

viamente :

$$L = \frac{N_z^2 l}{2EA} + \frac{M_f^2 l}{2EI_{\text{oss}}} \quad (243)$$

A questa espressione si può pure pervenire tenendo presenti le (195) e (212), considerando il caso qui studiato come caso di sollecitazione composta di sforzo normale centrato e di flessione semplice, e poi applicando la sovrapposizione degli effetti: occorre però osservare che qui il lavoro di deformazione complessivo risulta semplicemente dalla somma dei lavori di deformazione dovuti alle sollecitazioni semplici componenti, perchè le caratteristiche (per ora due sole) del sistema di forze esterne sono state scelte, (in relazione colla forma del solido elastico sollecitato), in modo tale che ciascuna caratteristica non compie lavoro per effetto della deformazione provocata dall'altra; se questa condizione non fosse soddisfatta, alla predetta somma si dovrebbe aggiungere un termine proporzionale al prodotto delle due caratteristiche (termine rettangolare).

Avremo occasione di verificare che tale proprietà (dei termini rettangolari nulli) vale in generale per le sollecitazioni composte, in virtù della scelta delle caratteristiche delle forze esterne fatta al n.º 49 secondo le (183) e (186).

Per quanto riguarda le quadriche di deformazione, delle tensioni, i coni delle dilatazioni nulle, e degli scorrimenti, ecc., e le linee isostatiche (ossia per ciò che concerne la distribuzione delle tensioni e la deformazione nell'intorno di un punto generico), poichè pure qui l'unica componente speciale di tensione diversa da zero è la  $\sigma_z$ , non dobbiamo che ripetere ciò che si disse in fine del N.º 50, a pag. 219.

È poi superfluo rilevare che il caso di sollecitazione a sforzo normale eccentrico comprende come specializzazioni i due casi di sollecitazione semplice prima studiati nei N.º 50 e 51; lo sforzo normale centrato (per  $M_f = 0$ ) e la flessione semplice (per  $N_z = 0$ ).

### 53. TORSIONE SEMPLICE. (Terzo caso particolare).

Supponiamo ora di nuovo, come già precedentemente, che l'origine  $O$  degli assi sia il baricentro della sezione di base  $z = 0$  del nostro cilindro.

Come già negli altri casi, indichiamo ora con  $c$  una costante pic-

colissima; indi poniamo:

$$\left. \begin{aligned} u &= -cz(y+a) \\ v &= cz(x-b) \\ w &= c[ax+by-\Psi(x,y)] \end{aligned} \right\} \quad (244)$$

ove con  $\Psi(x, y)$  si designa una funzione ad un solo valore, finita, continua, determinata in tutti i punti della sezione retta del cilindro, e con  $a$  e  $b$  si indicano due costanti determinabili in base alle già descritte condizioni di vincolo.

Affinchè siano soddisfatte le (164), per  $x=y=z=0$ , è necessario e sufficiente che nell'origine  $\Psi$  sia nulla e che le sue prime derivate parziali, (rispetto ad  $x$  ed  $y$ ), siano ivi rispettivamente uguali ad  $a$  e  $b$ ; ciò si può verificare facilmente, e brevemente si esprime come segue:

$$\Psi_0 = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_0 = a \quad ; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_0 = b \quad ; \quad (245)$$

indicando coll'indice zero i valori che le soprascritte funzioni assumono per  $x=y=0$ .

E facilissimo verificare che con quanto precede risultano soddisfatte le condizioni (159), (160), (161) e (162): perchè poi risulti soddisfatta anche la (163) occorre che la funzione  $\Psi$  sia armonica (v. pure pag. 91), ossia che soddisfaccia all'equazione di Laplace:

$$\Delta_2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (246)$$

Deve poi al solito essere verificata sulla superficie laterale del cilindro la terza delle (149), combinata colle (148), cioè deve essere:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} \alpha_x + \gamma_{yz} \alpha_y &= 0 & \gamma_{xz} \alpha_x + \gamma_{yz} \alpha_y &= 0 \\ \gamma_{xz} \alpha_x + \gamma_{yz} \alpha_y &= 0 & \gamma_{xz} \alpha_x + \gamma_{yz} \alpha_y &= 0 \end{aligned}$$

e perciò sul contorno  $s$  della sezione retta si deve avere:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + y\right) \alpha_x + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - x\right) \alpha_y = 0 \quad (247)$$

Sia  $dn$  un elemento infinitesimo lineare sulla normale al con-

torno  $s$ , e siano  $dx$  e  $dy$  le sue proiezioni sui due assi  $x$  ed  $y$ ; si ha quindi:

$$\alpha_x = \frac{dx}{dn} \quad ; \quad \alpha_y = \frac{dy}{dn}$$

Perciò la (247) diviene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn},$$

ovvero:

$$\frac{d\Psi}{dn} = x \frac{dy}{dn} - y \frac{dx}{dn} \quad (248)$$

Il contorno  $s$  della sezione retta abbia per equazione:  $f(x,y) = 0$ ; allora è noto che si ha:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \times \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \times \frac{\partial f}{\partial y};$$

quindi la (248) diviene:

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (249)$$

Il primo membro è la derivata della funzione armonica incognita  $\Psi$  presa nella direzione della normale al contorno  $s$ ; il secondo membro è noto, quando sia assegnato il detto contorno  $s$ .

Siamo così ricondotti ad un problema assai noto in analisi: trovare una funzione armonica, finita, continua e determinata per ciascun punto di una data area piana, e tale che sul contorno di detta area la derivata della funzione, presa secondo la normale al contorno stesso, assuma dei valori dati. (Problema di Neumann).

Ciò posto, per le (154) e (148), dalle (244) si ricava immediatamente: (155)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 & \int_A z &= \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz \\ \tau_{yz} &= -Gc \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right) & \int_A yz &= \int_A yz dz = \int_A yz dz \\ \tau_{xz} &= -Gc \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right) & \int_A xz &= \int_A xz dz = \int_A xz dz \end{aligned}$$

Questi valori non dipendono dalla  $z$ , come già sappiamo. Si possono poi ricavare subito le caratteristiche delle forze esterne applicate sulla base libera  $z = l$ , secondo le (183), e si trova:

$$\begin{aligned} N_z &= 0 ; & M_x &= M_y = 0 \\ T_x &= -Gc \left( \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} dA - \int_A x dA \right) \\ T_y &= -Gc \left( \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA + \int_A y dA \right) \\ M_z &= -Gc \left( \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} x dA - \int_A x^2 dA - \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} y dA - \int_A y^2 dA \right) \end{aligned} \quad (250)$$

Poichè gli assi  $x$  ed  $y$  sono baricentrici, si ha:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = 0$$

Inoltre è facile dimostrare che si ha pure:

$$\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA = \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} dA = 0 ;$$

perciò occorre applicare un *lemma di Green*, noto nell'analisi; per maggior chiarezza, prima di applicarlo, vogliamo richiamarlo qui brevemente.

Consideriamo due funzioni  $f_{x,y}$  e  $g_{x,y}$  delle  $x$  ed  $y$ , definite nei punti di un'area piana connessa  $A$  e del suo contorno  $s$ , il quale sia continuo e colla tangente determinata in ogni punto; suppo-

niamo che in  $A$  e su  $s$  siano finite e continue le dette funzioni  $f$  e  $g$ , e le loro derivate prime e seconde.

