$

od anche, trascurando a numeratore il b^2 in confronto dell' a^2 :

$$q = \left(\frac{a}{2b} \right)^2 \sim$$

e da queste espressioni si rileva come q cresca rapidamente al crescere del rapporto $\frac{a}{b}$.

Per semplificare i calcoli numerici derivanti dalle formule sopra esposte, praticamente si può adottare la formula seguente :

$$q = \alpha \frac{I_p^2}{4 I_c I_y} \quad (278)$$

ovvero, colle notazioni della fig. 20,

$$q = \alpha \frac{(a^2 + b^2)^2}{4 a^2 b^2} \quad (278 \text{ bis})$$

ove α è un coefficiente che varia tra il valore 1,18559 per il quadrato, ed il valore 1 per il rettangolo molto allungato; nell'intervallo, esso è funzione del rapporto $a:b$.

La (278), salvo una diversa espressione formale, fu esposta in una Memoria del De Saint Venant sulla torsione dei prismi e cilindri, pubblicata nel 1855 sui Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Parigi; in essa il detto Autore in una tabella espone pure i valori del coefficiente α in funzione di numerosi valori del rapporto (di allungamento) $a:b$, variando questo tra 1 ed ∞ .

Il Bauschinger con apposite misure sperimentali, mediante la relazione (255), ricercò una verifica per i detti valori dati dal De Saint Venant per il coefficiente α : e tali valori furono perfettamente confermati dall'esperimento.

Vale la pena rilevare l'analogia tra il valore di q dato dalla (278 bis) e quello per la sezione ellittica fornito dalla (267).

Nella figura 21, a scopo di chiarimento *qualitativo*, sono tracciate alcune delle traiettorie della τ_z , in modo che esse corrispondano prossimamente a zone di ugual flusso di tensione, analogamente a quanto si fece rigorosamente nella fig. 19, per la sezione triangolare equilatera.

Per ciò che riguarda l'*equazione di stabilità* dobbiamo osservare che dalle (254), trasformate colle sostituzioni (276), si può verificare

facilmente che il valore massimo della τ_z si ha nei punti di mezzo dei due lati più lunghi e cioè, supponendo secondo la fig. 20 $a > b$, per $x = 0$ ed $y = \pm b$. Per tali valori si trova:

$$\tau_{yz} = 0 \quad \tau_{z\max} = \tau_{z\max},$$

e l'ultimo valore è appunto quello che per la stabilità deve non superare il *carico di sicurezza alla tensione tangenziale* $t = \frac{4}{5} k$ [v. (260) pag. 271].

Per i calcoli pratici, e quando si tratti di un rettangolo non molto allungato (per es. per $a : b \leq 5$) dà una buona approssimazione la

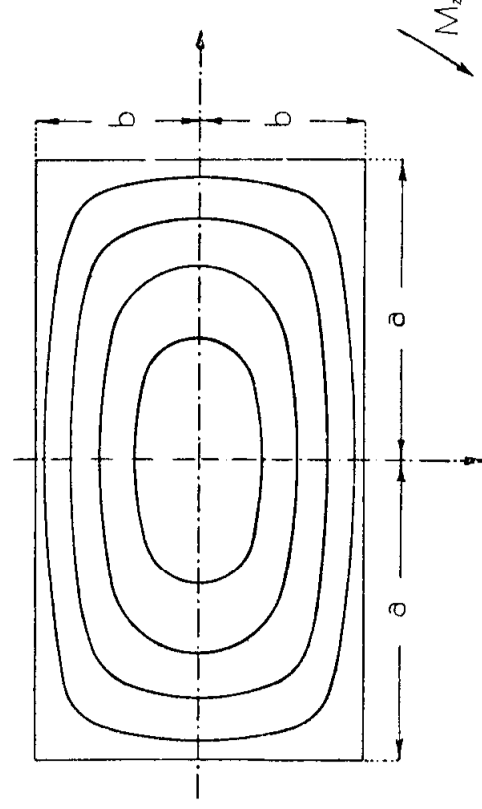


Fig. 21.

seguinte formola, molto semplice, che si trova comunemente citata nei trattati e nei manuali:

$$\tau_{z\max} = \frac{9}{16} \frac{M_z}{ab^2}, \quad (279)$$

la quale naturalmente vale pure per il quadrato, per cui è $a = b$.

Invece per rettangoli molto allungati (per es. per $a : b > 5$) da risultati più approssimati un'altra formola, che ora dimostreremo.

Richiamiamo l'espressione di rot τ_z , già ricavata con la (254 bis) a pag. 268, e che qui trascriviamo:

$$2 \operatorname{rot} \tau_z = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zox}}{\partial y} = 2q \frac{M_z}{I_p}. \quad (280)$$

Orbene per il rettangolo molto allungato (e per $a > b$), dalla stessa fig. 21, si rileva che nei punti dell'asse y , ossia per $x = 0$ le traiettorie delle τ_z hanno curvatura molto piccola, tanto più piccola quanto più grande è il rapporto di allungamento $a : b$. Inoltre per evidenti ragioni di simmetria nei citati punti dell'asse y le dette traiettorie delle τ_z hanno tangenti parallele all'asse x .

Ne consegue che per $a : b$ molto grande si può ritenere, con ottima approssimazione, che per $x = 0$ sia :

$$\tau_{yz} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0 ;$$

e perciò dalla (280) si deduce, (pure per $x = 0$) :

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = -2q \frac{M_z}{I_p} \qquad (280 \text{ bis})$$

Ora, poichè nel baricentro O si ha $\tau_z = 0$, come si vide più sopra, e come si potrebbe verificare pure dalle (276), in conseguenza, integrando rispetto ad y la (280 bis), si ricava, sempre per $x = 0$:

$$\tau_{zx} = -2q \frac{M_z}{I_p} y ; \qquad (281)$$

e quindi per $y = \pm b$ (ed ancora $x = 0$), si ha in valore assoluto :

$$\tau_{z \text{ max}} = 2q \frac{M_z}{I_p} b ;$$

da cui, sostituendo a q il valore dato dalla (277 ter), ed a I_p la ben nota espressione, si trova infine :

$$\tau_{z \text{ max}} = \frac{3}{8} \frac{M_z}{ab^2}. \qquad (282)$$

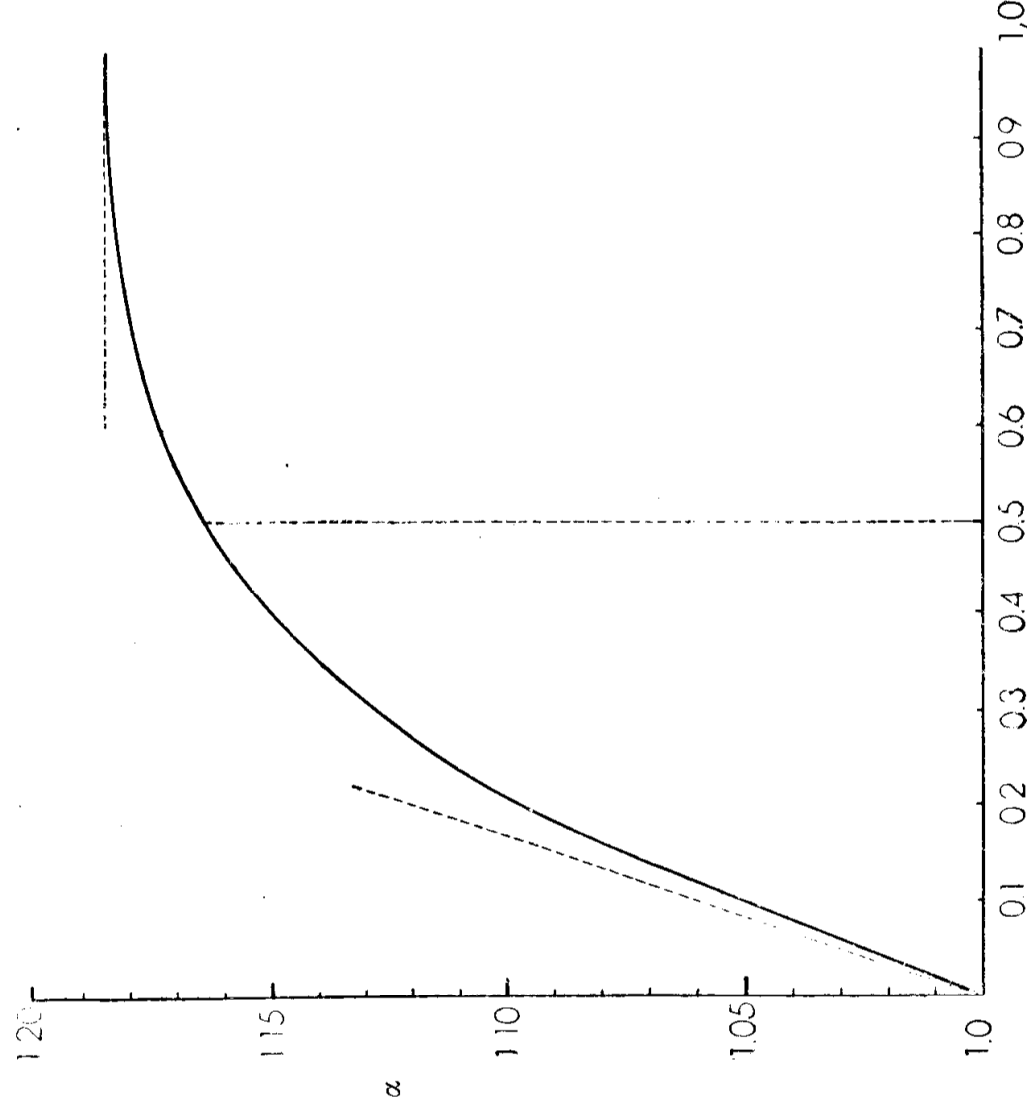
È utile osservare che questo valore è uguale ai $2/3$ di quello fornito dalla (279) per il rettangolo poco allungato.