Si consideri poi l'identità:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

ed inoltre alla funzione  $\left( f \frac{\partial g}{\partial x} \right)$  si applichi la nota formola di Gauss (28),  $\int_A \frac{\partial F}{\partial x} dA = - \int_s F \cos(nx) ds$ , interpretata a due dimensioni, ed estesa all'area  $A$  ed al suo contorno, cioè espressa come segue:

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial x} dA = - \int_s F \cos(nx) ds,$$

e si rammenti poi che è:

$$\cos(nx) = \frac{dx}{dn}.$$

Così si ottiene:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} dA + \int_A f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dA = - \int_s f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dn} ds.$$

Analogamente, rispetto alla variabile  $y$ , si ha:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} dA + \int_A f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dA = - \int_s f \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dn} ds$$

Sommando membro a membro si ottiene poi la relazione che esprime appunto il *lemma di Green*:

$$\int_A \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA + \int_A f \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dA = - \int_s f \frac{dg}{dn} ds.$$

Evidentemente è pure valida la relazione che da questa si ottiene scambiando  $f$  con  $g$ ; cioè:

$$\int_A \left( \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA + \int_A g \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dA = - \int_s g \frac{df}{dn} ds.$$

Se ora supponiamo che le due funzioni  $f$  e  $g$  siano armoniche, allora nelle due ultime relazioni i secondi termini a primo membro sono nulli, e poichè i primi termini sono identici, ne risulta che pure i secondi membri sono identicamente uguali, e si ha quindi:

$$\int_A \cdot f \frac{dg}{dn} ds = \int_A \cdot g \frac{df}{dn} ds. \quad (251)$$

Ciò posto, proponiamoci, come poco sopra, di calcolare l'integrale:

$$\int_A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA$$

Applicando pure qui la formula di Gauss (28) a due sole dimensioni, abbiamo:

$$\int_A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA = - \int_A \cdot \Psi \cos(nx) ds = - \int_A \cdot \Psi \frac{dx}{dn} ds.$$

Si applichi ora la (251), ponendo  $\Psi$  in luogo di  $f$  ed  $x$  in luogo di  $g$ ; inoltre si tenga presente la (248); così si ottiene, di séguito:

$$\int_A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA = - \int_A \cdot x \frac{d\Psi}{dn} ds = - \int_A \cdot x^2 \frac{d^2 \Psi}{dn^2} ds + \int_A \cdot xy \frac{dx}{dn} ds.$$

Applicando poi ancora, ma in senso inverso la formula di Gauss, si trasformino i due ultimi integrali estesi al contorno  $s$  in altri integrali estesi all'area  $A$ , e così si ottiene di séguito:

$$\int_A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA = \int_A \cdot \frac{\partial(x^2)}{\partial y} dA - \int_A \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} dA.$$

Orbene, qui nel secondo membro il primo integrale è nullo, perchè è evidentemente uguale a zero la funzione da integrare; il secondo integrale è nullo poichè si riduce a  $\int_A y dA$ , e l'asse  $x$  è baricentrico; perciò anche il primo membro è sempre zero, come volemmo dimostrare: in modo perfettamente analogo si dimostra che è

pure nullo l'integrale:

$$\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y} dA$$

come pure avevamo affermato più sopra.

Tornando quindi ora alle (250) si riconosce che sono pure nulle le due componenti del taglio:

$$T_x = T_y = 0,$$

e perciò l'unica caratteristica delle forze esterne applicate, la quale sia diversa da zero è il momento torcente  $M_x$ .

[Questo fatto verrà dimostrato anche più intuitivamente più innanzi, quando parleremo di certe analogie idrodinamiche, (v.)].

Ora, per semplificare l'espressione di  $M_x$  [l'ultima delle (250)], poniamo:

$$I_p = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x;$$

dalla statica grafica è noto che  $I_p$  è il momento d'inerzia polare dell'area  $A$  rispetto al suo baricentro; inoltre poniamo ancora:

$$q = \frac{I_p}{I_p - \int_A \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA}; \quad (252)$$

questo rapporto si chiama il *fattore di torsione*; per quanto si disse sopra sulla natura della funzione  $\Psi$ , risulta che  $q$  dipende solo dalla forma dell'area  $A$ , e si può quindi considerare dato, quando sia data l'area  $A$  stessa.

Con queste posizioni, l'ultima delle (250) diviene:

$$M_x = Gc \frac{I_p}{q}$$

Poichè nei problemi tecnici il momento torcente  $M_x$  è un dato, da questa relazione si deve ricavare la costante  $c$ :

$$c = q \frac{M_x}{GI_p}$$

ed allora le componenti di spostamento date dalle (244) divengono :

$$\left. \begin{aligned} u &= -q \frac{M_z}{GI_p} z(y+a) \\ v &= q \frac{M_z}{GI_p} z(x-b) \\ w &= q \frac{M_z}{GI_p} [ax+by-\Psi(xy)] \end{aligned} \right\} \quad (253)$$

e le espressioni delle componenti di tensione già sopra scritte, sono, nella forma definitiva :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{yz} &= -q \frac{M_z}{I_p} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right) \\ \tau_{xz} &= -q \frac{M_z}{I_p} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right) \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Le due ultime delle (254) danno le componenti del vettore  $\bar{\tau}_z$ , tensione tangenziale provocata dal momento torcente  $M_z$ .

È utile calcolare la *rotazione*, (od il *vorticale*) del vettore  $\bar{\tau}_z$ , secondo la ben nota definizione richiamata al N.º 9, pag. 26.

Si trova agevolmente :

$$\left[ 2 \operatorname{rot} \bar{\tau}_z = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2q \frac{M_z}{I_p} \right] = \text{costante} \quad (254 \text{ bis})$$

Si noti ch'essa risulta costante su tutta la sezione: ciò è in armonia con le *condizioni di congruenza* definite al N.º 8, pag. 25.

Infatti indicando con  $\bar{\gamma}_z = \frac{\bar{\tau}_z}{G}$  il *vettore scorrimento totale*, risultante di  $\gamma_{zxr}$  e  $\gamma_{zys}$ , dalle (17), per  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ , com'è nel caso della torsione, si ricava agevolmente:

$$\operatorname{rot} \bar{\gamma}_z = \text{costante.}$$

Si noti inoltre che dalle (254) si ricava pure :



$$\boxed{\operatorname{div} \bar{\tau}_z = \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} = 0} \quad (254 \text{ ter})$$

e ciò s'accorda con la terza delle equazioni indefinite dell'equilibrio (146), per  $\sigma_z = 0$ .

Notiamo poi che, essendo ovunque  $\epsilon_z = 0$ , dalla (156) si deduce che la dilatazione cubica è pure ovunque identicamente nulla.

Passiamo ora ad analizzare la natura della deformazione rappresentata dalle (252), la quale, come dice il titolo di questo N.º, si chiama *torsione semplice*.

Consideriamo i punti di una stessa sezione retta del cilindro (per  $z = \text{costante}$ ); per ciascuno di essi distinguiamo lo spostamento di componenti  $u$  e  $v$ , contenuto nel piano della sezione, dallo spostamento  $w$  normale al piano stesso.

Quest'ultimo spostamento, secondo l'ultima delle (252) risulta indipendente da  $z$ ; poichè la funzione  $\Psi$  non è in generale lineare nelle  $x$  ed  $y$ , se ne deduce che le sezioni rette *non* si conservano piane, ma subiscono una specie di ingobbimento, il quale è lo stesso per tutte dette sezioni, comprese le due basi.

Lo spostamento poi di componenti  $u$  e  $v$ , contenuto nel piano della sezione, secondo le prime due delle (252) risulta dovuto ad una rotazione rigida di tutta la sezione nel suo piano, intorno al punto  $O_1$  di coordinate  $x = b$  ed  $y = -a$ ; l'ampiezza della rotazione risulta:

$$\boxed{\vartheta = q \frac{M_z}{GI_p} z} \quad (255)$$

Il punto  $O_1$  si chiama *centro di torsione*, e poichè le sue coordinate  $b$  e  $-a$  nel piano di ciascuna sezione retta non dipendono da  $z$ , ne consegue che tutti i centri di torsione relativi alle varie sezioni stanno tutti su una retta parallela all'asse  $z$ , la quale si denomina quindi *asse di torsione*.

Questo asse rimane inalterato dopo la deformazione: tutte le altre rette parallele all'asse  $z$  si deformano secondo eliche cilindriche, aventi tutte per asse quello stesso di torsione, e per passo [secondo la (255)], la lunghezza:

$$\frac{2\pi GI_p}{q M_z}$$

Per quanto riguarda le tensioni principali, essendo  $\sigma_z = 0$ , dalla (169) risulta:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \dots \right]$$

$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_z$ ; inoltre dalle (173) si trova:

$i_1 = -i_2 = 1$ ; il che significa che le direzioni principali sono ovunque inclinate a  $45^\circ$  rispetto all'asse  $z$  del cilindro o prisma: quindi le linee isostatiche incontrano sempre a  $45^\circ$  le generatrici delle traiettorie cilindriche delle  $\tau_z$  (v. N.º 48, pag. 201 e 204).

Risulta poi immediatamente che il cono di scorrimento si riduce qui alla coppia di rette  $z'$  ed  $z''$  — secondo le notazioni introdotte al N.º 48 a pag. 200 e conforme a quanto è detto a pag. 205. — Perciò le coniche di direzione sono le iperboli equilatera aventi per asintoti gli stessi assi  $x'$  e  $z'$ , inoltre poichè le tensioni principali sono uguali in valore assoluto, l'ellisse delle tensioni, o ellisse di Lamé, risulta un cerchio.

Il cono delle componenti normali nulle in questo caso è costituito dal piano della sezione retta ( $z' = 0$ ), e dal piano a questa normale, passante per l'asse  $y'$  (piano  $x' = 0$ ).

A proposito poi delle dilatazioni principali  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , dalle (178) e (179) risulta:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{1}{2} \gamma_z \\ \epsilon_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

Inoltre dalla (181), ovvero dalla prima delle (256) combinata colle (148), si deduce:

$$\boxed{\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{m+1}{Em} \tau_z} \quad (257)$$

Poichè la  $\epsilon_3$  è nulla le quadriche di deformazione diventano cilindri a generatrici parallele all'asse  $y'$ , (normale al piano  $x'z'$ ); (v. N. 9, pag. 28 e N.º 48, pag. 207); esse sono i cilindri iperbolici equilateri aventi per piani asintotici il piano della sezione retta ( $z' = 0$ ) ed il piano  $y'z'$  ( $x' = 0$ ); questi due piani costituiscono il cono delle dilatazioni nulle; notando che qui in particolare, questo cono (degenere) coincide con quello delle componenti normali nulle, visto poco più sopra.

× EQUAZIONE DI STABILITÀ.

Dalla (257), secondo i criterj esposti al N.º 48, pag. 206 e seg. ti, si può ricavare l'equazione di stabilità. Infatti, le tensioni principali ideali risultano:

$$E\epsilon_1 = -E\epsilon_2 = \frac{m+1}{m} \tau_z; \quad (258)$$

Handwritten notes at the top of the page, including a large 'x' and some illegible text.

Handwritten notes at the bottom of the page, including mathematical expressions like  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{m+1}{Em} \tau_z$  and  $\epsilon_3 = 0$ .

per la stabilità occorre che esse non superino mai, in valore assoluto, il minore  $k$  dei due carichi di sicurezza rispettivamente a trazione ed a compressione; perciò, se con  $\tau_{zm}$  indichiamo il massimo valore di  $\tau_z$ , (massimo che si potrà determinare quando sia data la legge con cui varia  $\tau_z$  sulla sezione, conforme a ciò che esporremo tra breve), si dovrà avere:

$$k \geq \frac{m+1}{m} \tau_{zm} \quad (259)$$

Può essere opportuno introdurre un valore limite per la  $\tau_{zm}$ , valore che si indica di solito con  $t$ , e si chiama *carico di sicurezza alla tensione tangenziale*, (od anche *carico di sicurezza al taglio*). Tale valore, secondo la (258) risulta:

$$t = \frac{m}{m+1} k \quad (260)$$

(nella pratica si ritiene usualmente  $m=4$ , e perciò si ricava:  $t = \frac{4}{5} k$ ).

Con ciò l'equazione di stabilità si può pure semplicemente esprimere come segue:

$$\tau_{zm} \leq t. \quad (261)$$

Su questo argomento dovremo tornare quando, avendo determinato per casi particolari la funzione  $\Psi$ , definita in principio di questo numero, potremo ricercare il valore di  $\tau_{zm}$ .

POTENZIALE ELASTICO. LAVORO DI DEFORMAZIONE.

Applicando la (165) e le (254) si trova:

$$\Phi = q^2 \frac{M_z^2}{2 GI_p^2} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 \right]$$

Il lavoro di deformazione sarà quindi:

$$L = q^2 \frac{M_z^2}{2 GI_p^2} \int_V \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dV$$

Si è già riconosciuto più sopra che la  $\Psi$  non dipende da  $z$ ; perciò la funzione da integrare è pure indipendente da  $z$ , e perciò si ha:

$$L = q^2 \frac{M_x^2 l}{2GI_p^2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dA$$

Trasformando poi l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dA = \\ & = I_p + \int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - 2 \int_A \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA. \end{aligned}$$

Ora se nella formola che esprime il *lemma di Green*, esposta a pag. 265 e 266, poniamo:

$$\underline{f_{(xy)}} = g_{(xy)} = \Psi_{(xy)}$$

e teniamo presente che la funzione  $\Psi$  è armonica, si ottiene:

$$\int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = - \int_s \Psi \frac{d\Psi}{dn} ds;$$

ed inoltre, per la (248), si ottiene poi, di séguito:

$$\int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = - \int_s \left( \Psi_x \frac{dy}{dn} - \Psi_y \frac{dx}{dn} \right) ds,$$

ed applicando all'ultimo integrale la nota formola di Gauss, per trasformarlo in integrale esteso all'area  $A$ , si trova, di séguito:

$$\int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = \int_A \left( \frac{\partial(\Psi x)}{\partial y} - \frac{\partial(\Psi y)}{\partial x} \right) dA = \int_A \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA.$$

Quindi sostituendo, riducendo ed applicando poi la (252), si ottiene, infine:

$$\int_A \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - x \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \right)^2 \right] dA = I_p - \int_A \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA = \frac{I_p}{q};$$

e poi sostituendo nell'ultima espressione di  $L$  si trova:

$$L = q \frac{M_z l}{2 GI_p}$$

$$L = \frac{1}{2} M_z \sqrt{\frac{1}{2} \frac{M_z}{G I_p}} \quad (262)$$

Tale espressione si può pure ricavare secondo il *teorema di Clapeyron* (N.º 36) come la metà del prodotto del momento torcente  $M_z$  per l'angolo di rotazione relativa provocata da esso tra le due basi del cilindro o prisma, rotazione espressa dalla (255).

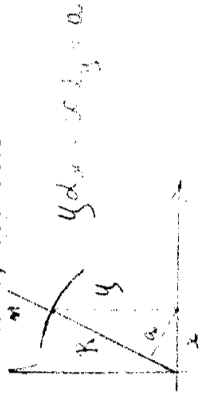
Ora per procedere oltre nello studio della deformazione e della distribuzione delle tensioni tangenziali occorre conoscere la funzione  $\Psi$ , e ciò si può ottenere soltanto quando sia data la forma della sezione retta.

Occorre perciò riferirci ad alcuni *casi particolari*.

Incominciamo a considerare il caso più comune nelle applicazioni, cioè quello del

CILINDRO A SEZIONE RETTA CIRCOLARE.

In tal caso, se l'asse  $z$  coincide con quello del cilindro, sul contorno  $s$  dell'area  $A$  deve essere:



$$y\alpha_x - x\alpha_y = 0$$

perciò la (247) diviene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \alpha_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \alpha_y = 0$$

e quindi:

$$x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

questa risulta soddisfatta ponendo:

$$\Psi = \text{costante.}$$

Anzi, tenendo conto delle (245) si dovrà assumere:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= 0 \\ a &= b = 0 \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

e perciò:

Sarebbe facile verificare che questa soluzione è l'unica possibile. Dalla (252) si ricava:  $x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$   $\times \frac{1}{\sqrt{y}} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$   $\frac{1}{\sqrt{y}}$   $q = 1$

quindi la deformazione risulta definita da:

$$\boxed{\begin{aligned} w &= 0 \\ \vartheta &= \frac{M_z z}{GI_p} \end{aligned}} \quad (264)$$

In questo caso dunque le sezioni rette si mantengono piane; ciascuna di esse ruota intorno all'asse  $z$ , col quale coincide l'asse di torsione; l'ampiezza della rotazione è la  $\vartheta$  data dalla (264).

La misura sperimentale di tale rotazione corrispondente ad un dato momento torcente  $M_z$  si può fare con mezzi strumentali molto semplici, e costituisce il più acconcio metodo per la determinazione sperimentale del modulo di elasticità tangenziale  $G$ ; ciò è molto utile, perchè, noto pure  $E$ , si può in conseguenza determinare  $m$ , secondo la (62), [ricordando che  $G = \mu$ ].