Dalla (281), colle stesse sostituzioni fatte or ora, si trova che per $x = 0$ è :

$$\tau_{zx} = \frac{3}{8} \frac{M_z}{ab^3} y \qquad (281 \text{ bis})$$

da cui si rileva che lungo l'asse y la $\tau_{xy} = \tau_z$ varia proporzionalmente alla distanza y .

La stessa legge di ripartizione della detta tensione τ_z vale pure lungo ogni retta parallela all'asse y situata in un breve tratto della



b : a

Fig. 22.

sezione contiguo all'asse y stesso, e ciò è verificato con approssimazione tanto maggiore, quanto più grande è il rapporto $a:b$.

Crediamo opportuno poi riportare nella fig. 22, un diagramma rappresentante la legge di variazione del coefficiente α delle (278) e (278 bis), in funzione di vari valori del rapporto $b:a$ secondo la tabella del De Saint-Venant, citata a pag 293.

Nel detto diagramma si portarono come ordinate i valori di $(\alpha-1)$,

cioè si prese l'asse delle ascisse in corrispondenza del valore $\alpha = 1$; la scala delle ordinate è: 5 cm \equiv 0,1; come ascisse poi si portarono i valori del rapporto $b : a$, nella scala: 10 cm \equiv 1, estendendo il diagramma all'intervallo $0 \div 1$.

Per ragioni di evidente simmetria è ovvio che se si proseguisse il diagramma si dovrebbero portare uguali valori dell'ordinata per valori reciproci dell'ascissa.

Sarebbe superfluo ricordare che la rotazione rigida ψ della sezione di quota z è sempre data dalla (255); la quale, secondo la (278 bis) e col noto valore di I_p , diviene:

$$\psi = \frac{3}{16} \alpha \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M_z}{G} z \quad (283)$$

questa poi, per il rettangolo molto allungato (cioè quando b è piccolissimo in confronto di a), ci dà, essendo $\alpha = 1$:

$$\psi = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_z}{G a b^3} z \quad (283 \text{ bis})$$

INGOBBIMENTO DELLA SEZIONE RETTANGOLARE.

Questo si ricava subito al solito, calcolando lo spostamento w secondo la terza delle (253), tenendo presente che, per ragioni di evidente simmetria l'asse di torsione deve coincidere collo stesso asse z , come del resto risulta pure confermato dalle (245), combinate colle (276).

Si ha quindi:

$$w = -q \frac{M_z}{G I_p} \Psi_{xy},$$

od anche, colle trasformazioni testè fatte:

$$w = \frac{3}{16} \alpha \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M_z}{G} \Psi_{xy}, \quad (284)$$

ove per Ψ vale l'espressione data dalla (275), o quella della (275 bis).

Riesce facile verificare che w è nullo per $x = 0$ ed anche per $y = 0$, cioè sulle mediane del rettangolo; inoltre che w è funzione dispari tanto della x quanto della y , sicchè cambia di segno con ciascuna di queste variabili.

Per il quadrato ($a = b$) si verifica poi anche facilmente che la w si annulla pure sulle diagonali, e cambia di segno quando si passa attraverso a queste. Perciò il quadrato vien diviso dalle due mediane e dalle due diagonali in otto regioni, nelle quali la w è alternativamente positiva e negativa.

Tale comportamento è rappresentato nella fig. 23, ove sono segnate anche alcune linee di livello della superficie deformata.

Per sezione rettangolare $a > b$, finchè risulta $a : b < 1,451$, si hanno ancora otto regioni come sopra, colla differenza che le diagonali non

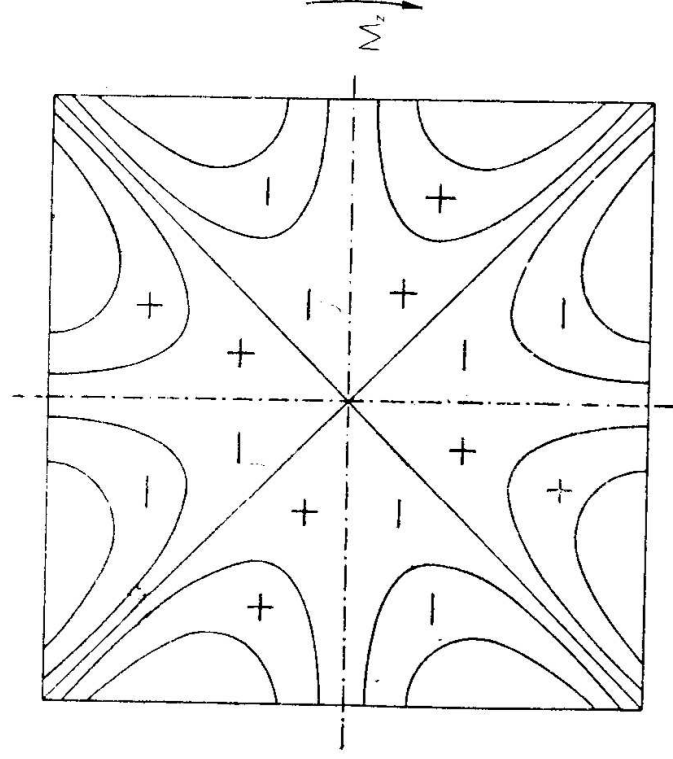


Fig. 23.

sono più linee di separazione tra due regioni di segno opposto della w , mentre invece tale qualità è conservata dalle due mediane.

Analogamente a ciò che si verificò per la sezione triangola equilatera, la w è positiva in quelle delle dette regioni, che nel senso del momento torcente M_z precedono i vertici.

Per $a : b \geq 1,451$ le quattro regioni in cui le mediane (assi) dividono il rettangolo, presentano valori di w alternativamente positivi e negativi; e precisamente la w è positiva in quelle regioni, che nel verso del momento torcente M_z precedono ciascuna delle due metà della mediana più lunga. Tale comportamento è analogo a quello, già

visto, della sezione ellittica; esso è indicato nella fig. 24, ove sono pure segnate alcune linee di livello della superficie deformata.

Il valore $a:b=1,451$, limite tra i due diversi tipi di ingobbimento, risulta dalla condizione, che, sempre per $a > b$, si abbia $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ agli estremi della mediana più lunga ossia per $y=0$ ed $x = \pm a$; in

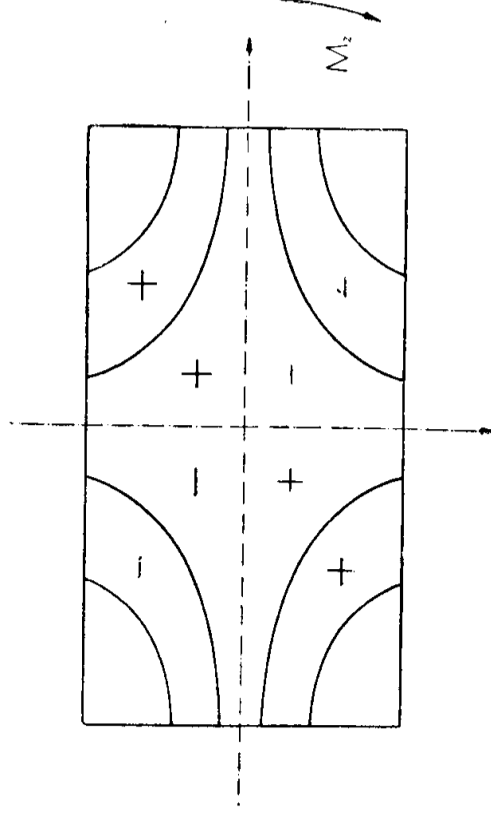


Fig. 24.

tal caso, delle otto zone contemplate nella fig. 23, si riducono a zero le quattro immediatamente adiacenti all'asse x .

A titolo di notizia vogliamo ora accennare che alcuni autori (per es. Bach in *Elastizität und Festigkeit*) per semplicità ammisero una ripartizione delle τ_{yz} ritenendo che la τ_{yz} sia proporzionale alla x e funzione di secondo grado della y , e simmetricamente per la τ_{xy} . Tale distribuzione, dalla quale discende la (279) citata a pag. 294, se soddisfa ad alcune delle condizioni della τ_z al contorno o sulle mediane, non verifica invece la (280), nè l'esistenza della funzione Ψ armonica. Perciò essa distribuzione si deve ritenere solo molto largamente approssimata.

D'altra parte è opportuno osservare che la legge di ripartizione esatta sopra esposta ci dà, per il valore di $\tau_{xy, max} = \tau_{z, max}$ che interessa per l'equazione di stabilità, un'espressione, il cui calcolo numerico è relativamente molto più semplice e spedito, che non quello dei valori generici delle τ_{yz} e τ_{xy} .