Lo stato di tensione poi è definito da:

$$\tau_{yz} = \frac{M_z x}{I_p} \quad ; \quad \tau_{zx} = -\frac{M_z y}{I_p} . \quad (264 \text{ bis})$$

da cui:

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{zx}} = -\frac{x}{y}$$

ed inoltre:

$$\tau_z = \frac{\lambda M_z}{I_p r} \quad \boxed{\tau_z = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{M_z}{I_p} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_z}{I_p} r} \quad (264 \text{ ter})$$

Ciò significa che la tensione tangenziale  $\tau_z$ , in un punto generico della sezione trasversale, è diretta normalmente al raggio che unisce il punto stesso col centro della sezione, ed in grandezza è proporzionale allo stesso raggio, sicchè raggiunge il valore massimo sulla superficie laterale cilindrica.

Le traiettorie delle  $\tau_z$  sono perciò delle circonferenze concentriche col contorno esterno; le traiettorie cilindriche delle stesse  $\tau_z$  sono cilindri circolari di asse  $z$ ; e su di essi le linee isostatiche sono le eliche cilindriche, le quali rispetto alle generatrici sono inclinate a  $45^\circ$ , da parti opposte.

Passiamo ora ad un altro caso particolare la cui trattazione è un po' meno semplice del precedente: il caso del

CILINDRO A SEZIONE ELLITTICA.

La sezione retta sia dunque ora un'ellisse di semiassi  $m$  ed  $n$ ; l'equazione del contorno, se gli assi dell'ellisse coincidono cogli assi  $x$  ed  $y$  rispettivamente, sarà:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

ossia:

$$f_{xy} = \frac{x'}{m^2} + \frac{y'}{n^2} - 1 = 0 \tag{265}$$

Ora per determinare  $\Psi$  abbiamo la *condizione al contorno* espressa dalla (247) o dalla (248), le quali, tenendo conto delle ben note espressioni di  $\frac{dx}{dn}$  e  $\frac{dy}{dn}$  richiamate a pag. 263, si possono trasformare nella seguente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} .$$

questa, secondo la (265), per il caso qui studiato diviene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{x}{m^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{y}{n^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2} xy$$

ed a questa si soddisfa, come si può verificare direttamente, colla funzione:

$$\Psi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} xy ; \tag{266}$$

la quale d'altra parte è evidentemente armonica, cioè soddisfa alla (246); e nell'analisi si dimostra che tale soluzione è unica.

Ora, dalla (266) e dalle (245) risulta pure immediatamente:

$$a = b = 0 . \tag{266 bis}$$

Dunque anche in questo caso l'asse di torsione coincide coll'asse geometrico del cilindro (assunto da noi come asse delle  $z$ ).

Anzi sarebbe facile dimostrare che ciò avviene sempre quando la sezione retta risulta simmetrica rispetto ai suoi assi principali di inerzia.

Calcoliamo ora il *fattore di torsione*  $q$  secondo la (252).  
Dalla (266) si ha:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} y \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} x \quad ;$$

e quindi:

$$\int_A \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \int_A (x^2 - y^2) dA .$$

Orbene dalla statica è noto che:

$$\int_A (x^2 - y^2) dA = I_y - I_x = \frac{\pi}{4} m n (m^2 - n^2) \quad ;$$

ed inoltre:

$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi}{4} m n (m^2 + n^2) .$$

Sostituendo questi vari valori nella (252) si ottiene infine:

$$q = \left( \frac{m^2 + n^2}{2 m n} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right)^2 \quad (267)$$

Si osservi che questo fattore dipende solo dal rapporto  $m:n$  ed assume valori uguali per valori del detto rapporto reciproci l'un dell'altro. Per  $m=n$  si ha  $q=1$ , come s'era già trovato direttamente: e mentre il rapporto  $m:n$  si scosta dal valore 1, il valore di  $q$  cresce rapidamente.

Dalla (255) o dalla (264) si ricava l'angolo di torsione:

$$\vartheta = \left( \frac{m^2 + n^2}{2 m n} \right)^2 \frac{M_z z}{GI_p}$$

ed in questa sostituendo a  $I_p$  il suo valore ricordato poco sopra, e tenendo presente che:

$$A = \pi m n, \quad \text{si ottiene:} \quad \vartheta = 4 \pi^2 \frac{M_z I_p}{GA^4} z \quad (268)$$



Questa relazione prova che a parità di area della sezione retta, l'angolo prodotto da un dato momento torcente su una data lunghezza  $z$  del cilindro è proporzionale al momento d'inerzia polare  $I_p$ .

Per i cilindri aventi sezione poco diversa dall'ellittica, si possono applicare in via di approssimazione le formole (267) e (268), ottenendo risultati praticamente molto attendibili.

#### *Ingobbimento della sezione trasversale.*

Vediamo ora qual'è la deformazione che la sezione retta del cilindro subisce oltre alla rotazione rigida  $\psi$  sopra calcolata.

Secondo la (266), e (266 bis), la terza delle (253) diviene ora:

$$w = \frac{n^4 - m^4}{4 m^2 n^2} \frac{M_z}{GI_p} xy, \quad (269)$$

equazione che rappresenta un paraboloide iperbolico, (e perciò rigato).

Per  $x=0$  ovvero per  $y=0$  si ha  $w=0$ ; il che dimostra che il paraboloide contiene come generatrici gli assi  $x$  ed  $y$  principali della

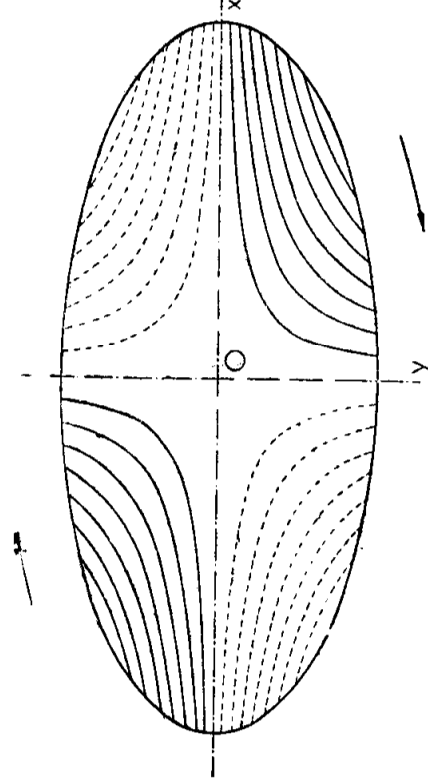


Fig. 15.

sezione; perciò il piano della sezione primitiva, nel centro di essa, risulta tangente al detto paraboloide.

Se  $M_z > 0$  ed  $m > n$  la  $w$  risulta positiva quando  $x$  ed  $y$  sono di segno contrario, riesce invece negativa se  $x$  ed  $y$  hanno lo stesso segno.

L'opposto accade se è  $n > m$ , ovvero se  $M_z < 0$ .

Per compendiare ogni caso si può dire che un osservatore disposto secondo l'asse  $z$ , colla testa dalla parte delle  $z$  positive, ve-

rebbe abbassarsi i due quadranti che nel senso del momento torcente  $M_z$  seguono i due semiassi maggiori dell'ellisse contorno e verrebbe innalzarsi gli altri due.

Nella figura 15 la nuova forma assunta dalla sezione è rappresentata mediante linee di livello, ossia colle curve intersezioni del detto paraboloide iperbolico con piani successivamente equidistanti tra loro, paralleli al piano primitivo della sezione: tali curve, come dimostra la (269), sono iperboli equilateri aventi per asintoti gli assi  $x$  ed  $y$ ; i vertici stanno sulle bisettrici degli stessi assi, a distanze dal centro  $O$ , le quali stanno tra loro come le radici quadrate dei numeri interi, ossia come  $\sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \dots$

### *Distribuzione delle tensioni tangenziali.*

Dalle (254), tenendo conto delle (266) e (267), si ottiene:

$$\tau_{yz} = \frac{2 M_z}{A m^2} x \quad ; \quad \tau_{zx} = \frac{-2 M_z}{A n^2} y . \quad (270)$$

Nei punti di un diametro qualunque dell'ellisse le  $x$  ed  $y$ , e perciò pure le  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  variano proporzionalmente alla distanza dal centro; perciò in tutti i punti del detto diametro le tensioni tangenziali tali  $\tau_z$  sono tutte parallele, e crescono linearmente colla distanza dal centro; poichè al contorno la  $\tau_z$  deve essere diretta tangenzialmente ad esso, ne consegue che la direzione comune delle  $\tau_z$  lungo un diametro è quella coniugata al diametro stesso rispetto all'ellisse. Ciò risulta pure dalle (270), ricordando poi dalla geometria che le grandezze:

$$-\frac{2y}{n^2} \quad \text{e} \quad \frac{2x}{m^2}$$

sono proporzionali rispettivamente ai coseni di direzione della tangente all'ellisse contorno rappresentata dall'equazione (265); secondo le (270) le due componenti  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{yz}$  della  $\tau_z$  secondo i due assi, sono esse pure proporzionali ai detti coseni direttori, e ciò conferma quanto si è ora enunciato.

Nella figura 16 è rappresentato il diagramma rettilineo delle tensioni  $\tau_z$  nei punti di un diametro  $CD$  dell'ellisse, conforme a quanto si è detto sopra.

Da quanto precede risulta che i punti di massima  $\tau_z$  debbono necessariamente trovarsi sul contorno.

Dalle (270) si deduce poi:

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{\theta z}^2 + \tau_{\varphi z}^2} = \frac{2M_x}{A} \sqrt{\frac{x^2}{m^4} + \frac{y^2}{n^4}}.$$

Ora dalla geometria analitica si sa, (e si può facilmente verificare direttamente), che se  $x$  ed  $y$  sono le coordinate di un punto  $P$  dell'ellisse, il radicale ora scritto è l'inverso della distanza normale del centro  $O$  dalla tangente all'ellisse nel punto  $P$ .

Quindi la tensione tangenziale  $\tau_z$  sarà massima dove questa distanza è minima, ossia agli estremi del semiasse minore.

Questo fatto, che a prima vista può apparire un po' singolare,

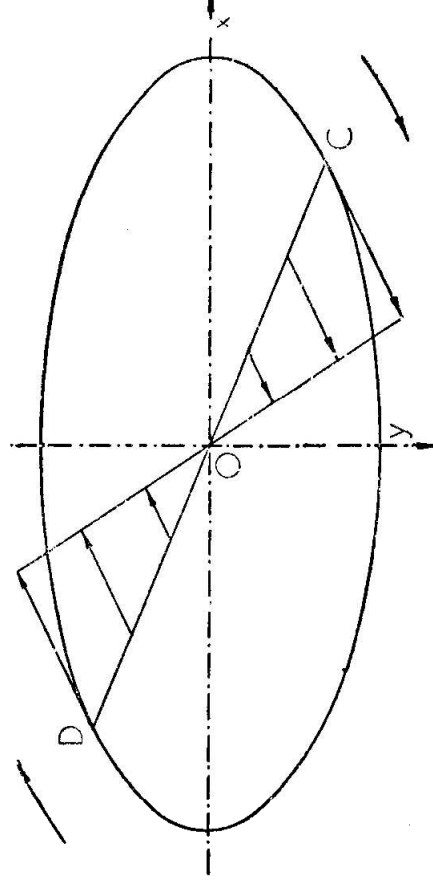


Fig. 16.

è un caso particolare di una proprietà più generale, sulla quale dovremo ritornare tra breve.

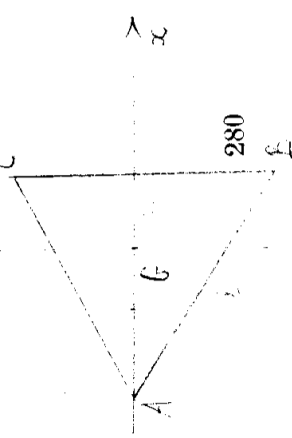
Da quanto precede risulta poi immediatamente che le traiettorie delle  $\tau_z$  sono ellissi omotetiche a quella di contorno, e che lungo una qualunque di queste la  $\tau_z$  varia con legge simile a quella con cui varia la  $\tau_z$  lungo il contorno.

Le *traiettorie cilindriche delle*  $\tau_z$  sono dunque cilindri omotetici a quello di contorno, e su questi le linee isostatiche costituiscono il doppio ordine delle eliche inclinate di  $45^\circ$  rispetto alle generatrici, da parti opposte.

Consideriamo ora, sempre a titolo d'esempio, e per mettere in evidenza qualche proprietà, che vale anche in casi più complessi, un altro caso particolare semplice, e precisamente quello del

#### *Prisma a base triangolare equilatera.*

Prendiamo come asse delle  $x$  una delle mediane del triangolo equilatero, e quindi come asse delle  $y$  la parallela al corrispondente lato, condotta per il baricentro della sezione.



Se diciamo  $d$  la lunghezza di uno dei lati, l'equazione del contorno si può scrivere come segue, secondo quanto insegna la geometria analitica:

$$(2\sqrt{3}x+d)(\sqrt{3}x+3y-d)(\sqrt{3}x-3y-d)=0$$

da cui, sviluppando e riducendo si ottiene:

$$\frac{2}{\sqrt{3}d}(3y^2x-x^3)+y^2+x^2-\frac{d^2}{9}=0$$

Ciò posto è facile verificare che le condizioni (246) e (249) sono soddisfatte dalla funzione:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}d}(3x^2y-y^3); \tag{271}$$

ed in analisi si dimostra facilmente che tale soluzione è unica.

Dalle (245) applicate a questo caso risulta pure:

$$a = b = 0$$

e quindi dalla terza delle (253) si ricava:

$$w = q \frac{M_z}{GI_p} \frac{y^2-3x^2}{\sqrt{3}d} y$$

Dobbiamo ricordare dalla statica, che:

$$I_p = \frac{\sqrt{3}}{48} d^4$$

Il fattore di torsione poi si calcola al solito colla (252): occorre perciò calcolare l'integrale al denominatore di detta formula ed in esso introdurre le derivate parziali della  $\Psi$  secondo la (271), e si ha quindi, con facili riduzioni:

$$\int_A \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA = \frac{\sqrt{3}}{d} \left| \int_A x^3 dA - 3 \int_A xy^2 dA \right|$$

I due integrali di area entro parentesi sono momenti di terzo ordine e si calcolano molto facilmente con noti procedimenti di quadratura, trovando:

$$\int_A x^3 dA = \frac{d^5}{480} \quad ; \quad \int_A xy^2 dA = -\frac{d^5}{480} .$$

Sostituendo nella formola precedente e riducendo si trova poi:

$$\int \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dA = \frac{\sqrt{3} d^4}{120} .$$

Quindi ritenuto nella (252), questo valore e quello di  $I_p$  sopra ricordato, si trova:

$$q = \frac{\frac{\sqrt{3}}{48} d^4}{\frac{\sqrt{3}}{48} d^4 - \frac{\sqrt{3}}{120} d^4} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}}$$

ossia infine:

$$q = \frac{5}{3} . \tag{272}$$

Sostituendo questo valore nella precedente espressione di  $w$ , si ha poi:

$$w = \frac{5}{3} \frac{M_z}{GI_p} \frac{y^2 - 3x^2}{\sqrt{3} d} y$$

od anche, ponendo in luogo di  $I_p$  il suo valore:

$$w = \frac{80}{3} \cdot \frac{M_z}{Gd^5} (y^2 - 3x^2) y .$$

Di qui risulta che  $w$  si annulla per tutti i punti, nei quali si ha:

$$y = 0 , \text{ ovvero } y = \sqrt{3} x , \text{ ovvero } y = -\sqrt{3} x ;$$

tali punti sono evidentemente quelli delle tre mediane del triangolo equilatero.