Ciò dipende dal fatto che per $x = 0$ ed $y = b$ si ha :

$$\cos h(m_1 x) = \cos h 0 = 1$$

$$\operatorname{sen}(m_1 y) = \operatorname{sen}(m_1 b) = \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) = 1$$

e relazioni analoghe, sicchè i termini delle serie che compaiono nelle (276), si semplificano notevolmente.

SEZIONI CAVE NELL'INTERNO, RICAVATE DALLE FORME PRECEDENTI.

Anzitutto vogliamo esporre un'osservazione di carattere generale sulle sezioni cave. Perciò ricordiamo che attraverso le traiettorie lineari o cilindriche delle τ_z (v. n.° 48, pag. 201), non si trasmettono sforzi e perciò le due porzioni di solido separate da una delle dette traiettorie cilindriche non si influenzano mutuamente, salvo che per il fatto che alle basi di estremità si ripartiscono tra loro il momento torcente ad esse complessivamente applicato.

Perciò la distribuzione delle τ_z nelle due dette porzioni è la stessa sia che esse si considerino unite, sia che esse si riguardino separate.

Quindi, se si ha una sezione cava internamente, in modo che il contorno interno sia una traiettoria delle τ_z per la sezione piena (limitata dallo stesso contorno esterno), sulla sezione cava (anulare, od a corona) si ha la stessa distribuzione delle τ_z che si avrebbe considerando questa come facente parte della sezione piena.

Occorre naturalmente osservare che a parità di intensità delle τ_z nei vari punti della sezione cava si dovrà supporre applicato un momento torcente uguale alla somma dei momenti rispetto al centro di torsione, delle azioni tangenziali elementari $\tau_z dA$ relative alla sola sezione cava; momento che risulta naturalmente minore di quello che corrisponde alla sezione piena; viceversa a parità di momento torcente esterno le tensioni τ_z saranno maggiori nella sezione cava che in quella piena.

D'altra parte si consideri che le condizioni (248) o (249) a cui deve soddisfare al contorno la funzione Ψ per la sezione piena, derivanti dalla terza delle (149) sono certamente soddisfatte pure su ogni traiettoria delle τ_z [poichè su essa vale certo la (149)], quindi, per la porzione di sezione compresa tra il contorno esterno ed una delle dette traiettorie, o per la regione interna ad una traiettoria, o per la regione compresa tra due traiettorie, la Ψ rimane sempre la stessa che per la sezione piena.

Le relazioni quantitative tra il momento torcente e le tensioni τ_z o la rotazione θ sono quindi ancora espresse dalle (250), (252), (254), (255), ove s'intende che gli integrali di area vanno estesi alla sola sezione cava netta.

Passiamo ora ad alcuni esempi semplici.

SEZIONE A CORONA CIRCOLARE.

Ripetendo il ragionamento fatto per la sezione circolare piena si trova che sono valevoli pure in questo caso, le (263) e (264), già esposte a pag. 273 e 274 ed ancora $q = 1$; così valgono pure le relazioni che danno τ_{yz} , τ_{zx} , τ_z esposte a pag. 274; in dette formole s'intende che I_p è il momento d'inerzia polare della sezione netta rispetto al suo centro.

Se R_1 ed R_2 sono i raggi di due cerchi di contorno esterno ed interno della corona circolare, dalla statica si sa che:

$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4) .$$

In conseguenza, lo stato di tensione è ancora definito dalle relazioni già esposte a pag. 274; la tensione tangenziale massima si presenta sul contorno esterno della sezione ed è espressa da:

$$\tau_{zm} = \frac{M_z}{I_p} R_1$$

ed è opportuno ricordare che l'equazione di stabilità è ancora data dalla (261).

SEZIONE A CORONA ELLITTICA (COMPRESA TRA DUE ELLISSI OMOTE- TICHE).

Siano m_1 , n_1 i semiassi dell'ellisse contorno esterno, e siano m_2 , n_2 i semiassi dell'ellisse contorno interno; per la supposta omotetia, deve essere:

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} .$$

In virtù dell'osservazione di carattere generale fatta poco più

sopra, a proposito delle sezioni cave, anche per la corona ellittica compresa tra i due contorni ora detti, deve essere, secondo la (266),

$$\Psi = \frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2} xy$$

osservando che per l'omotetia si ha:

$$\frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2} = \frac{m_2^2 - n_2^2}{m_2^2 + n_2^2} .$$

Inoltre, in conseguenza, risultano anche qui valevoli le (266 bis). È poi facile dimostrare che il fattore di torsione q è lo stesso che per la sezione piena limitata dal medesimo contorno esterno.

Infatti, per la sopra riportata espressione di Ψ , l'integrale che compare a denominatore nella (252) per l'ellisse di semiassi m_1 ed n_1 , si trasforma come segue:

$$\int_A \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA = \frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2} \cdot \int_A (x^2 - y^2) dA = \frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2} (I_{y_1} - I_{x_1}).$$

ove, secondo la statica I_{x_1} e I_{y_1} sono i momenti d'inerzia della sezione ellittica piena rispetto agli assi x ed y . (V. pure pag. 276).

Analogamente per l'ellisse di semiassi m_2 ed n_2 il detto integrale viene espresso da:

$$\frac{m_2^2 - n_2^2}{m_2^2 + n_2^2} (I_{y_2} - I_{x_2})$$

e per la corona ellittica:

$$\frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2} (I_y - I_x) .$$

Indichiamo poi con I_{p_1} ed I_{p_2} i momenti d'inerzia delle due aree ellittiche rispetto al loro centro, e con I_p quello della corona ellittica. Orbene, dalla statica si sa che:

$$I_{x_1} = I_{x_1} - I_{p_2}; \quad I_y = I_{y_1} - I_{p_2}; \quad I_p = I_{p_1} - I_{p_2} ,$$

ed inoltre che i momenti d'inerzia assiali o polari di aree omotetiche rispetto ad assi o punti corrispondenti sono proporzionali rispettivamente in un rapporto uguale alla 4.^a potenza di quello di omotetia, cioè:

$$\frac{I_{\rho_1}}{I_{\rho_2}} = \frac{I_{\rho_1}}{I_{\rho_2}} = \frac{I_{\rho_1}}{I_{\rho_2}} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^4 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^4.$$

Ne consegue anzitutto che per le due ellissi omotetiche i valori di q secondo la (252) sono eguali; inoltre poichè i termini della frazione (252) per la corona ellittica sono rispettivamente le differenze degli analoghi termini che valgono per l'una e l'altra delle due aree ellittiche, risulta pure che il fattore q per la corona ellittica ha lo stesso valore che per le dette aree ellittiche piene, come si era enunciato.

Ciò si può pure dimostrare per altra via, con una considerazione sintetica meccanica.

Infatti il fattore q per la sezione piena è espresso secondo la (267), ed in virtù dell'omotetia risulta uguale a quello relativo alla sezione limitata dal contorno interno.

Quindi, se consideriamo i due cilindri pieni aventi rispettivamente per sezione l'ellisse esterna e l'ellisse interna, indicando con M_{z_1} ed M_{z_2} rispettivamente i momenti torcenti capaci di produrre su entrambi e per una lunghezza assiale z , una rotazione ψ tra le sezioni estreme, ed essendo q il valore comune del fattore di torsione, si avrà, secondo la (255):

$$\psi = q \frac{M_{z_1}}{GI_{\rho_1}} z = q \frac{M_{z_2}}{GI_{\rho_2}} z.$$

“ *Dividendo* „ poi la proporzione che ne risulta, si ottiene:

$$\frac{M_{z_1} - M_{z_2}}{I_{\rho_1} - I_{\rho_2}} = \frac{M_{z_1}}{I_{\rho_1}} = \frac{M_{z_2}}{I_{\rho_2}}.$$

Ricordiamo, come si disse testè, che:

$$I_{\rho_1} - I_{\rho_2} = I_{\rho_1} \frac{m_1^4 - m_2^4}{m_1^4}$$

e d'altra parte per l'osservazione generale fatta poco più sopra a proposito della ripartizione dei momenti torcenti, si ha:

$$M_{z_1} - M_{z_2} = M_z$$

che è il momento torcente, il quale, agendo sul cilindro cavo considerato, provoca tra due sezioni a distanza assiale z la stessa rotazione ψ sopra detta.

Perciò necessariamente per il cilindro cavo vale la (255) collo stesso valore q del fattore di torsione valevole per le sezioni piene ora considerate; valore che, come già ricordammo, è espresso dalla (267), nella quale indifferentemente si possono introdurre i semiasse dell'una o dell'altra delle due ellissi di contorno.

Per quanto riguarda poi la distribuzione delle tensioni tangenziali e l'ingobbimento della sezione trasversale, si potrebbe qui ripetere ciò che già si disse più sopra per la sezione ellittica piena.