Ne consegue che l'ingobbimento della sezione retta è tale che le tre mediane restano rettilinee e nel loro piano primitivo; esse dividono l'area della sezione in sei regioni triangolari, i punti delle quali si spostano secondo  $z$  in sensi successivamente alterni, da una parte e dall'altra rispetto al detto piano primitivo, come si vede dalla fi-

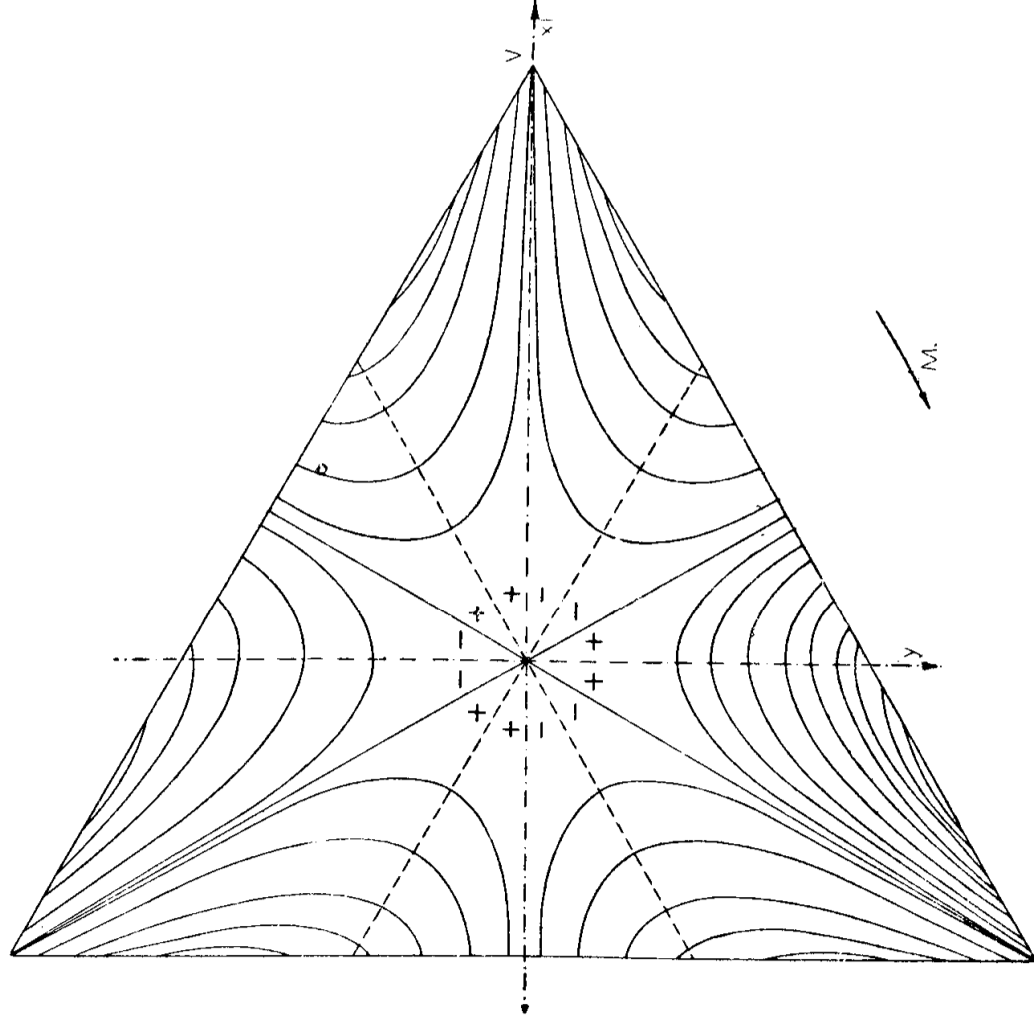


Fig. 17.

gura 17 nella quale l'ingobbimento è rappresentato pure con alcune linee di livello, contrassegnate con numeri proporzionali alle rispettive distanze dal piano primitivo (in modo analogo a quello seguito nella figura 15). Queste linee sono le cubiche rappresentate dalla equazione:

$$y^3 - 3x^2y = \text{costante.}$$

Da essa risulta che una qualsiasi di dette linee di livello risulta simmetrica rispetto all'asse delle  $y$  (perchè l'equazione contiene  $x$  alla 2.<sup>a</sup> potenza): e poichè l'asse  $y$  stesso è una qualunque delle tre parallele rispettivamente ai tre lati condotte per il baricentro, risulta che la detta curva di livello è simmetrica rispetto a ciascuna di tali tre rette. Inoltre poichè l'equazione contiene  $y$  a sole potenze dispari, due curve corrispondenti a due valori della costante uguali ed opposti sono simmetriche rispetto all'asse  $x$ , che è una delle tre mediane, e quindi simmetriche pure rispetto alle altre due mediane. Infine dall'equazione stessa (per  $x=0$ ) risulta che le curve corrispondenti a valori della costante che stiano tra loro come i numeri interi 1, 2, 3, ... ecc.... staccano sull'asse  $y$  (e quindi sulle altre due rette analoghe -- v. sopra --) a partire dall'origine  $O$  dei segmenti che stanno tra loro come  $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3} \dots$  ecc.

Passando ora a determinare le tensioni tangenziali, si trova, per le (254), (271) e (272).

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \left( x - \sqrt[3]{3} \frac{x^2 - y^2}{d} \right) \\ \tau_{zx} &= - \frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \left( 1 + 2\sqrt[3]{3} \frac{x}{d} \right) y \end{aligned} \right\} \quad (273)$$

Ponendo in queste  $y=0$  si ricava:

$$\tau_{zx} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \left( x - \frac{\sqrt[3]{3}}{d} x^2 \right) .$$

Ciò significa che in tutti i punti della mediana assunta come asse delle  $x$  la tensione tangenziale è perpendicolare ad essa, e la sua intensità  $\tau_{yz}$  varia con legge parabolica, annullandosi per  $x=0$  e per  $x=d : \sqrt[3]{3}$ , cioè nel baricentro  $O$ , e nel vertice; e raggiunge poi nel punto medio del lato opposto, cioè per  $x = \frac{-d}{2\sqrt[3]{2}}$ , il massimo in valore assoluto:

$$\tau_{yz \text{ max}} = - \frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{4} d .$$

Nella figura 18 è segnato il diagramma delle  $\tau_{yz}$  lungo la mediana, asse delle  $x$ .

Si ha pure  $\tau_{zx} = 0$  per  $x = -d : 2\sqrt{3}$ , il che significa, ciò che già sappiamo, che in tutti i punti del lato parallelo all'asse  $y$  la tensione tangenziale è diretta secondo il lato stesso; essa è ivi espressa da:

$$\tau_{yz} = -\frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \sqrt{3} \left( \frac{d}{4} - \frac{y^2}{d} \right);$$

e cioè varia con legge parabolica, si annulla ai vertici ed assume nel punto medio il valore massimo già trovato or ora.

Si ha poi  $\tau_{yz} = 0$  nei punti le cui coordinate soddisfanno la relazione:

$$x - \sqrt{3} \frac{x^2 - y^2}{d} = 0.$$

È facile verificare che questa equazione rappresenta un'iperbole equilatera avente per asse reale l'asse  $x$  col centro nel punto  $C$  medio tra  $O$  e  $V$  (v. fig. 18) ed aventi i vertici reali in  $O$  ed in  $V$ ; essa passa pure per gli altri due vertici del triangolo; nella fig. 18 sono segnati punteggiati pure i rami delle altre due iperboli analoghe aventi per assi gli analoghi segmenti delle altre mediane; nei punti di tali curve le tensioni tangenziali sono parallele alle mediane rispettive. Tali curve sono utili per il tracciamento delle traiettorie delle tensioni tangenziali, come vedremo tra breve.

Cerchiamo ora la distribuzione delle tensioni tangenziali nei punti dell'asse  $y$ .

Perciò bisogna porre  $x = 0$  nelle (273), e si trova:

$$\tau_{yz} = \frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \frac{\sqrt{3}}{d} y^2$$

$$\tau_{zx} = -\frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} y$$

e da queste si ricava agevolmente:

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{zx}} = -\frac{y}{d : \sqrt{3}};$$

ciò prova che le tensioni tangenziali totali  $\tau_z$  nei punti dell'asse  $y$  agiscono su rette tutte concorrenti nel vertice  $V$  situato sull'asse  $x$  a distanza  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  dall'origine.



È chiaro che per la simmetria si trovano risultati del tutto analoghi per i punti delle parallele condotte per il baricentro  $O$ , agli altri due lati del triangolo.

Nella figura 18 si segnarono pure i diagrammi delle tensioni tangenziali nei punti di una mediana, nei punti di una parallela ad un lato per il baricentro, ed in quelli stessi di un lato del triangolo.

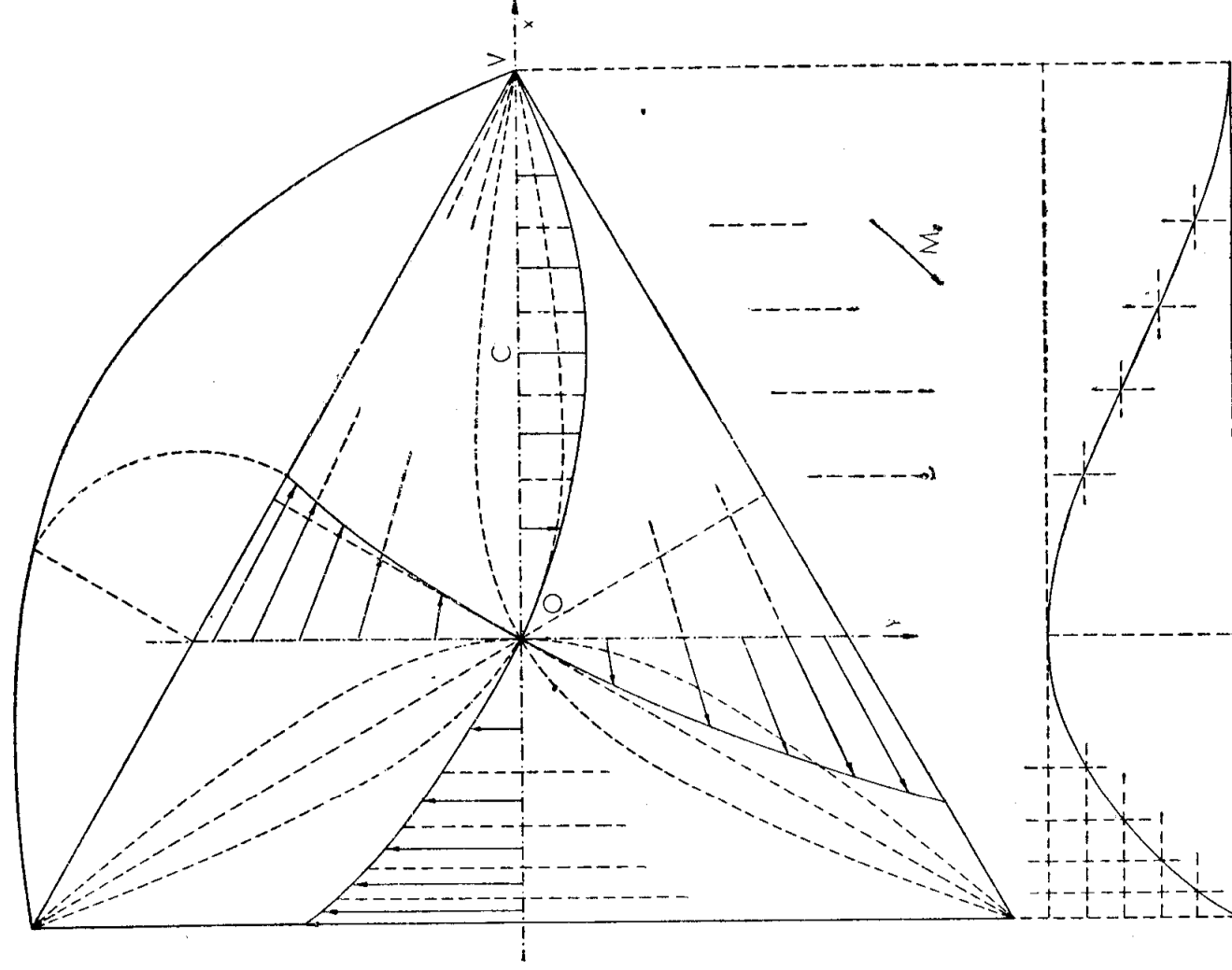


Fig. 18.

Il diagramma delle tensioni tangenziali nei punti di una mediana fu diviso in 10 strisce di aree uguali; questa divisione fu fatta mediante la linea integrale del diagramma stesso, situata nella parte inferiore della fig. 18.

Per i baricentri di dette strisce si condussero le frecce indicanti le tensioni suddette: tali frecce corrispondono quindi a *zone di ugual flusso di tensione tangenziale*. (Si confronti per questo la teoria dei campi vettoriali).

Inoltre, tangenti alle stesse frecce, si tracciarono le traiettorie delle tensioni tangenziali  $\tau_z$ ; esse si vedono disegnate nella fig. 19; in essa sono pure tracciate a tratti le iperboli luoghi dei punti nei quali la tensione è parallela ad una delle tre mediane; esse facilitano la costruzione progressiva delle dette traiettorie.

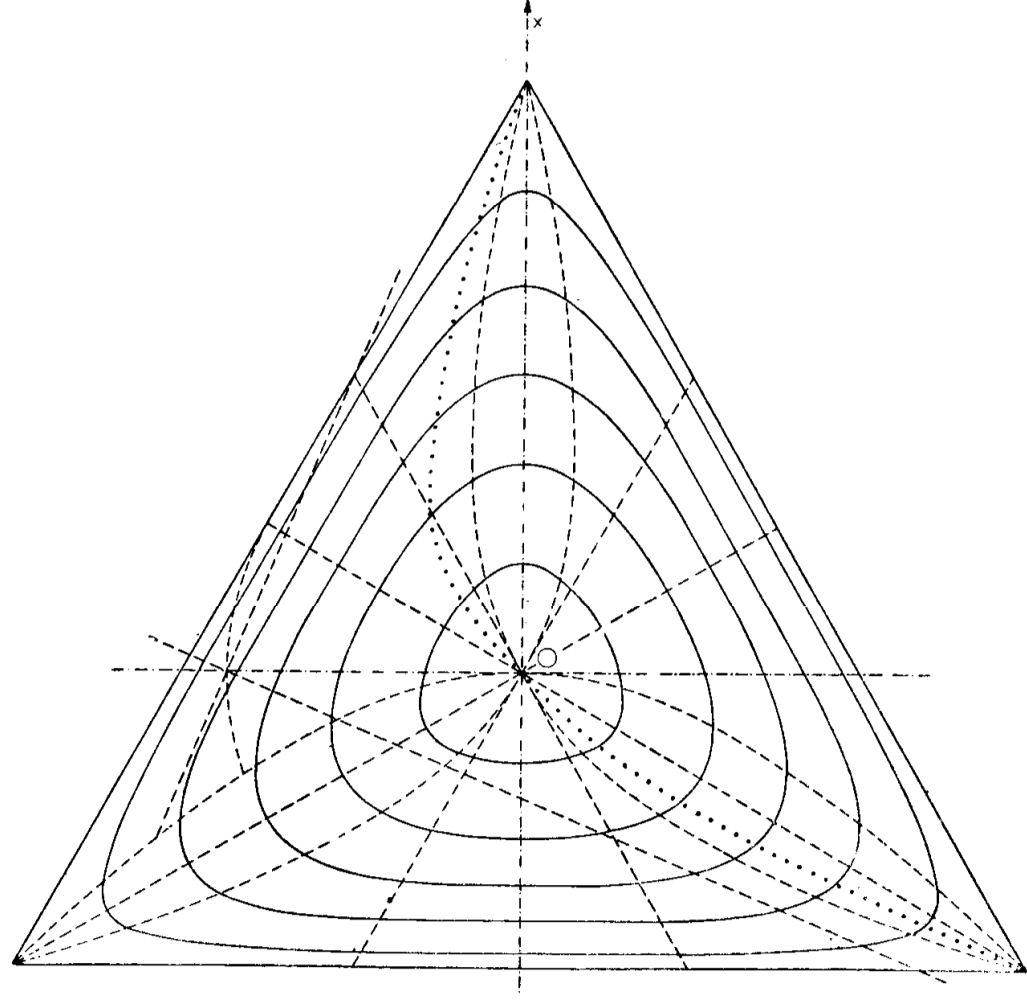


Fig. 19.

Tale costruzione può essere ulteriormente agevolata tracciando le curve luoghi dei punti nei quali le  $\tau_z$  e quindi le relative traiettorie hanno una data direzione, ossia una data inclinazione rispetto all'asse delle  $x$ . Esse si possono chiamare le *isocline rispetto alle traiettorie delle*  $\tau_z$ , (con significato analogo a quello delle isocline rispetto alle isostatiche, studiate al n.º 48, pag. 204 — valendo pure in questo caso l'avvertenza colà espressa —).