In particolare si ha:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= q \frac{M_z}{I_p} \cdot \frac{2n_1^2}{m_1^2 + n_1^2} x = \frac{m_1^4}{m_1^4 - m_2^4} \cdot \frac{2M_z}{\pi m_1^3 n_1} x \\ \tau_{zx} &= -q \frac{M_z}{I_p} \cdot \frac{2m_1^2}{m_1^2 + n_1^2} y = -\frac{m_1^4}{m_1^4 - m_2^4} \cdot \frac{2M_z}{\pi m_1 n_1^3} y \end{aligned} \right\} \quad (284)$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{m_1^4}{m_1^4 - m_2^4} \cdot \frac{2M_z}{\pi m_1 n_1} \sqrt{\frac{x^2}{m_1^4} + \frac{y^2}{n_1^4}} \quad (284 \text{ bis})$$

e se è $m_1 > n_1$ la tensione $\tau_{z \text{ max}}$ si ha per $x=0$ e per $y = \pm n_1$, ossia:

$$\tau_{z \text{ max}} = -q \frac{M_z}{I_p} \frac{2m_1^2 n_1}{m_1^2 + n_1^2} \quad (285)$$

ALTRE FORME DI SEZIONI IN USO NELLA PRATICA.

Per sezioni diverse da quelle sopra studiate il calcolo rigoroso della distribuzione della τ_z risulta eccessivamente complesso; perciò per gli scopi pratici ci si deve accontentare di soluzioni approssimate semi-empiriche, cioè basate principalmente su dati sperimentali.

Indicheremo ora per i casi più interessanti per la pratica i risultati di tali soluzioni, i quali si trovano pure riportati sui principali manuali tecnici.

SEZIONE ESAGONA REGOLARE.

Se il lato dell'esagono è l si ha la tensione massima $\tau_{z \text{ max}}$ nei punti di mezzo dei lati, espressi da:

$$\tau_{z \text{ max}} = 1,09 \frac{M_z}{l^3} :$$

inoltre l'angolo di rotazione relativa di due sezioni a distanza z è:

$$\phi = 0,967 \frac{M_z}{G I^4} z.$$

SEZIONE TRAPEZIA ED IN PARTICOLARE TRIANGOLA.

Questa sezione si può con buona approssimazione sostituire con una sezione rettangolare, da trattare come si è visto più sopra.

La sezione rettangolare surrogata ha la stessa altezza h del trapezio (o triangolo) (v. fig. 25) ed ha una base b , uguale alla distanza

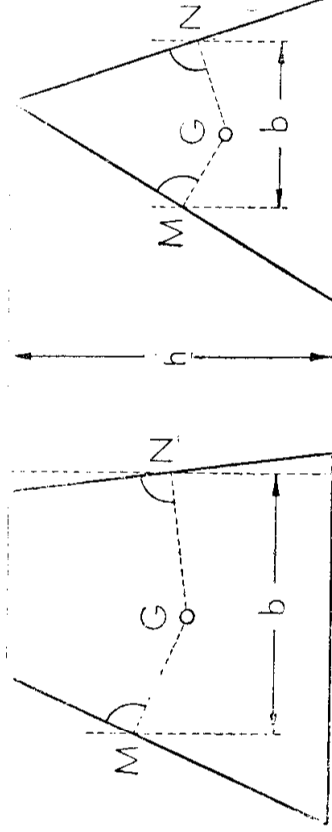


Fig. 25.

misurata parallelamente alle basi del trapezio, tra i piedi M ed N delle perpendicolari condotte dal baricentro G del trapezio ai due lati (non paralleli).

È inteso che il triangolo si può considerare come caso particolare del trapezio, nel quale sia nulla una delle basi.

Per il triangolo equilatero di lato d si ha, secondo la regola ora indicata:

$$b = \frac{d}{2} \quad e \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

sicchè applicando la (279) (e tenendo presente che in essa a e b indicano rispettivamente le metà dell'altezza e della base del rettangolo), si trova:

$$\tau_{max} \sim 20,785 \frac{M_z}{d^3},$$

sicchè resta verificata con buona approssimazione la (274) ottenuta studiando direttamente la sezione triangola equilatera; (errore in eccesso del 3,925 %).

Così calcolando l'angolo ϑ per la sezione rettangolare surrogata, secondo la (283), e ricavando il valore del coefficiente α dal diagramma della fig. 22, si trova:

$$\vartheta \approx \sim 43,4 \frac{M_z}{Gd^4} z$$

mentre invece dal calcolo diretto esatto della sezione triangolare equilatera, secondo la (272), risulta:

$$\vartheta \approx \sim 46,2 \frac{M_z}{Gd^4} z ;$$

(la soluzione semiempirica dà quindi in questo caso un errore in difetto del 6,06 %).

SEZIONI DI FERRI LAMINATI.

Sezione a I (a doppio T) od a Γ (a C).

Queste sezioni sono rappresentate nella fig. 26 a) e b), e colle

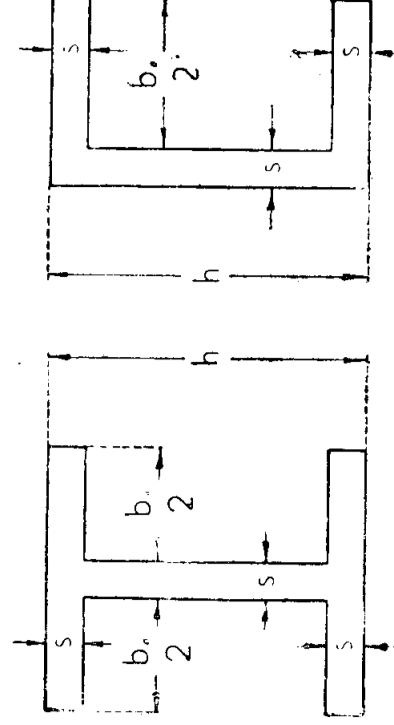


Fig. 26.

dimensioni ivi indicate, si può ritenere, con buona approssimazione:

$$\tau_{z \max} \approx \frac{9}{2} \cdot \frac{M_z}{s^2 (h + 2b_0)},$$

notando che la formola è applicabile se $s \geq 0,2h$, e se b_0 non è molto maggiore di s .

Sezione a croce, o ad L.

Queste sezioni sono disegnate nella fig. 27 *a)* e *b)*, ove sono indicate le dimensioni espresse nelle formole.

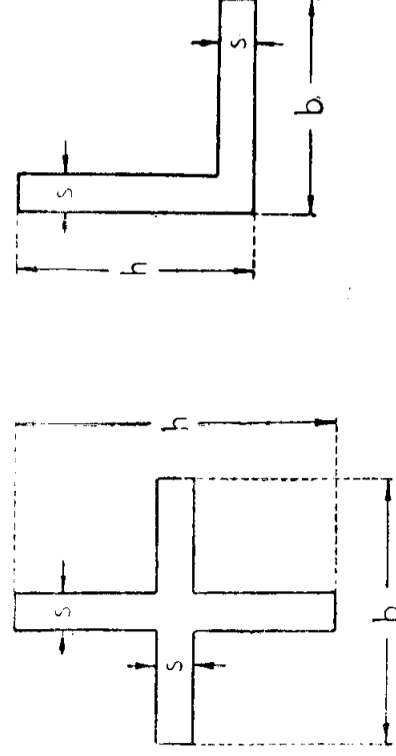
Sempre quando sia $s \geq 0,2h$, si ha con buona approssimazione:

$$\tau_{z \max} = \frac{9}{2} \cdot \frac{M_z}{s^2(b+h-s)}.$$

Per sezioni di forma generica qualsiasi, l'angolo di torsione si può poi sempre ritenere per approssimazione espresso da:

$$\theta = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{I_x + I_y}{I_x I_y} \cdot \frac{M_z}{G} z$$

ove I_x ed I_y hanno i significati soliti, ed ove in luogo di α si può



a)

b)

Fig. 27.

porre il valore che dal diagramma in fig. 22 si ricava per un rapporto di allungamento $b : a$ dato da:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{I_x}{I_y}}$$

ritenendo $I_y > I_x$ (cioè chiamando I_y il maggiore dei due momenti d'inerzia principali).

In generale per sezioni sagomate costituite di tratti rettangolari di larghezza piccola in confronto delle relative lunghezze, la tensione tangenziale sul perimetro è maggiore là dove la larghezza (o spessore) è minore. Ciò risulta dalle cose viste a suo tempo sull'andamento delle traiettorie delle τ_z , ed in particolare modo da ciò ch'è detto

a pag. 294 e segg. per il rettangolo molto allungato. Anzi, se si può ritenere che le dette traiettorie in qualche regione siano sensibilmente parallele ai due lati rettilinei (e paralleli) del contorno, allora la tensione τ_z in detta regione si può ritenere distribuita secondo la (281) esposta a pag. 295, ove tuttavia non è sempre razionalmente determinabile il fattore q ; esso però si può determinare sperimentalmente per la data forma di sezione (anche, se occorre, su un modello in scala ridotta, essendo, come sappiamo, q invariante rispetto ad una trasformazione per omotetia).

Notiamo poi che se il contorno presenta dei punti angolosi *ricorrenti*, in tali punti la τ_z assume valori infinitamente grandi: ciò si può facilmente dimostrare con un calcolo che esorbita dai fini di questo libro. Perciò è opportuno smussare detti punti angolosi con appositi raccordi; e ciò si pratica correntemente, anche per ragioni tecnologiche, nelle sezioni dei ferri laminati dei tipi sopra descritti, od altri analoghi.

X ANALOGIE IDRODINAMICHE PER IL CASO DELLA TORSIONE SEMPLICE.

Nella trattazione generale della torsione e nei casi particolari già abbiamo considerato le traiettorie delle τ_z , ed abbiamo visto che esse sono linee chiuse su se stesse, e che le linee di contorno della sezione si possono riguardare appartenenti alla famiglia di dette traiettorie, (poichè al contorno la tensione τ_z è ad esso tangente).

Ricordiamo ora l'espressione della $\text{div } \tau_z$, già ricavata a pag. 269, e qui trascritta:

$$\text{div. } \tau_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (286)$$

Perciò noi possiamo interpretare la τ_z come la velocità (di componenti τ_{xz} e τ_{yz}) di un liquido perfetto, non viscoso, a temperatura costante, il quale si muova di moto permanente, parallelamente al piano della sezione trasversale, contenuto in un recipiente limitato dalla stessa superficie cilindrica esterna del solido. Infatti tale velocità è indipendente dal tempo e perciò il moto si dice permanente; poi essa risulta tangente alla parete del recipiente; inoltre la (286) rappresenta quella che nell'idrodinamica si chiama *l'equazione di continuità del moto permanente*, per i liquidi perfetti, a densità costante; ed invero il primo membro, *divergenza del vettore* τ_z , rappresenta la *dilatazione cubica del liquido riferita all'unità di tempo* [confronta pure N.º 11, (27), nonchè N.º 15 bis] ed essa deve neces-

collocare τ_z in vettore
 e, in tal caso, τ_z è
 un vettore V tempo

sariamente essere nulla poichè il liquido essendo a densità costante, anche nel tempo, non può subire dilatazione cubica.

Si stabilisce così un' analogia tra il problema della distribuzione delle τ_z per la torsione semplice, ed un problema di idrodinamica: brevemente possiamo dire di avere per la torsione un' *analogia idrodinamica*. Essa può tornar utile per chiarire alcuni concetti, applicando cose note ed intuitive dal punto di vista idrodinamico, ed anche per applicare al problema della torsione qualche risultato facile da ottenere nel caso idrodinamico.

Ricordiamo ora di aver riconosciuto colla ²⁵⁴ ~~(280)~~, pag. 294, che la *rotazione (o il vortice)* del vettore τ_z è uguale a $q \frac{M_z}{I_p}$ ed è costante in tutti i punti della sezione.

Perciò il moto del liquido di velocità τ_z è un *moto vorticoso di rotazione costante*.

Inoltre con questa rappresentazione, le traiettorie delle tensioni τ_z sono da riguardarsi come *le linee di corrente* del descritto moto del liquido.

Ricordiamo poi il *teorema di Stokes*, dimostrato al N.º 12 c), e poichè qui si tratta di un moto piano (— a due dimensioni —), il detto teorema è qui applicabile nella forma espressa dalla [29 c)], pag 41; per usarlo nel caso di una sezione cava, avente cioè due distinti contorni chiusi, esterno ed interno, occorre tener presente l'osservazione fatta a pag. 43 per il caso di una linea chiusa sconnessa; ciò d'altra parte verrà ulteriormente precisato e delucidato poco più innanzi. Questo teorema si può nel caso qui studiato verificare direttamente dalle (254).

Infatti la circuitazione della τ_z lungo una linea chiusa qualunque s compresa nella sezione si può esprimere secondo le (254) con :

$$\int_s (\tau_x dx + \tau_y dy) = - q \frac{M_z}{I_p} \left(\int_s d\psi + \int_s y dx - \int_s x dy \right) \quad (287)$$

ove gli integrali s'intendono estesi a tutta la linea s e gli elementi dx e dy devono essere le proiezioni dell'elemento d'arco ds della linea stessa.

Ora nella parentesi a secondo membro il primo integrale è identicamente nullo, poichè la linea è chiusa, e ψ è una funzione ad un sol valore; gli altri due sono uguali e di segno contrario, ed il secondo di essi è proprio uguale all'area A' racchiusa nel circuito s ,

intendendo il contorno percorso nel senso di rotazione positivo da $+x$ verso $+y$. Perciò la detta parentesi si riduce a $-2A'$ e quindi dalla (287) riesce verificato il teorema di Stokes.

Si noti che tale relazione si deve ritenere valida anche per un contorno s sconnesso, cioè comprendente un'area costituita di vari pezzi, o presentante cavità interne; infatti un contorno siffatto si può ridurre a connessione semplice se i due o più contorni chiusi separati, si collegano con opportune linee da considerarsi sdoppiate, e da percorrersi in due sensi contrari, in modo da costituire complessivamente un unico contorno chiuso come indica la fig. 28 *a*) e *b*).

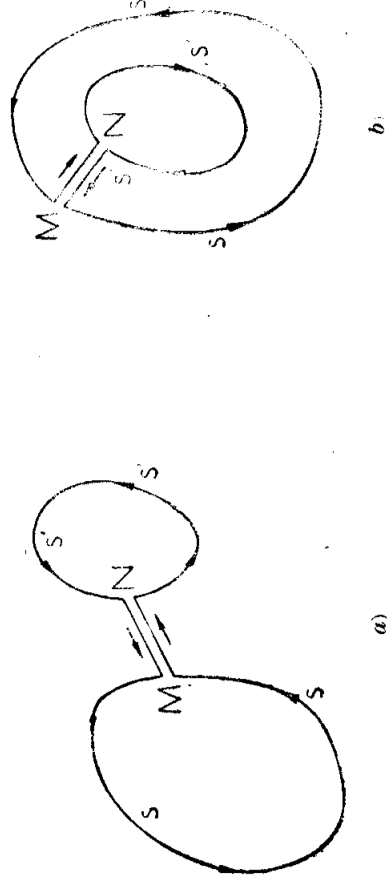


Fig. 28.

In tal caso le linee di collegamento, come MN , percorse nei due sensi contrari dànno alla circuitazione contributi complessivamente nulli, sicchè la circuitazione totale risulta uguale alla somma algebrica delle circuitazioni dei vari contorni chiusi separati, intendendo, (come si vede chiaramente dalla fig. 28), che vanno prese nello stesso senso le circuitazioni dei contorni che risultano mutuamente esterni, ed in senso contrario quelle di due contorni l'uno interno immediatamente all'altro (cioè senza che siano separati da altro contorno chiuso). Così se il vettore rotazione (o vorticale) risulta definito solo nell'area anulare compresa tra due circuiti s esterno ed s' interno, la circuitazione lungo s' può pure essere diversa da zero, avendo un valore dipendente dalle condizioni sul contorno stesso, ed allora il teorema di Stokes applicato all'area anulare esprime che il doppio del flusso di rotazione (o di vorticale) attraverso all'area anulare stessa è uguale alla differenza tra le circuitazioni del vettore calcolate sul contorno esterno e sul contorno interno rispettivamente.

Questa osservazione è utile per poter applicare il teorema suddetto alle sezioni cave, (od ai recipienti cilindrici a doppia parete), poichè in tal caso nell'area compresa entro il contorno interno non

esistendo il vettore τ_z (o la velocità), non è neppure definita la *rotazione* (o il vorticale); ciò non ostante la circuitazione lungo il contorno interno può essere diversa da zero. Nel caso speciale poi qui considerato della torsione, tale circuitazione ha il valore dato dalla

(287), il quale risulta uguale al flusso del vettore costante $q \frac{M_z}{I_p}$,

attraverso all'area racchiusa dal contorno interno, proprio come se in detta area interna fosse definita la rotazione suddetta.

Colla considerazione dei predetti teoremi, l'analisi idrodinamica che qui studiamo, non si limita a darci una rappresentazione intuitiva della distribuzione delle τ_z , ma ci permette di calcolare quantitativamente tale distribuzione quando si conosca l'andamento delle linee di corrente, o quando almeno per approssimazione si possano fare sul detto andamento delle ipotesi plausibili e verosimili.

Ed in vero se consideriamo una striscia compresa tra due linee di corrente infinitamente vicine, la quale si suol chiamare *striscia elementare di flusso*, od anche *canale elementare di flusso*, poichè per la *continuità* deve essere costante lungo tutta la striscia la *portata elementare*, o il *flusso elementare*, ne consegue che lungo la striscia stessa la τ_z deve variare in ragione inversa dello spessore infinitesimo della striscia, (il quale è la distanza tra le due linee di corrente).

Questo fatto serve a spiegarci intuitivamente come la τ_z sul contorno esterno risulti massima là dove le linee di corrente più si addensano verso il contorno stesso, cioè in generale nei punti del contorno più vicini al centro di torsione, come già constatammo a più riprese nei casi particolari studiati.

Dunque, se possiamo, sia pure con criteri approssimati, tracciare numerose linee di corrente e così scomporre la sezione in striscie o canali di flusso elementari (di larghezze infinitesime od anche finite, ma abbastanza piccole per poter essere assimilate ad infinitesimi), potremo stabilire la legge di variazione della τ_z lungo una qualunque delle dette linee di corrente, cioè per es. esprimere il rapporto del valore di τ_z in un punto qualunque di tale linea, al valore τ'_z ch'essa assume in un punto P ove tale linea incontra un dato asse trasversale, preso come asse x . ($\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ p. 264.)

È opportuno scegliere tale asse in modo che passi per il centro di torsione O , che supponiamo conoscere; come punti P sulle varie linee di corrente assumeremo tra le intersezioni di ciascuna con x , quelle che si trovano da una stessa parte rispetto ad O .

In conseguenza si potrà esprimere la circuitazione della τ_z lungo la detta linea di corrente con $\tau'_z S'$, cioè come prodotto della τ'_z per

un coefficiente S' (lunghezza) dipendente dalla linea stessa e dalla larghezza nei vari punti della striscia elementare adiacente. (S' si potrebbe definire come la circuitazione lungo la linea stessa di un vettore ad essa tangente ed uguale al quoziente della larghezza della striscia in un suo punto generico, divisa per la larghezza della striscia stessa misurata normalmente, in corrispondenza del detto asse x ; la chiameremo *circuitazione geometrica*).

Ciò posto, indicando con A' l'area piana racchiusa dalla data linea di corrente, ed applicando il teorema di Stokes si può ottenere τ'_z espresso da:

$$\tau'_z = 2q \frac{M_z}{I_p} \frac{A'}{S'} \quad (288)$$

ove s'intende che A' , S' e quindi τ'_z devono ritenersi funzioni della linea di corrente considerata, ovvero di un parametro che la determini, quale p. es. l'ascissa del predetto punto P contata sull'asse x dall'origine O .

Ciò fatto, per conoscere completamente la distribuzione della τ_z , manca solamente il valore di q , e questo può venir fornito dall'equazione dei momenti, esprimente che le forze elementari $\tau_z dA$ devono per tutta l'area comporsi in una coppia di momento uguale ad M_z (v. pag. 267).

Orbene, gli sforzi tangenziali elementari che si esercitano sugli elementi di una striscia elementare di flusso, la cui larghezza in un punto generico sia dm , si possono esprimere con $\tau_z \cdot dm \cdot ds$, essendo ds l'elemento d'arco di una delle due linee di corrente limitanti la striscia.

E poichè il prodotto $\tau_z dm$ uguale alla *portata elementare* della striscia, come abbiamo riconosciuto più sopra, è costante lungo tutta la striscia, ne consegue che detti sforzi elementari, a meno del fattore costante $\tau_z dm$, sono rappresentabili cogli stessi elementi ds di arco della linea di corrente, la quale quindi si può considerare come la *linea* di dette forze (nel senso usuale della statica grafica); giacchè quindi tale linea risulta chiusa, ne consegue che detti sforzi tangenziali esercitanti sulla striscia elementare si riducono ad una coppia. Il momento di questa, a meno del solito fattore $\tau_z dm$, sarà poi dato dalla somma dei momenti, rispetto ad un punto qualunque O del piano, degli archetti ds della linea di corrente: tale somma di momenti risulta poi evidentemente uguale al doppio dell'area A' racchiusa nella considerata linea di corrente.

Indichiamo con dM_x il momento elementare degli sforzi tangenziali lungo la detta striscia di flusso; con α l'angolo che nel punto P la tangente alla detta linea di corrente forma con l'asse x , sicchè sullo stesso asse si ha, per la detta striscia: $dn = dx \cdot \sin \alpha$, (essendo poi α funzione di x).

Ciò posto, secondo quanto si vide or ora, sarà:

$$dM_x = 2 A' \tau_x \sin \alpha dx \quad (289)$$

e per avere il momento M_x complessivo occorrerà integrare il secondo membro estendendo l'integrale a tutto il tratto dell'asse x compreso tra il centro di torsione ed il contorc esterno, per una sezione piena, ovvero al tratto compreso tra i due contorni interno ed esterno nel caso di una sezione cava.

Sostituendo nella (289) il valore di τ_x dato dalla (288) si trova:

$$dM_x = 4q \frac{M_x}{I_p} \frac{A'^2}{S'} \sin \alpha dx \quad (289 \text{ bis})$$

Quindi integrando tra i limiti x_1 ed x_2 sopra specificati (notando che per le sezioni piene è $x_1 = 0$, sopprimendo il fattore comune M_x e risolvendo rispetto a q si ottiene infine:

$$q = \frac{I_p}{4 \int_{x_1}^{x_2} \frac{A'^2}{S'} \sin \alpha dx} \quad (290)$$

Il valore di q così calcolato può nei casi concreti essere verificato sperimentalmente, in modo da avere una conferma dell'attendibilità della distribuzione adottata per le linee di corrente.

Crediamo opportuno fare applicazione di quanto ora esponemmo a due casi di sezione cava, per i quali, se la larghezza radiale dell'area anulare è abbastanza piccola, in confronto delle dimensioni esterne, si può con buona approssimazione ritenere verificata la distribuzione di linee di corrente che indicheremo per ciascun caso.

SEZIONE CAVA COMPRESA TRA DUE CONTORNI CONVESSI SENZA PUNTI ANGOLOSI, ED OMOTETICI RISPETTO AL COMUNE BARICENTRO DELL'AREA RACCHIUSA.

Se la larghezza radiale della sezione anulare è abbastanza piccola, si può con buona approssimazione ritenere che le linee di corrente, (o traiettorie delle τ_z), siano esse pure omotetiche ai due contorni.

Tale ammissione rappresenta bene il fatto che la velocità media attraverso un raggio dell'anello deve variare in ragione inversa della larghezza della zona misurata sullo stesso raggio. Abbiamo esplicitamente escluso che nei contorni si presentino singolarità, come punti angolosi o cuspidi, poichè la loro presenza potrebbe far scostare di molto le linee di corrente dalla distribuzione approssimata supposta.

Nella figura 29 è rappresentata una sezione del tipo qui descritto, ed è pure segnata una striscia elementare di flusso. Lo spessore dn (misurato normalmente) di una tale striscia elementare in un punto generico M risulta proporzionale alla distanza d tra il centro di omotetia O e la tangente in M alla linea di corrente: perciò, dovendo poi essere costante nella striscia il prodotto $\tau_z dn$, risulta che *lungo la striscia di flusso la τ_z varia restando inversamente proporzionale alla detta distanza d .*

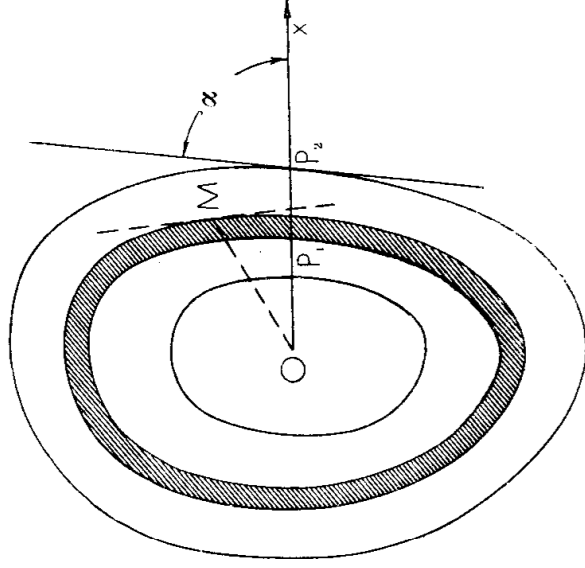


Fig. 29.

Vediamo ora come varia la τ_z sull'asse x , al variare dell'ascissa x del punto P (v. fig. 29). A tale scopo serve la (288): e per l'omotetia risulta che l'area A' varia proporzionalmente ad x^2 mentre la *circonferenza geometrica* S' (che è una lunghezza), varia proporzionalmente ad x .

Quindi, se con A'_1 ed S'_1 indichiamo i valori che le dette grandezze assumono nel punto P_1 sul contorno interno, avremo poi nel punto P , sulla linea di corrente generica:

$$\frac{A'}{S'} = \frac{A'_1}{S'_1} \cdot \frac{x}{x_1}$$

Sostituendo nella (288) si ricava :

$$\tau_z = 2q \frac{M_z}{I_p} \frac{A'_1}{S'_1} \cdot \frac{x}{x_1} = 2q \frac{M_z}{I_p} \frac{A'_2}{S'_2} \cdot \frac{x}{x_2} ; \quad (291)$$

dunque lungo un raggio la τ_z varia proporzionalmente alla distanza dal centro O d'omotetia.

Si ha poi, ovviamente :

$$\frac{A'^2}{S'} = \frac{A'^2}{S'_1} \cdot \frac{x^3}{x_1^3} = \frac{A'^2}{S'_2} \cdot \frac{x^3}{x_2^3}$$

sostituendo nella (290), osservando che α , pure per l'omotetia, è indipendente da x , ed integrando, si ottiene :

$$q = \frac{I_p S'_1 x_1^3}{A'^2 \text{sen } \alpha \cdot (x_2^4 - x_1^4)} = \frac{I_p S'_2 x_2^3}{A'^2 \text{sen } \alpha \cdot (x_2^4 - x_1^4)} = \frac{I_p S' x^3}{A'^2 \text{sen } \alpha \cdot (x_2^4 - x_1^4)} \quad (292)$$

Questi valori si possono sostituire rispettivamente nella (291) e si trova :

$$\tau_z = \frac{2 M_z x_1^2 x}{A'_1 \text{sen } \alpha (x_2^4 - x_1^4)} = \frac{2 M_z x_2^2 x}{A'_2 \text{sen } \alpha (x_2^4 - x_1^4)} \quad (293)$$

L'angolo di torsione ϑ , secondo la solita (255), è poi dato da :

$$\vartheta = \frac{S'_1 x_1^3 M_z}{A'^2 \text{sen } \alpha (x_2^4 - x_1^4)} z = \frac{S'_2 x_2^3 M_z}{A'^2 \text{sen } \alpha (x_2^4 - x_1^4)} z \quad (294)$$

Il valore massimo di τ_z si avrà, per le ragioni già esposte, sul contorno esterno, nel punto P_{62} più vicino al centro O .

Se immaginiamo di scegliere l'asse x passante per tale punto P_{62} , sarà in tal caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e poi $x = x_2$; quindi la (293) fornisce :

$$\tau_{z, \max} = \frac{2 M_z x_1^2 x_2}{A'_1 (x_2^4 - x_1^4)} = \frac{2 M_z x_2^3}{A'_2 (x_2^4 - x_1^4)} = \frac{2 M_z}{A'_2 x_2 \left| 1 - \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^4 \right|} \quad (295)$$

ed in base a questa relazione si ottiene l'equazione di stabilità.

È facile verificare che la (295), applicata alla corona compresa tra due ellissi omotetiche ci riconduce, come deve essere, alla (286).

Altro caso analogo :

SEZIONE CAVA, COMPRESA TRA DUE CONTORNI CONVESSI, SENZA PUNTI ANGOLOSI E PARALLELI (AREA ANULARE A LARGHEZZA COSTANTE).

In questo caso, assai comune nelle applicazioni, sempre nell'ipotesi che la larghezza dell'area anulare sia abbastanza piccola in con-

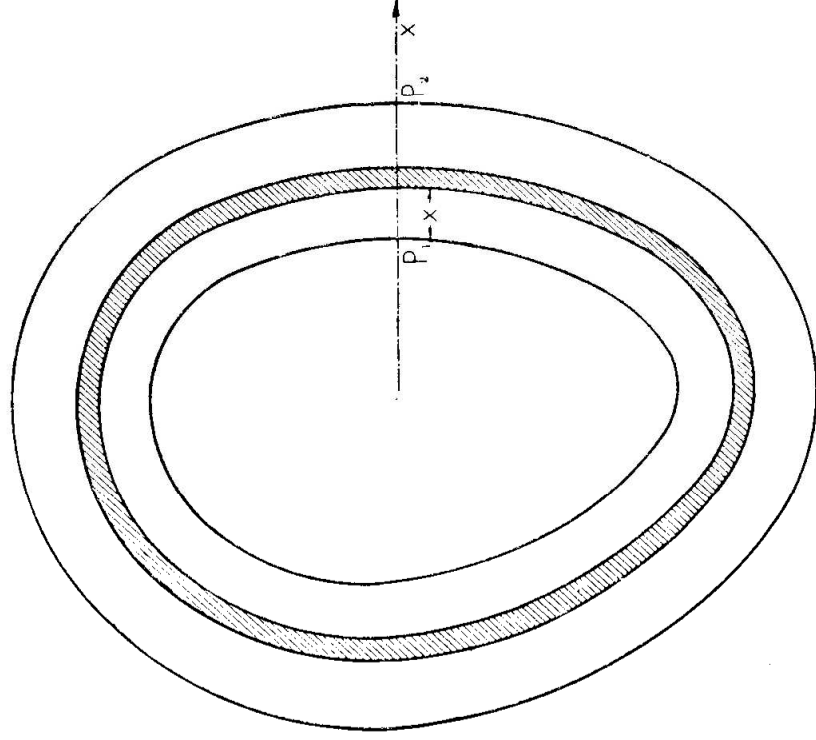


Fig. 30

fronto delle dimensioni esterne, si può con buona approssimazione ritenere che le linee di corrente siano esse pure parallele ai due contorni (v. fig. 30). In conseguenza una qualunque striscia di flusso, — elementare o no, — ha pure larghezza costante lungo tutto il percorso; se ne deduce, per l'equazione di continuità, che la τ_z lungo una stessa linea di corrente conserva pure valore costante. Ne consegue che la circuitazione lungo una linea di corrente è uguale al prodotto del valore di τ_z (costante lungo la linea) per la lunghezza della linea

stessa; in altri termini la *circuitazione geometrica* S' definita a pag. 312 è la stessa lunghezza della linea di corrente.

Come asse delle x si può scegliere una normale comune ai due contorni, e quindi alle linee di corrente ch'essa incontra. Si può poi applicare la (288), notando che la τ_z è la stessa τ_z costante lungo la linea di corrente. Possiamo contare le x a partire dal punto P_1 ove l'asse x incontra il contorno interno, (v. fig. 30), prendendo le x positive verso l'esterno.

Ciò posto è facile verificare che per la linea di corrente individuata dall'ascissa generica x , poichè tale linea è *parallela* al contorno interno di lunghezza S'_1 e racchiudente l'area A'_1 , si ha:

$$\begin{aligned} A' &= A'_1 + x(S'_1 + \pi x) \\ S' &= S'_1 + 2\pi x \end{aligned}$$

Sicchè, applicando la (288) si ottiene:

$$\tau_z = 2q \frac{M_z}{I_p} \cdot \frac{A'_1 + S'_1 x + \pi x^2}{S'_1 + 2\pi x} \quad (296)$$

Resta ora a determinare il fattore di torsione q , secondo la (290), e perciò a calcolare l'integrale al denominatore della detta espressione, ricordando che, per la scelta dell'asse x , si ha $\sin \alpha = 1$, ed i limiti della integrazione sono $x_1 = 0$ ed x_2 , ascissa del punto P_2 sul contorno esterno, = larghezza della corona anulare.

Per semplificare l'espressione ci conviene porre:

$$a = \frac{S'_1}{2\pi} \qquad b^2 = \frac{A'_1}{\pi}$$

ove a e b sono due lunghezze e rappresentano i raggi di due cerchi aventi rispettivamente lo stesso perimetro del contorno interno, e la stessa area da questo racchiusa.

Poichè notoriamente il cerchio è la figura di minimo perimetro a parità di area, si ha, per un contorno qualunque: $a > b$.

Con ciò si ha:

$$\begin{aligned} A' &= \pi(x^2 + 2ax + b^2) \\ S' &= 2\pi(x + a) \end{aligned}$$

ed il denominatore della (290) diviene :

$$D = 4 \int_0^{x_2} \frac{A^2}{S'} dx = 2\pi \int_0^{x_2} \frac{(x^2 + 2ax + b^2)^2}{x+a} dx.$$

Si ha poi identicamente :

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + 2ax + b^2)^2}{x+a} &= \left[x+a - \frac{a^2 - b^2}{x+a} \right] (x+a) = \\ &= (x+a)^2 - 2(a^2 - b^2)(x+a) + \frac{(a^2 - b^2)^2}{x+a}. \end{aligned}$$

Quindi, assumendo come variabile indipendente $x+a$, poichè si ha : $d(x+a) = dx$, si trova poi :

$$D = 2\pi \int_a^{x_2+a} \left[(x+a)^2 - 2(a^2 - b^2)(x+a) + \frac{(a^2 - b^2)^2}{x+a} \right] d(x+a)$$

ed eseguendo l'integrazione :

$$D = 2\pi \left[\frac{1}{4} [(x_2+a)^4 - a^4] - (a^2 - b^2)[(x_2+a)^2 - a^2] + (a^2 - b^2)^2 \log \frac{x_2+a}{a} \right]$$

Fatte le sostituzioni nella (296), si può ricavare il valore della tensione tangenziale massima $\tau_{z \text{ max}}$ (costante lungo tutto il contorno esterno), in base al quale si scrive l'equazione di stabilità: tale valore è :

$$\tau_{z \text{ max}} = \frac{M_z}{D} \cdot \frac{x_2^2 + 2ax_2 + b^2}{x_2 + a} \quad (297)$$

L'angolo di torsione è poi dato da :

$$\vartheta = \frac{M_z}{GD} z \quad (298)$$

Questi due casi particolari qui trattati costituiscono un esempio dei notevoli risultati che si possono ottenere dall'analogia idrodinamica, sia pure per una trattazione approssimata (1); altri se ne potrebbero ottenere, che vogliamo qui brevemente accennare.

ALTRE CONSEGUENZE DELLE ANALOGIE IDRODINAMICHE.

Altre sezioni che pure si prestano ad essere trattate col metodo di cui ora demmo due esempi, sono quelle dei ferri sagomati o laminati, ove essendo lo spessore piccolo in confronto delle dimensioni complessive esterne (di lunghezza) dei vari rettangoli, da cui si può riguardare composta la sezione, l'andamento delle linee di corrente si può ritenere essenzialmente influenzato dalla forma del contorno e si può quindi agevolmente tracciare di tali linee una distribuzione prossima al vero.

Di siffatta distribuzione diamo un esempio nella figura 31, relativa alla sezione di un ferro a Γ ; e rammentiamo che in casi analoghi sempre si évitano nel contorno gli angoli rientranti, con opportuni raccordi, per le ragioni già dette più sopra.

Le linee di flusso della detta fig. 31 furono tracciate per approssimazione, coll'intento di dare una rappresentazione qualitativa del fenomeno e per il loro tracciamento si utilizzarono criteri desunti da un'altra significativa analogia, che verrà esposta in Appendice in fine del volume.

Tracciata una siffatta distribuzione di linee di corrente, è poi possibile, mediante le (290) determinare il fattore q , a complemento dell'investigazione indicata a pag. 308, ove invece, si parlava di determinare q sperimentalmente.

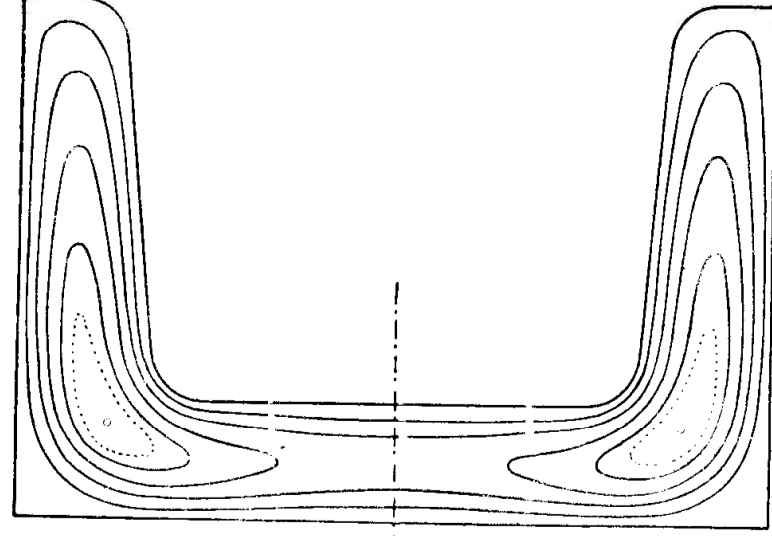


Fig. 31.

(1) Le considerazioni ed i calcoli svolti da pag. 311 fino qua, furono oggetto di un mio lavoro: « *Calcolo statico approssimato dei prismi soggetti a torsione* ». Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze. Roma, ottobre 1932-X*.

Allo stesso modo, con un'opportuna distribuzione (approssimata) di linee di corrente si può studiare il caso della sezione rettangolare e specialmente di quella molto allungata; ma crediamo superfluo riprendere ora con questo metodo la trattazione, che abbiamo già esaurientemente esposta più sopra, per altra via.

Infine osserviamo che l'interpretazione del fenomeno della torsione per mezzo delle analogie idrodinamiche è particolarmente interessante, se viene applicata allo studio delle perturbazioni che nella ripartizione delle tensioni τ_z vengono prodotte da tagli, fenditure o cavità esistenti nell'interno del solido.

Così per es. è noto che nella sezione a corona circolare le linee di corrente sono cerchi concentrici ai due contorni circolari. Suppo-

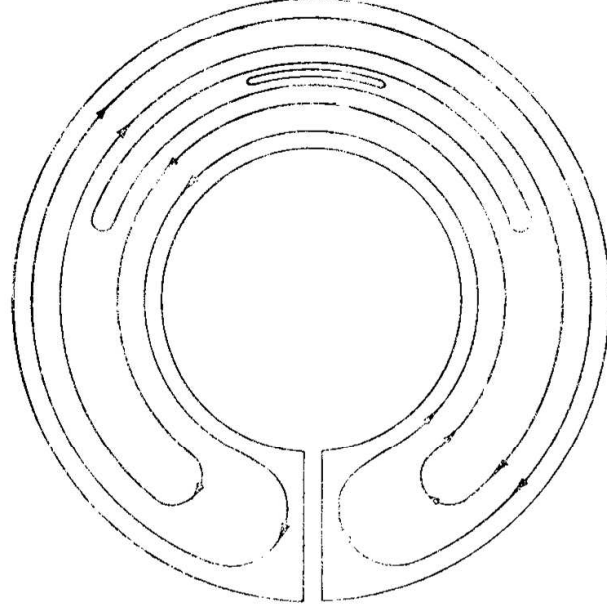


Fig. 32.

niamo ora che nel cilindro cavo (tubo) si pratici un taglio (o una fenditura) secondo un piano radiale, sicchè la sezione trasversale divenga semplicemente connessa, come indica la fig. 32. Dal punto di vista idrodinamico la fenditura deve essere riguardata come una parete divisoria, la quale costringe le linee di corrente a deviare e tornare indietro, sicchè la relativa distribuzione deve essere del tipo di quella accennata nella detta fig. 32. Perchè dette linee possano risultare chiuse su se stesse senza attraversare la parete divisoria, occorre che il verso della velocità (o tensione τ_z) in adiacenza del contorno interno della sezione cava, sia contrario a quello in prossimità del contorno esterno, come è indicato dalle frecce della fig. 32.

Nella fig. 33 è poi indicata la distribuzione delle linee di corrente per la stessa sezione già rappresentata in fig. 30, ma avente però un taglio normale ai contorni.

Queste fig. 32 e 33 mostrano pure come la presenza del taglio faccia spostare notevolmente il « centro di torsione », che deve risultare interno a *tutte* le traiettorie chiuse.

Per applicare la ricerca indicata a pag. 311 e seguenti occorre poi assumere l'asse x passante per il detto centro di torsione, e contare

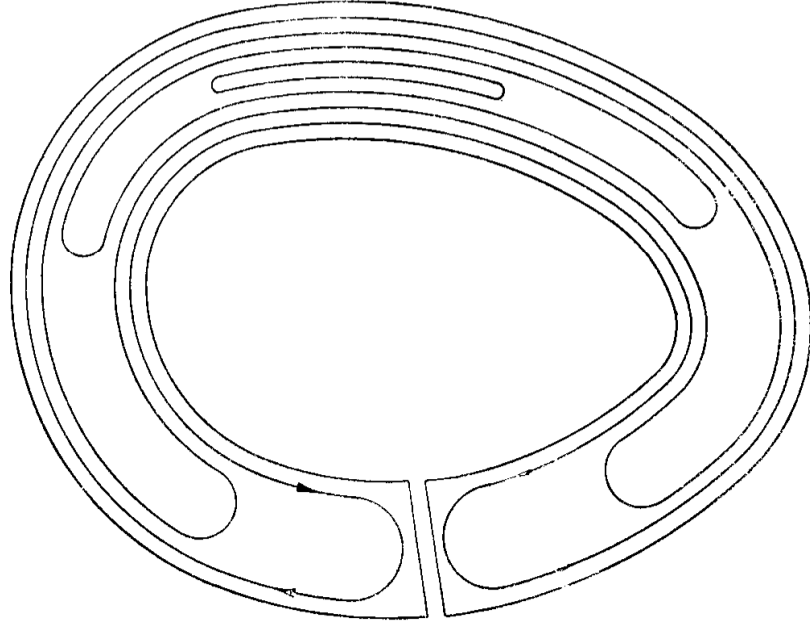


FIG. 33.

le ascisse x a partire dallo stesso punto; e ciò allo scopo di prendere a considerare tutte le aree racchiuse entro linee di corrente.

Sarebbe poi facile verificare che il rapporto $\frac{A'^2}{S'}$ che compare nella (290) risulta a parità di altre condizioni, in questo caso, minore che per la sezione intatta, senza taglio, e ciò perchè le aree racchiuse entro le linee di corrente assumono forma stretta ed allungata, sicchè in esse il perimetro (e quindi la circuitazione geometrica), prevale in confronto dell'area.

Inoltre l'intervallo di integrazione per il denominatore della (290) risulta molto più piccolo che nel caso dell'a sezione intatta; quindi il fattore di torsione q è assai più grande.

Ne consegue che a parità di momento torcente l'angolo di torsione ϕ risulta molto maggiore, e pure aumentate risultano in valore assoluto le τ_z , (in particolare la $\tau_{z_{max}}$), poichè la diminuzione del rapporto $\frac{A'}{S'}$ nella (288) non è sufficiente a compensare l'aumento notevole del valore di q .

L'interpretazione idrodinamica poi ci dà pure modo di renderci conto dell'influenza di cavità interne nel materiale, come soffiature di fusione, corpi estranei, fenditure, e simili.

Queste soluzioni di continuità debbono interpretarsi come ostacoli al deflusso del liquido, sicchè le linee di corrente sono costrette a deviare, contornando l'ostacolo ed addensandosi intorno ad esso: perciò ne risulta un locale aumento della velocità, ossia della τ_z .

Altre interessanti conseguenze si potrebbero ritrarre dall'analogia idrodinamica; ma qui ora ci basta aver esposte di esse le più caratteristiche e le più utili.

Altre significative ed istruttive analogie sono state istituite: noi le esporremo in un'Appendice in fine di questo volume.

SOLLECITAZIONI COMPOSTE

54. FLESSIONE COMPOSTA — (OVVERO FLESSIONE, TAGLIO E TORSIONE).

(*Quarto caso particolare*).

Colle stesse ipotesi già fatte in principio del n.º 53 (cioè assumendo come origine O il baricentro della base del cilindro vincolata, ed essendo quindi x ed y due assi baricentrici, ma del resto qualsiasi per ora), indichiamo qui con e e e' due costanti piccolissime, e poniamo:

$$\left. \begin{aligned} u &= -c \frac{xy}{m} - c' \left(\frac{xy}{m} - a \right) z \\ v &= -\frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - c' \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2 - y^2}{2m} - b \right) z \\ w &= cyz + c' \left(\frac{yz^2}{2} - yx^2 + \Psi_{xy} - ax - by \right) \end{aligned} \right\} \quad (299)$$