Detta  $i$  l'inclinazione della  $\tau_z$  rispetto all'asse delle  $x$ , si ha:

$$i = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xy}}$$

perciò, secondo le (273), il luogo dei punti su cui la  $\tau_z$  ha una data inclinazione  $i$  è rappresentato dall'equazione seguente:

$$x - \sqrt{3} \frac{x^2 - y^2}{d} + i \left( 1 + 2 \sqrt{3} \frac{x}{d} \right) y = 0 .$$

Essa rappresenta una conica passante per l'origine  $O$ , e per i vertici del triangolo; essa è un'iperbole equilatera: infatti secondo quanto è noto dalla geometria analitica, il gruppo dei termini di secondo grado uguagliato a zero fornisce l'equazione delle parallele agli asintoti condotte per l'origine, e si trova così:

$$x^2 - y^2 - 2ixy = 0 ,$$

equazione che rappresenta due rette reali ed ortogonali tra loro.

Il centro di tale iperbole ha le coordinate:

$$x_0 = \frac{d}{2\sqrt{3}} \frac{1-i^2}{1+i^2} ; \quad y_0 = -\frac{d}{2\sqrt{3}} \frac{2i}{1+i^2} ,$$

e perciò esso sta su un raggio uscente dall'origine  $O$ , avente rispetto all'asse  $x$  un'inclinazione:

$$i_0 = \frac{-2i}{1-i^2} ,$$

cioè tale raggio forma coll'asse  $x$  un angolo uguale a meno il doppio dell'angolo formato collo stesso asse dalla tensione  $\tau_z$  considerata, (di inclinazione  $i$ ).

Dalle espressioni ora scritte risulta poi:

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{d}{2\sqrt{3}};$$

ciò significa che il centro della detta iperbole, al variare di  $i$ , si sposta sul cerchio inscritto nel triangolo equilatero, contorno della sezione.

È poi chiaro che, variando  $i$ , la suddetta iperbole equilatera descrive tutto il *fascio* delle iperboli che passano per i tre vertici del triangolo equilatero contorno, e per il suo baricentro  $O$ .

Nella figura 19, a titolo d'esempio, è segnata a punti, quella tra le dette iperboli, la quale corrisponde al valore  $i = 1$  ( $= \text{tang } \frac{\pi}{4}$ ); i suoi asintoti sono in figura segnati a tratti lunghi. — Conforme a quanto s'è detto più sopra, tali iperboli furono utilizzate per render più agevole e più esatto il tracciamento delle traiettorie delle  $\tau_z$ .

Per quanto riguarda l'*equazione di stabilità* per il caso qui studiato, ricordiamo che da quanto sopra è esposto risulta che il valor massimo assoluto di  $\tau_z$  si verifica nei punti medi dei tre lati, ed ha l'espressione già trovata a pag. 283, che qui riportiamo, in valore assoluto:

$$\tau_{z \text{ max}} = \frac{5}{3} \frac{M_z}{I_p} \frac{\sqrt{3}}{4} d.$$

Questo si può trasformare introducendo il noto valore di  $I_p$ , già riportato a pag. 280, e con facili riduzioni si trova:

$$\tau_{z \text{ max}} = \frac{20}{d^3} M_z. \quad (274)$$

Questo è il valore che, per la stabilità, non deve superare il carico di sicurezza al taglio  $t$  dato dalla (260).

La frazione  $d^3$ : 20 si può denominare *modulo di resistenza a torsione*, per istituire un'analogia tra la (274) e le equazioni di stabilità a flessione date dalle (217).

## ALTRO CASO PARTICOLARE. PRISMA A BASE RETTANGOLARE.

Questo caso, pure importante per le applicazioni pratiche, si presenta più dei precedenti complesso, poichè richiede l'introduzione di funzioni trascendenti; perciò noi ci limiteremo ad esporre i risultati relativi.

Si consideri dunque un prisma a base rettangolare, di lati  $2a$  e  $2b$  paralleli rispettivamente agli assi  $x$  ed  $y$ , che si fanno coincidere con le due mediane (v. fig. 20).

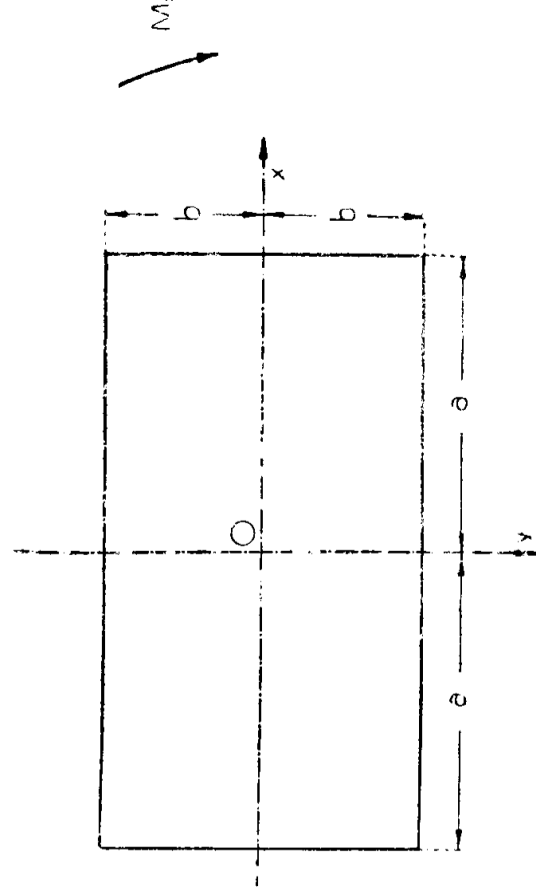


Fig. 20

Esso sia soggetto al momento torcente  $M_z$ .

Ricordiamo che sul contorno la  $\tau_z$  deve essere diretta secondo il contorno stesso, e teniamo poi presenti le (254).

Quindi sui lati paralleli all'asse  $y$ , cioè per  $x = \pm a$  e per  $-b \leq y \leq b$ , deve essere  $\tau_{yz} = 0$ , e perciò:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y;$$

analogamente, sui lati paralleli all'asse  $x$ , e cioè per  $y = \pm b$  e per  $-a \leq x \leq a$ , deve essere:  $\tau_{yz} = 0$  e perciò:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = x.$$

Queste sono le condizioni al contorno, alle quali deve soddisfare

la funzione  $\Psi$ , la quale deve poi al solito essere armonica in tutta la sezione rettangolare.

La funzione  $\Psi$  soddisfacente alle condizioni ora indicate si può trovare mediante uno sviluppo in serie col metodo di Fourier; noi indichiamo qui, di tale ricerca, soltanto il risultato, che è:

$$\Psi = xy - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen} h(m_1 x) \operatorname{sen}(m_1 y)}{(2n-1)^3 \operatorname{cosh}(m_1 a)} \quad (275)$$

avendo posto:

$$\frac{32}{\pi^3} \left( \gamma, \lambda \gamma \delta \right)$$

$$m_1 = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{b}$$

e ricordando che si ha:

$$\operatorname{sen} hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \quad \operatorname{cosh} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{tang} hx = \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{cos} hx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .$$

Per detta funzione  $\Psi$  vale naturalmente pure l'espressione simmetrica della precedente rispetto ad una permutazione delle variabili  $x$  ed  $y$ , tenendo presente che con tale permutazione s'inverte il senso positivo del momento torcente  $M_x$ ; in altri termini si ha pure:

$$\Psi = -xy + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen} h(m_2 y) \operatorname{sen}(m_2 x)}{(2n-1)^3 \operatorname{cosh}(m_2 b)} \quad (275 \text{ bis})$$

ove si pone:

$$m_2 = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{a}$$

Le due espressioni fornite dalle (275) e (275 bis) sono *identicamente* uguali, come si può dimostrare facilmente.

Per determinare le componenti speciali di tensione  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  secondo le (254), occorre calcolare le derivate parziali della  $\Psi$ , rispetto alle  $x$  ed  $y$ ; e si trovano dalle (275) e (275 bis) le espressioni seguenti, esse pure due a due identicamente uguali: