

× 52. TENSIONE O PRESSIONE E FLESSIONE.

Il caso che ora studiamo viene qui trattato direttamente come un caso particolare semplice del problema di Saint-Venant, ed i casi studiati nei numeri precedenti si possono considerare come specializzazioni di questo.

Però nei trattati tecnici è invalso l'uso di considerare questo come un caso di *sollecitazione composta* derivante dalla combinazione dei casi precedenti mediante il principio della sovrapposizione degli effetti.

Tuttavia noi crediamo opportuno considerarlo come *caso di sollecitazione semplice*, sia perchè esso si può studiare con l'uso delle (196) in tutta la loro generalità, sia perchè esso comporta la presenza di sole tensioni normali  $\sigma_x$ , e perciò, per quanto riguarda il *cemento elementare* del materiale, esso *non* differisce sostanzialmente dai casi più semplici sinora trattati.

Questo caso si verifica quando, nella deformazione descritta nel N.º 51 precedente, l'asse  $x$  non è baricentrico, ma in posizione affatto generica.

Già sappiamo che allora sono diversi da zero, oltre ai *momenti flettenti* dati dalle (199) e (200), anche lo *sforzo normale*  $N_x$ , dato dalla (198).

Perciò la sollecitazione esterna, oltre alla *flessione semplice*, comprende pure *trazione o compressione*.

Le formule relative già viste in generale al N.º 51 si possono trasformare, considerando un asse  $x_0$  baricentrico per la sezione e parallelo all'asse neutro  $x$ ; indicando poi con  $y_0$  l'ordinata  $y$  del baricentro e con  $y_1$  la distanza normale del punto generico della sezione dal detto asse  $x_0$  si avrà:

$$y = y_0 + y_1 \tag{229}$$

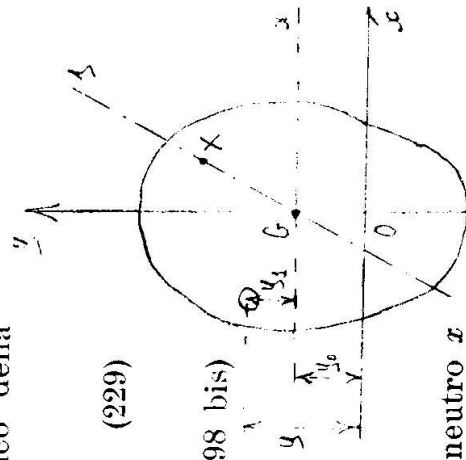
$$\text{La (108) diviene: } \sigma_x = \epsilon \cdot C \cdot y$$

$$N_x = E \epsilon y_0 A$$

$$\tag{198 bis}$$

essendo:

$$\int_A y dA = y_0 A \tag{\neq 0}$$



il momento statico dell'area della sezione rispetto all'asse neutro  $x$  (momento *non* nullo perchè rispetto ad asse non baricentrico).

Indichiamo poi qui con  $M_x$ , il momento delle forze elementari interne  $\sigma_x dA$  rispetto all'asse neutro  $x$ , designando invece con  $M_{x_0}$

$$M_x = E \epsilon \int_A y^2 dA$$

$$M_y = -E \epsilon \int_A x y dA$$

$$M_z = E \epsilon \int_A y dA$$

il momento delle stesse forze rispetto all'asse parallelo  $x_0$  (momento flettente).

Allora per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse neutro  $x$  si ha, analogamente alla (199):

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = Ec \int_A y^2 dA = Ec I_x \quad (199 \text{ bis})$$

ove si indica con  $I_x$  il momento d'inerzia (per distanze normali) della sezione rispetto all'asse neutro  $x$ .

Ora, per una notissima equazione di statica, si ha:

$$M_x = M_{x_0} + N_z y_0$$

Se poi con  $I_{x_0}$  indichiamo il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse  $x_0$  baricentrico, per il *teorema del trasporto*, noto dalla meccanica razionale e dalla statica grafica, si ha pure:

$$I_x = I_{x_0} + Ay_0^2 \quad \Rightarrow \quad N_z = \sum c y_i A$$

Sostituendo nella (199 bis) i valori dati dalle due ultime espressioni, e tenendo conto della (198 bis) si ricava poi:

$$M_{x_0} = Ec I_{x_0} \quad (199 \text{ ter})$$

Da questa e dalla (199 bis) risulta una relazione tipica per questo caso di sollecitazione:

$$\boxed{\frac{M_x}{I_x} = \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}}}$$

dalle stesse poi si ricava il valore della costante  $c$ :

$$c = \frac{M_x}{EI_x} = \frac{M_{x_0}}{EI_{x_0}} \quad (201 \text{ bis})$$

Poi dalla (197), tenendo conto della (229) si trova:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sum c y_i \\ \sigma_z &= Ecy_0 + Ecy_1 \end{aligned}$$

ed infine, per la (198 bis) e (199 ter) si ottiene:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}} y_1} \quad (230)$$

Si deve ora osservare che per la (197) la  $\sigma_z$  è proporzionale alla  $y$  e perciò le forze normali elementari  $\sigma_z dA$  sono proporzionali ai momenti statici  $y dA$  degli elementi di area  $dA$  rispetto all'asse neutro  $x$ ; perciò il sistema delle forze interne  $\sigma_z dA$  deve ammettere una risultante di intensità  $N_z$  già calcolata, ed applicata nel baricentro dei momenti statici delle aree elementari della sezione, presi rispetto all'asse neutro  $x$ . Tale baricentro, che indicheremo con  $X$ , è quel punto che nella statica grafica si chiama centro relativo dell'asse  $x$  rispetto alla sezione, e si sa che esso è anche l'antipolo dell'asse  $x$  rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione.

Ora, per l'equilibrio, nel centro  $X$  deve essere pure applicata la risultante delle forze esterne sollecitanti la base  $z=l$  del cilindro, (forza, la cui intensità dovrà essere la stessa  $N_z$  sopra trovata).

Perciò il centro  $X$  si dice anche centro di sollecitazione o di spinta e la sollecitazione che qui consideriamo si può chiamare pure sforzo normale eccentrico (tensione o pressione eccentrica): (eccentrico perchè non baricentrico).

Da quanto s'è visto risulta quindi che il centro di sollecitazione  $X$  ed il rispettivo asse neutro  $x$  sono elementi corrispondenti nell'antipolarità rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione (V. Statica grafica).

Questo risultato, riconosciuto qui per via sintetica, si può pure ottenere dalle formole sopra scritte: infatti dividendo membro a membro le (199 bis) e (200) per la (198 bis) si trova:

$$\frac{M_{x_0}}{N_z} = \frac{I_{x_0}}{y_0 A} \quad ; \quad - \frac{M_y}{N_z} = \frac{\int xy dA}{y_0 A} ;$$

ed in queste relazioni (per notissimi teoremi di statica) i primi membri esprimono rispettivamente le coordinate  $y$  ed  $x$  del centro di sollecitazione, ed i secondi membri le analoghe coordinate del centro relativo dell'asse neutro  $x$  rispetto alla sezione; la qual cosa dimostra l'enunciato sopra esposto.

La retta  $s$  che unisce il centro di sollecitazione  $X$  col baricentro  $G$  della sezione si chiama asse di sollecitazione; la sua direzione è coniugata di quella di  $x$  (o di  $x_0$ ) rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

Lo sforzo normale esterno  $N_z$  applicato eccentricamente in  $X$ , si può ora immaginare trasportato parallelamente a se stesso ad agire nel baricentro  $G$  della sezione, ottenendosi così la sollecitazione a sforzo normale centrato (N.º 50); per il trasporto si deve — come è noto dalla statica — tener conto della coppia, (detta appunto coppia

di trasporto), di momento  $N_z \times \bar{X}G$ , agente nel piano di sollecitazione  $sz$ : tale coppia produce flessione semplice (retta o deviata) con asse neutro coincidente con  $x_0$ , ed i momenti di questa coppia rispetto agli assi  $x_0$  ed  $y$  sono appunto gli  $M_{x_0}$  ed  $M_y$  dati dalle (199 ter) e (200).

Di queste due sollecitazioni semplici componenti, agenti simultaneamente, noi possiamo *sovrapporre gli effetti*, in virtù del noto principio (n.º 26), ed allora, secondo le (192) e (208), si ritrova la (230), già ottenuta direttamente.

Da quanto precede risulta poi che, se la flessione è deviata, come dalla (208) si è passati alla (213), così la (230) si può scrivere come segue, attribuendo ai simboli i significati già specificati:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_y}{I_{x_0}} y_s \quad (231)$$

Inoltre, combinando le (197) e (198 bis) si ottiene:

$$\sigma_z = \frac{N_z y}{y_0 x A} ; \quad (232)$$

ed analogamente dalle (197) e (199 ter) si ricava pure:

$$\sigma_z = \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}} y = \frac{M_y}{I_{x_0}} y \quad (233)$$

Le relazioni (230), (231), (232), (233) si prestano a calcolare i valori massimi e minimi (massimi negativi) della  $\sigma_z$ , i quali si verificano nei punti del contorno della sezione più lontani dall'asse neutro, cioè per i valori massimi numerici di  $y$ .

Da esse risulta che il diagramma della  $\sigma_z$  in funzione della  $y$  è lineare, con ordinata nulla sull'asse neutro.

In base a detti valori massimi e minimi di  $\sigma_z$  si scrivono poi le equazioni di stabilità, con i concetti e le avvertenze che già esponemmo al N.º 51.

#### X OSSERVAZIONE SULLE CONDIZIONI DI VINCOLO.

Da quanto precede risulta che nel caso qui studiato lo stato di tensione è caratterizzato dalla posizione dell'asse neutro  $x$ .

Essendo perciò arbitraria la scelta dell'asse  $y$ , nell'impostare ogni singolo caso concreto, noi potremo scegliere l'asse stesso passante per il baricentro  $G$  della sezione  $z = 0$ . Con tale scelta, nel bari-

centro  $G$  stesso risultano nulle le componenti  $p$ ,  $q$ ,  $r$  della rotazione di  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , calcolate a pag. 225, e perciò la deformazione definita dalle (196) attribuisce all'elemento superficiale di piano  $z=0$  contiguo al baricentro  $G$  uno spostamento rigido, che si riduce ad una trasla-

zione  $v_0 = -\frac{c}{2m} y_0^2$  nella direzione dell'asse  $y$ , la quale a sua volta si annulla se pure l'asse  $x$  è baricentrico.

### X MOMENTI DI NÒCCILO.

Dalla corrispondenza poc' anzi dimostrata tra il centro di sollecitazione  $X$  e l'asse neutro  $x$ , e dalle proprietà del nòcciolo centrale della sezione, note dalla statica grafica, risulta che l'asse neutro  $x$  è esterno, tangente o secante rispetto al contorno della sezione, secondo che il centro di sollecitazione  $X$  è rispettivamente situato nell'interno del nòcciolo, sul contorno di questo o ad esso esterno.

Se ne deduce che se il centro di sollecitazione non è esterno al nòcciolo centrale, la tensione interna  $\sigma_z$  in tutta la sezione è di uno stesso segno; e quando l'asse neutro è esterno, si deve considerare come *asse neutro virtuale*, poichè non vi sono punti della sezione che ad esso appartengano, e nei quali perciò sia nulla la tensione  $\sigma_z$  e la dilatazione  $\epsilon_z$ . Se invece l'asse neutro taglia la sezione, allora esso la divide in due zone, nelle quali si hanno tensioni  $\sigma_z$ , e perciò dilatazioni  $\epsilon_z$ , di segno contrario.

Consideriamo ora i due punti  $N_1$  ed  $N_2$  del contorno del nòcciolo centrale situati sull'asse di sollecitazione  $s$ , i quali si chiamano i *punti di nòcciolo* relativi al dato asse di sollecitazione (V. fig. 9).

Siano  $n_1$  ed  $n_2$  rispettivamente le antipolari di  $N_1$  ed  $N_2$  rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione, le quali sono parallele all'asse neutro  $x$  e toccano il contorno della sezione in due punti  $T_1$  e  $T_2$ ; questi sono i punti più lontani dall'asse neutro, nei quali si hanno i valori numericamente massimi di  $\sigma_z$ .

Orbene, la forza normale  $N_z$  applicata nel centro di sollecitazione  $X$  si può sostituire con una forza equipollente applicata in  $N_1$  e con una coppia avente il momento uguale a quello  $M_{n_1}$  della forza data  $N_z$  agente in  $X$ , rispetto al punto  $N_1$  (momento di trasporto).

Ora possiamo applicare al solito il principio della sovrapposizione degli effetti ed osservare che, per quanto si disse poco sopra, la forza normale applicata in  $N_1$  produce tensione nulla in  $T_1$ ; perciò la tensione in  $T_1$ , che diremo  $\sigma'_z$  è dovuta unicamente alla coppia flettente, e quindi, indicando (secondo la fig. 9) con  $y'$  la distanza

il punto essendo  $N_1$   
applicato nel  
tomo del nòcciolo,  
il momento di trasporto  
è trasportato al centro  
del nòcciolo centrale.

di  $T_1$  dall'asse  $x_0$ , misurata nella direzione dell'asse di sollecitazione  $s$ , si ha, conforme alle (213) e (217):

$$\sigma'_z = \frac{M_{n1}}{I_{y's}} y'_s = \frac{M_{n1}}{W'_{y's}} \quad (234)$$

Analogo ragionamento si può fare immaginando di trasportare

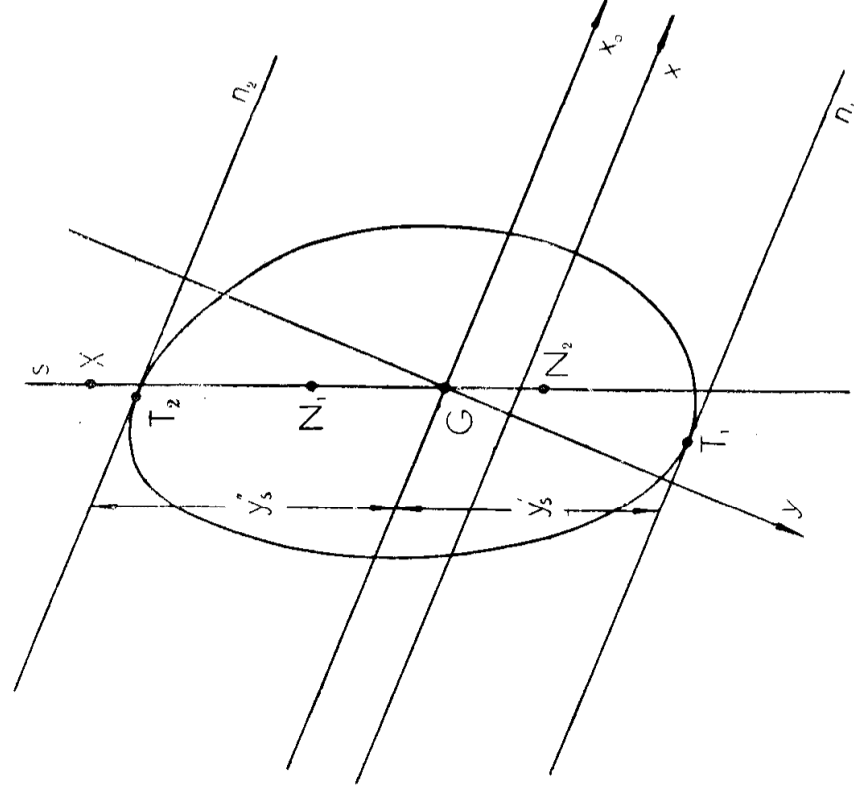


Fig. 9.

la forza normale esterna  $N_2$  da  $X$  in  $N_2$ , e calcolando il momento di trasporto  $M_{n2}$  rispetto al punto  $N_2$ ; allora la tensione normale in  $T_2$ , che diremo  $\sigma''_z$ , risulta, analogamente alla (234):

$$\sigma''_z = \frac{M_{n2}}{I_{n2s}} y''_s = \frac{M_{n2}}{W''_{n2s}} \quad (235)$$

(V. ancora fig. 9).

I momenti  $M_{n1}$  ed  $M_{n2}$  si dicono brevemente i *momenti di nocciolo*; *in base ad essi, dunque, le tensioni interne massime dovute*

allo sforzo normale eccentrico, si possono calcolare colla formola della flessione semplice.

E superfluo notare che i segni di  $\sigma'_z$  e  $\sigma''_z$  risultano determinati dai segni di  $M_{n1}$ ,  $y'_s$ ,  $M_{n2}$ ,  $y''_s$ .

× APPLICAZIONE ALLA SEZIONE RETTANGOLARE.

Nella pratica si presenta spesso la sezione rettangolare, con il centro di sollecitazione su una delle mediane; in tal caso può essere utile impiegare le (234) e (235) per dedurre le tensioni massime e conseguentemente il diagramma rettilineo delle tensioni.

Siano  $b$  ed  $h$  i due lati del rettangolo, rispettivamente normale e parallelo all'asse di sollecitazione. Allora, ricordando dalla statica

che:  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ , dalle (216) risulta:

$$W_x = \pm \frac{bh^2}{6}$$

(236)

questo è il modulo di resistenza rispetto alla mediana  $b$ ; il segno dipende da quello di  $y'$  ed  $y''$ , che sono uguali a  $\pm \frac{h}{2}$ .

Quindi dalle (234) e (235) si ricava:

$$\sigma'_z = \frac{6M_{n1}}{bh^2} \quad ; \quad \sigma''_z = -\frac{6M_{n2}}{bh^2}$$

(237)

Indichiamo con  $d_1$  e  $d_2$  le distanze del centro di sollecitazione  $X$  dai punti  $N_1$  ed  $N_2$ , positive se  $X$  sta, rispetto ad  $N_1$  ed  $N_2$ , dalla parte delle  $y$  positive; allora si ha in grandezza e segno:

$$M_{n1} = N_2 d_1 \quad ; \quad M_{n2} = N_2 d_2$$

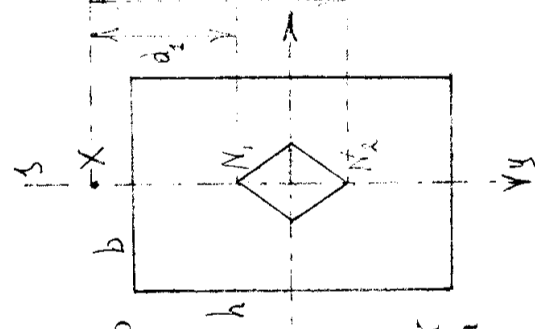
e quindi, dalle (237):

$$\sigma'_z = \frac{6N_2 d_1}{bh^2} \quad ; \quad \sigma''_z = -\frac{6N_2 d_2}{bh^2}$$

Osserviamo ora che il rapporto:

$$\sigma_{zm} = \frac{N_2}{bh}$$

è il valore medio della  $\sigma_z$  distribuita sull'area  $bh$ , ovvero, come si



dice brevemente, la *tensione media*; con ciò le due ultime precedenti relazioni divengono :

$$\sigma'_z = 6\sigma_{zm} \frac{d_1}{h} \quad ; \quad \sigma''_z = -6\sigma_{zm} \frac{d_2}{h},$$

le quali si possono pure scrivere :

$$\sigma'_z = 2\sigma_{zm} \frac{d_1}{h:3} \quad ; \quad \sigma''_z = -2\sigma_{zm} \frac{d_2}{h:3}. \quad (238)$$

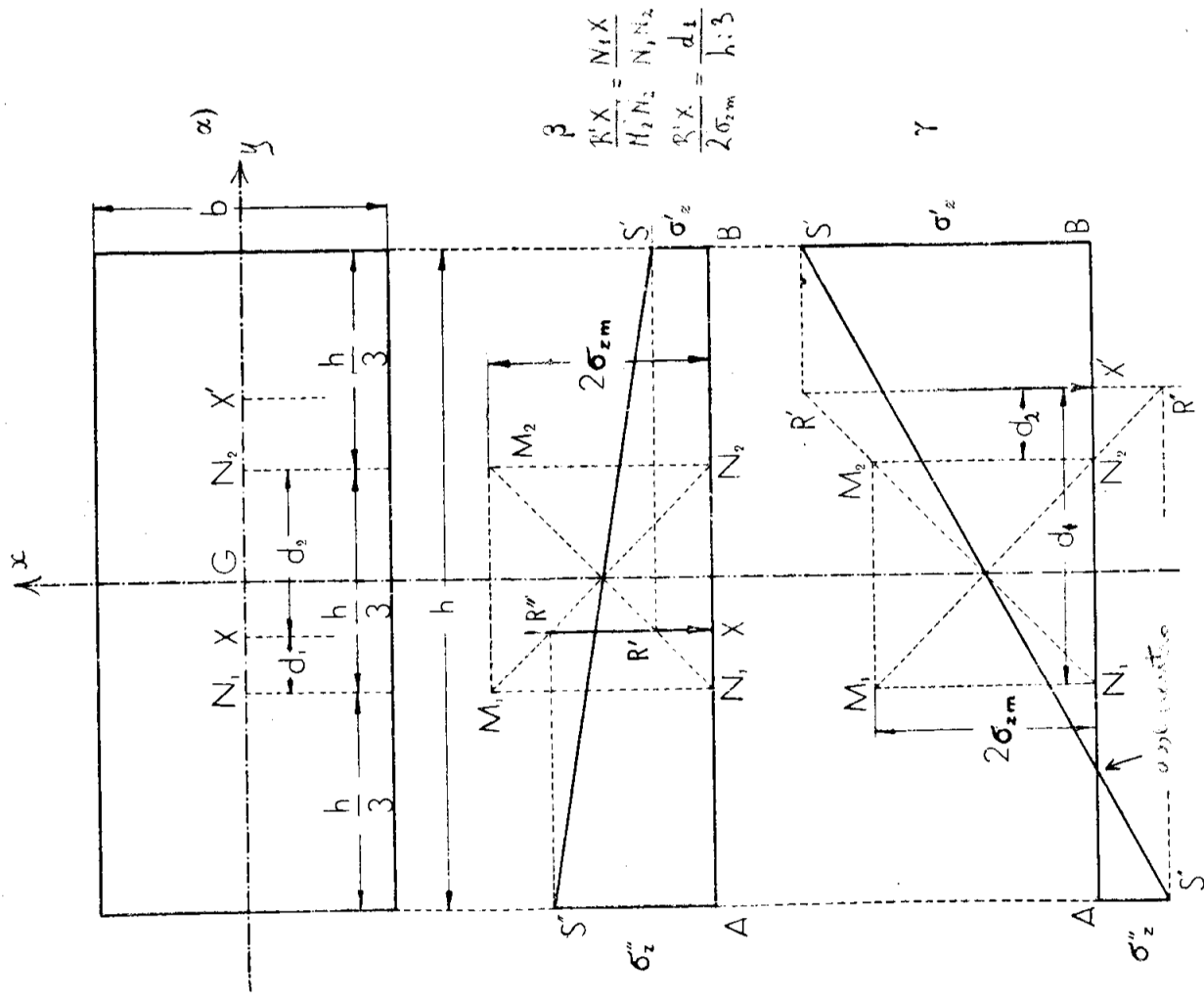


Fig. 10.



Queste relazioni ci indicano come  $\sigma'_z$  e  $\sigma''_z$  si possano ricavare graficamente secondo il teorema di Talete, colla costruzione indicata in fig. 10 per due casi corrispondenti a centri di sollecitazione  $X$  ed  $X'$  rispettivamente interno ed esterno al segmento compreso tra i punti di nòcciolo; (ricordando dalla statica grafica che tale segmento costituisce il *terzo medio* della mediana asse di sollecitazione).

Nella fig. 10, in  $\alpha$ ) è rappresentata la sezione rettangolare mentre in  $\beta$ ) e  $\gamma$ ) col segmento  $AB$  è rappresentata la traccia della sezione stessa vista di profilo nella direzione del lato  $b$ ; tale segmento è assunto come asse di riferimento per il diagramma delle tensioni.

Per comodità di espressione supponiamo orizzontale la sezione e quindi verticale l'asse  $z$  e la direzione dello sforzo normale  $N_z$ .

Ciò posto, la costruzione per trovare le  $\sigma'_z$  e  $\sigma''_z$  conforme alle (238) si eseguisce in  $\beta$ ) e  $\gamma$ ), come segue:

sulle verticali per  $N_1$  ed  $N_2$  si portano i segmenti  $N_1 M_1$  ed  $N_2 M_2$  uguali entrambi a  $2\sigma_{zm} = 2 \frac{N_z}{bh}$ ; poi sulla verticale per  $X$ , (o

per  $X'$ ) (retta d'azione della  $N_z$ ), si proietta da  $N_1$  il punto  $M_2$  in  $R'$ , e da  $N_2$  il punto  $M_1$  in  $R''$ ; i segmenti  $XR'$  ed  $XR''$ , (ovvero  $X'R'$ , ed  $X''R''$ ), conforme alle (238), sono le tensioni  $\sigma'_z$  e  $\sigma''_z$ ; se esse si riportano sulle verticali per  $B$  ed  $A$  rispettivamente in  $BS'$  ed  $AS''$  si ha poi nella retta  $S'S''$  il diagramma delle tensioni.

In  $\gamma$ ), essendo  $X'$  esterno al nòcciolo, il diagramma stesso risulta intrecciato, poichè le due tensioni  $\sigma'_z$  e  $\sigma''_z$  sono di segno contrario, come già si sapeva.

Poichè la larghezza della sezione misurata parallelamente all'asse neutro è costante (uguale a  $b$ ), è evidente che la retta d'azione dello sforzo normale applicato in  $X$  deve contenere il baricentro del trapezio (intrecciato o no) diagramma della tensione.

Questa proprietà può essere utile per ricavare un'altra costruzione grafica del diagramma delle tensioni. Ci riferiamo alla fig. 11, ove si sono riprodotti in  $\beta'$ ) e  $\gamma'$ ) i trapezi-diagrammi costruiti già nella fig. 10, in  $\beta$ ) e  $\gamma$ ).

Ripetiamo che qui si ritengono verticali le basi di detti trapezi. Orbene, dalla statica grafica si ha che la verticale baricentrica del trapezio  $ABS'S''$  contiene il punto  $P$ , intersezione delle rette  $N_1S''$  ed  $N_2S'$ ; tale punto nel caso nostro, per quanto s'è detto, deve stare sulla verticale per  $X$ , (od  $X'$ ), retta d'azione del dato sforzo normale  $N_z$ .

Ora se sulla data verticale per  $X$ , (o  $X'$ ) noi scegliamo un punto qualunque  $P_1$ , e da questo proiettiamo i punti  $N_1$  e  $N_2$  rispettivamente sulle verticali per  $A$  e  $B$ , trovando così i punti  $S''_1$  ed  $S'_1$ ,

nel segmento congiungente questi due punti abbiamo un possibile diagramma di tensioni provocate da sforzo normale di diversa intensità, ma pure applicato in  $X$ , (od  $X'$ ), in quanto il trapezio  $ABS'_1S''_1$  ha la verticale baricentrica passante per  $X$ , (od  $X'$ ). Al variare di  $P_1$  sulla verticale per  $X$  od  $X'$ , tutte le rette come  $S'_1S''_1$ , incontrano la fondamentale  $AB$  in uno stesso punto  $F$ , che sta sull'asse neutro (effettivo o virtuale): perciò, se è data  $\sigma_{zm}$ , essa si porta verticalmente in  $GL$  a partire dal punto  $G$  medio di  $AB$ ; e trovato il punto  $F$  mediante la retta  $S'_1S''_1$ , unendo  $F$  con  $L$  si trova la retta  $S'S''$ , che costituisce il diagramma cercato.

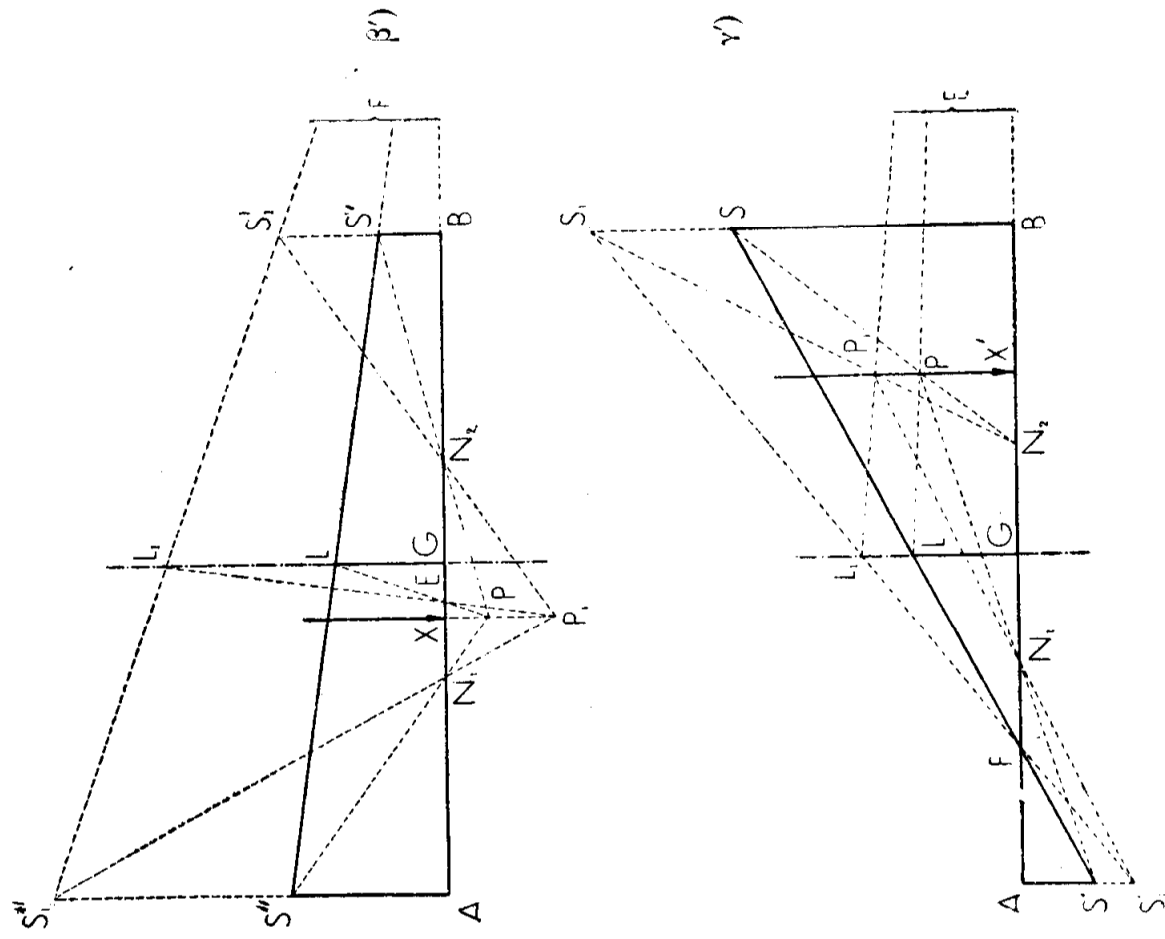


Fig. 11.

Per il caso in cui il punto  $F$  risulti fuori dei limiti del disegno [fig. 11,  $\beta'$ ], può esser utile osservare quanto segue: sia  $L_1$  il punto medio del segmento  $S'_1S''_1$ ; per le costruzioni fatte i punti  $S'S'_1$ ,  $PP_1$ ,  $LL_1$ ,  $S''S''_1$  si corrispondono due a due in un'omologia affine ortogonale avente per asse la fondamentale  $AB$ ; perciò su questo stesso asse si devono incontrare tutte le coppie di rette corrispondenti, in particolare le rette  $PL$  e  $P_1L_1$ ; perciò il loro punto comune  $E$  si può determinare come intersezione di  $AB$  colla retta  $P_1L_1$ ; in conseguenza, se è data  $\sigma_{zm}$ , e perciò noto  $L$ , si deduce senz'altro il punto  $P$ , e quindi la retta  $S''S''_1$ , diagramma delle tensioni.

E superfluo osservare che quando il centro di sollecitazione coincide con uno dei due punti di nòcciolo, allora il diagramma delle tensioni si riduce ad un triangolo, con ordinata nulla all'estremità più lontana dal punto di nòcciolo caricato; la tensione massima poi in questo caso, per ragioni ovvie risulta *doppia* della tensione media  $\sigma_{zm}$ .

#### X SEZIONE DI UN SOLIDO PRISMATICO CAPACE DI RESISTERE SOLTANTO A COMPRESIONE.

Nella pratica, quando occorra calcolare la stabilità di un muro o di un pilastro in muratura sollecitato a compressione normale eccentrica, si usa non far assegnamento sulla resistenza a trazione della muratura, e ritenere che questa sia atta a resistere solo a sforzi interni di compressione.

Ciò si fa per prudenza, sia perchè la resistenza a trazione delle malte è sempre molto piccola, sia perchè pure è possibile che negli strati di malta messa in opera, esista qualche screpolatura — dovuta a cause varie, — la quale ne annulli la capacità di assorbire sforzi di tensione (senza influire invece sulla resistenza a compressione).

Questo stato di cose non influisce evidentemente sul regime statico del prisma che si considera, finchè il centro di sollecitazione (a compressione normale eccentrica) è nell'interno o sul contorno del nòcciolo della sezione; perciò in tal caso i calcoli statici si fanno ancora nei modi esposti più sopra in generale.

Se invece il centro di sollecitazione risulta esterno al nòcciolo della sezione *completa*, occorre — prescindendo dalla capacità di resistere a trazione — determinare un asse che separi la sezione in due parti, delle quali una risulti reagente a compressione, e l'altra inerte; tale asse deve comportarsi come asse neutro, e perciò deve essere antipolare del centro di sollecitazione  $X$  rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della zona reagente; poichè tale asse fa evidentemente

parte, - con un suo segmento, — del contorno della sezione, il centro di sollecitazione  $X$  sta sul contorno del nòcciolo della zona reagente.

Caso assai caratteristico e comunissimo nelle applicazioni è quello della sezione rettangolare, col centro di sollecitazione giacente su una delle mediane, ma, beninteso, fuori del terzo medio.

Per ragioni di simmetria l'asse cercato di separazione tra la zona reagente e quella inerte deve essere normale alla mediana che è asse di sollecitazione; di modo che la zona reagente risulta pure rettangolare. E poichè il centro  $X$  deve essere un punto di nòcciolo per questa zona rettangolare, l'altezza  $h'$  di essa risulta determinata secondo la fig. 12, uguale al triplo della distanza  $u = AX$  del centro  $X$  dal più vicino estremo della mediana  $AB$ , asse di sollecitazione.

Il diagramma delle tensioni in questo caso è un triangolo (v. fig. 12),

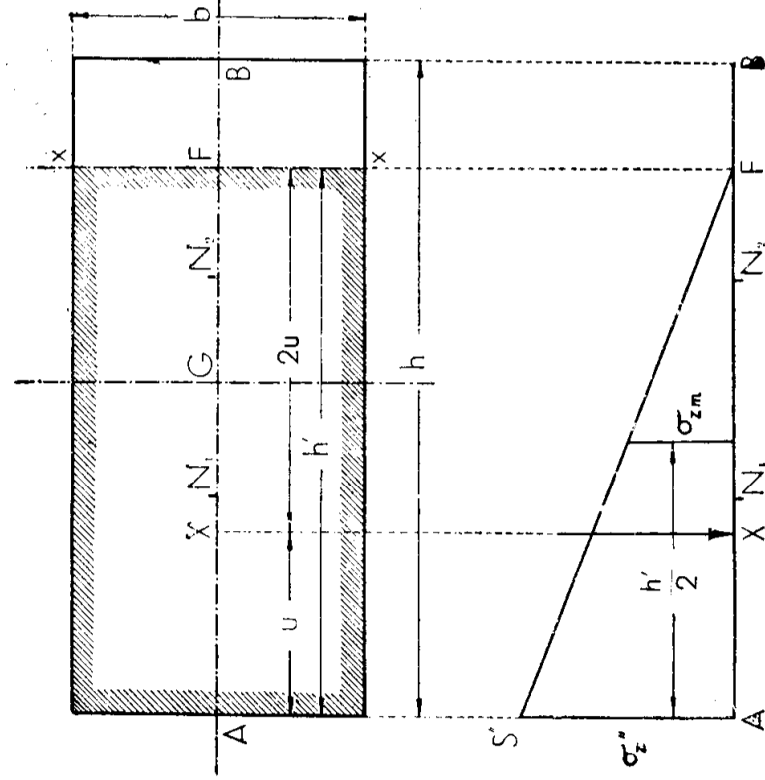


Fig. 12

con ordinata nulla sull'asse neutro limitante la zona compressa; il baricentro del triangolo sta sulla verticale per  $X$ , retta d'azione dello sforzo normale  $N_z$ ; l'ordinata massima è qui  $\sigma''_z$ , uguale al doppio di quella media  $\sigma_{zm}$ , la quale evidentemente si calcola come segue:

$$\sigma_{zm} = \frac{N_z}{bh} = \frac{N_z}{3bu} \quad (239)$$

Per una sezione diversa dalla rettangolare, la determinazione dell'asse  $x$  di separazione e neutro, corrispondente ad un dato centro di sollecitazione  $X$  è sempre basata sul fatto seguente: *la distanza tra il centro  $X$  e l'asse  $x$ , sua antipolare rispetto all'ellisse di inerzia della zona reagente, deve essere uguale al rapporto tra il momento d'inerzia ed il momento statico della zona reagente stessa rispetto all'asse  $x$  medesimo*; ciò è ben noto dalla statica grafica.

La ricerca è particolarmente facile quando la sezione ammette un asse  $s$  di simmetria ortogonale od obliqua, mentre poi il centro di sollecitazione  $X$  giace sullo stesso asse.

Allora tale asse, che evidentemente contiene il baricentro della sezione, è asse di sollecitazione; inoltre l'asse neutro e di separazione  $x$  cercato dovrà risultare parallelo alle corde del contorno, bisecate dall'asse  $s$ ; infatti la direzione comune di queste corde (direzione di simmetria) è coniugata di  $s$  rispetto all'ellisse di inerzia, sì di tutta la sezione, come di qualunque zona di questa, compresa tra il contorno ed un asse di separazione qualsiasi parallelo alla detta direzione.

Colle norme ben note nella Statica grafica, si divide la sezione in istrisce elementari, con corde parallele alla già nota direzione di simmetria  $x$ , (v. fig. 13); ai baricentri delle strisce si applicano, agenti nella detta direzione, forze proporzionali alle loro aree, (la retta punteggiata di queste forze nella fig. 13 è segnata in  $QQ'$ ), disponendole nell'ordine in cui successivamente s'incontrano partendo da quella striscia di estremità, che, rispetto al baricentro  $G$  di tutta la sezione, risulta dalla stessa parte di  $X$ : (nella grandissima maggioranza dei casi concreti detta striscia di estremità è anche la più vicina ad  $X$ ); dette forze, nell'ordine indicato, si connettono con un poligono funicolare  $p$ , con distanza polare arbitraria  $a$  (polo  $P_1$ ), e sia  $AA'$  il primo lato di esso (che nella figura si assume normale alla direzione delle forze). Su questa retta  $AA'$  si proietta nella direzione  $x$  delle forze il centro  $X$  in  $X'$ ; per il punto  $X'$  si traccia la retta  $X'B$  di compenso rispetto al detto poligono  $p$ , in modo cioè che l'area intrecciata compresa tra i segmenti  $AX'$ ,  $X'B$ , ed il tratto  $AB$  del poligono  $p$  risulti nulla; tale retta di compenso si può costruire per tentativi, o colle note operazioni di calcolo grafico, od anche nel modo che verrà esposto poco più oltre.

Allora la retta  $BC$ , parallela alla direzione  $x$  delle forze, è lo stesso asse  $x$  cercato, di separazione tra la zona reagente e la zona inerte. Infatti, per la suddetta proprietà della retta  $X'B$ , l'area mistilinea  $ApBCA$  (racchiusa tra il poligono funicolare  $p$ , il suo primo lato e la retta  $BC$ ) risulta uguale all'area triangolare  $X'BC$  (v. fig. 13).

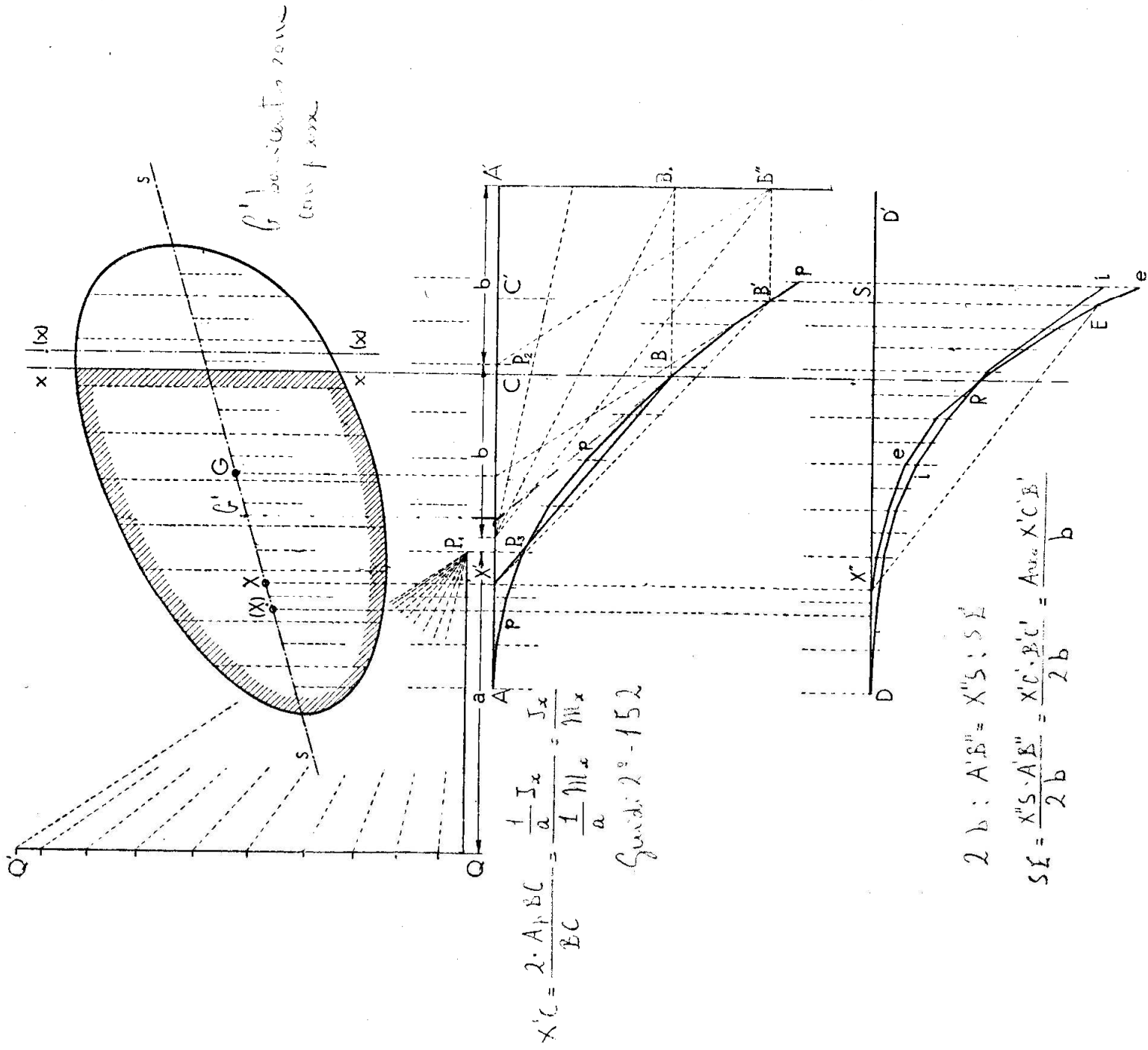


Fig. 18.

Orbene, per un teorema dovuto al Mohr, e noto nella Statica grafica, la suddetta area  $ApBCA$  moltiplicata per  $2a$ , fornisce il momento d'inerzia rispetto all'asse  $BC$  dell'area compresa tra il contorno della sezione e la retta  $BC$  stessa, dalla parte di  $X$ , (area tratteggiata nella fig. 13); d'altra parte, per una notissima proprietà dei poligoni funicolari, il segmento  $BC$  moltiplicato per  $a$  ci dà il momento statico della stessa area tratteggiata rispetto allo stesso asse  $BC$ ; quindi, per la riconoscita uguaglianza delle aree  $ApBCA$  ed  $X'BC$ , risulta che l'altezza di questo triangolo relativa alla base  $BC$ , — distanza tra il centro  $X$  e l'asse  $x$  — è uguale al rapporto tra il momento di inerzia ed il momento statico della detta area tratteggiata, rispetto all'asse  $x \equiv BC$ ; ciò dimostra, per quanto s'è detto poco sopra, che la retta  $x$  è l'asse di separazione cercato, e la sopra descritta area tratteggiata, — compresa tra l'asse  $x$  ed il contorno della sezione, dalla parte di  $X$ , — è la zona reagente a compressione.

Vediamo ora, secondo quanto s'è preannunciato poco sopra, come si possa determinare esattamente la retta  $X'B$  di compenso per il poligono funicolare  $p$ : (v. ancora fig. 13).

Di questo stesso poligono, riferito al suo primo lato  $AA'$  come fondamentale (con ordinate parallele alla direzione  $x$ ), si tracci, con una distanza polare  $b$  (polo  $P_2$  sulla  $AA'$ ) la linea integrale  $i$ , riferita ad una fondamentale arbitraria  $DD'$ , procedendo da  $A$  verso  $A'$  e con costante iniziale nulla in  $D$ . Consideriamo ora, del poligono funicolare  $p$  un'ordinata generica  $C''B'$ ; sulla stessa ordinata indefinita a partire dalla fondamentale  $DD'$ , e dalla stessa parte di  $i$ , portiamo un segmento  $SE$  che misuri, ridotta in base  $b$ , l'area del triangolo  $X'B'C'$ . Il punto  $E$  si trova facilmente come segue: nella direzione  $x$  si proietti  $X$  sulla  $DD'$  in  $X''$ ; poi sulla punteggiata delle ordinate di  $p$ , tracciata per fare l'integrazione grafica, si consideri il segmento  $A'B'' = C''B'$ , ed il punto  $B''$  si proietti dal polo  $P_3$  situato sulla  $AA'$  a distanza (polare) da  $A'$  uguale a  $2b$ , dalla stessa parte di  $P_2$ ; quindi da  $X''$  si conduca una parallela al raggio proiettante  $P_3B''$ ; essa taglia l'ordinata indefinita  $C''B'S$  nel punto  $E$  che si cerca. Facendo poi variare la detta ordinata generica  $C''B'$ , il punto  $E$  varia seguendo una linea (o luogo)  $e$ , la quale si può tracciare per punti. Questa linea  $e$  taglia la sopraddetta linea integrale  $i$  in un punto  $R$ , per il quale passa certo l'asse  $x$ ; è infatti ovvio che nel poligono  $p$  l'ordinata  $CB$  corrispondente ad  $R$  deve soddisfare all'uguaglianza delle ordinate delle due linee  $i$  ed  $e$ , e quindi all'uguaglianza tra le aree  $ApBCA$  ed  $X'BC$  già citata più sopra come condizione risolvente del nostro problema.

Per verifica, riportata l'ordinata  $CB$  in  $A'B_1$  (v. fig. 13), e proiettato il punto  $B_1$  da  $P_3$ , deve risultare la  $B_1P_3$  parallela alla  $X''R$ .

Se dell'asse  $x$  sopra trovato consideriamo il centro relativo ( $X$ ) rispetto a tutta la sezione completa, avremo che tale punto ( $X$ ) deve stare sull'asse  $s$  in virtù della simmetria; inoltre ( $X$ ) deve essere dall'asse  $x$  più lontano che non il centro  $X$  (v. fig. 13); infatti rispetto all'asse  $x$  il momento d'inerzia di tutta la sezione risulta maggiore di quello della sola zona reagente, mentre il momento statico rispettivamente risulta minore; perciò la distanza tra ( $X$ ) ed  $x$ , rapporto tra i detti momenti d'inerzia e statico di tutta la sezione, è maggiore dell'analogo per la zona reagente, ossia della distanza tra  $X$  ed  $x$ .

Orbene, per le proprietà della polarità d'inerzia (polarità unforme, con involuzioni ellittiche, concordi), ben note dalla statica grafica, si sa che se un punto si sposta su un diametro  $s$  dell'ellisse d'inerzia, in senso tale da avvicinarsi al baricentro  $G$ , allora il corrispondente asse relativo si sposta parallelamente a se stesso in senso da allontanarsi dal baricentro medesimo (da parte opposta).

Se ne deduce (v. sempre fig. 13) che l'asse neutro ( $x$ ) corrispondente al centro  $X$  nell'ipotesi della sezione reagente anche a trazione è da  $X$  stesso più lontano che non l'asse  $x$  di limitazione della zona reagente a compressione, nell'ipotesi che manchi la resistenza a trazione.

Allo stesso risultato si può pure pervenire considerando per  $X$  un asse  $x_1$  parallelo ad  $x$  e ricercando di esso il centro relativo  $X_1$ , rispetto a tutta la sezione; com'è ben noto  $X_1$  deve stare su ( $x$ ); esso si trova come baricentro dei centri relativi di  $x_1$  rispetto all'area reagente tratteggiata e rispetto all'area residua; di questi punti il primo sta sull'asse  $x$ , il secondo è certamente interno all'area residua: i momenti statici rispetto ad  $x_1$  delle aree rispettive, da concentrare nei detti centri, sono certo dello stesso segno; se ne deduce immediatamente il risultato sopra enunciato.

Questa proprietà è caso particolare di un'altra più generale che vedremo tra poco.

Quando il centro di sollecitazione  $X$  non giace sopra un qualche asse di simmetria della sezione, allora la ricerca dell'asse  $x$  limite della zona reagente a compressione è meno semplice di quella sopra esposta, ma si può pure facilmente eseguire per tentativi o con metodo di falsa posizione.

Riferiamoci alla fig. 14, nella quale la detta ricerca fu fatta per una sezione rettangolare, col centro di sollecitazione  $X$  situato in posizione generica, *non* giacente su alcuna delle due mediane del rettangolo. Il procedimento che ora indichiamo è però affatto generale.

fig. 14  
 centro di sollecitazione  
 X  
 centro di massa  
 G  
 centro di massa  
 G



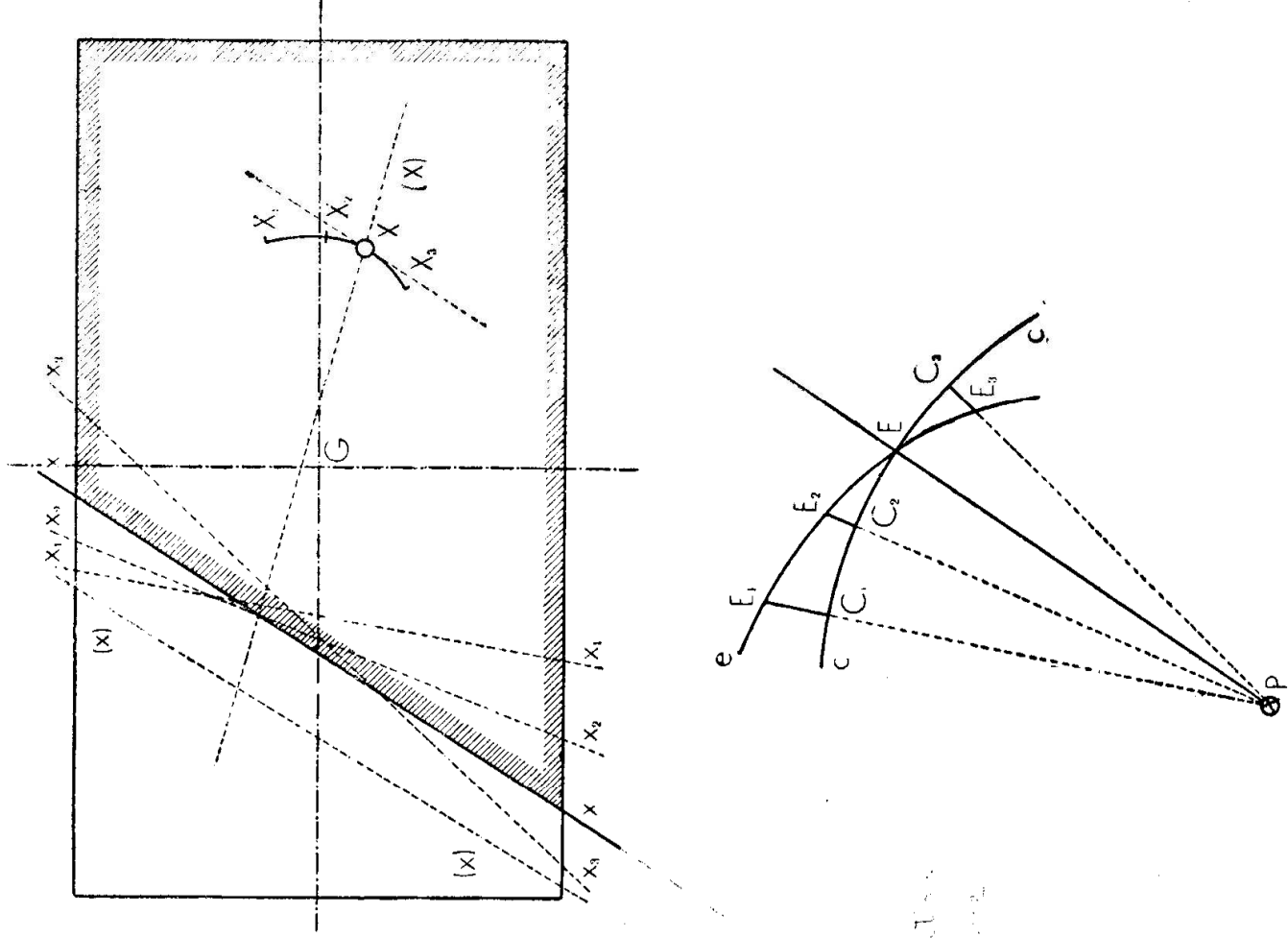


Fig. 14.

In questo caso non è nota *a priori*, — com'era poco sopra — la direzione dell'asse  $x$  cercato, e perciò bisogna procedere per tentativi. Si scelga ad arbitrio una direzione  $x_1$ , ed in relazione ad essa ed al dato centro  $X$  applichiamo il procedimento ora esposto per il caso della sezione sollecitata su un suo asse di simmetria: determiniamo così l'asse  $x_1$  soddisfacente alle condizioni geometriche là

specificate; in virtù di queste, l'asse  $x_1$  gode della proprietà seguente: il suo centro  $X_1$  relativo rispetto alla zona di sezione da esso limitata e contenente il centro dato  $X$  è situato col medesimo punto  $X$  su una stessa parallela all'asse  $x_1$ . Determiniamo allora, coi noti mezzi della statica grafica, il centro  $X_1$  ora definito, e si potrà verificare la proprietà ora detta, a riprova dell'esattezza delle costruzioni eseguite. Tali costruzioni non furono riprodotte nella fig. 14, ove si segnarono solo i risultati, a scopo dimostrativo. Se il punto  $X_1$  coincidesse col centro  $X$ , allora l'asse  $x_1$  sarebbe quello cercato; in generale ciò non si verifica; e quindi si ripetono altri tentativi con direzioni diverse  $x_2, x_3, \dots$  determinando i corrispondenti assi  $x_2, x_3, \dots$  soddisfacenti alle dette condizioni geometriche, ed i centri relativi  $X_2, X_3, \dots$  rispetto alle corrispondenti zone limitate, come si disse sopra. I punti  $X_1, X_2, X_3, \dots$  stanno su una linea continua  $l$ , luogo del punto generico  $X_i$ ; tale linea si può tracciare per punti; essa contiene certamente anche il centro dato  $X$ ; anzi, per ragioni ovvie, la tangente in  $X$  alla linea  $l$  deve risultare parallela all'asse  $x$  che soddisfa al nostro problema. Ora, poichè è noto che la direzione della tangente in un suo punto ad una linea segnata graficamente, è determinabile direttamente con scarsa esattezza, conviene ricorrere al tracciamento di una curva d'errore, con procedimento sostanzialmente analogo a quello usato nella geometria, appunto per trovare la tangente ad una curva in un dato suo punto.

Con centro in un punto arbitrario  $P$  (v. fig. 14), si descriva un cerchio  $c$  di raggio pure arbitrario, purchè non troppo piccolo; a partire da questo cerchio, sui raggi rispettivamente paralleli alle sopra dette direzioni  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , si portino i segmenti  $C_1E_1, C_2E_2, C_3E_3, \dots$  uguali in grandezza e segno rispettivamente ai segmenti  $XX_1, XX_2, XX_3, \dots$ ; i punti  $E_1, E_2, E_3, \dots$  determinano una linea  $e$ , (luogo del punto generico  $E_i$ ), che è la *curva di errore* del problema; essa taglia il cerchio  $c$  in un punto  $E$ : il raggio  $PE$  ha la direzione dell'asse  $x$  cercato.

Questo asse si trova poi applicando al centro  $X$  ed alla direzione  $PE$  il procedimento sopra descritto ed impiegato per trovare gli assi  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ; determinato così l'asse  $x$ , si verificherà che il suo centro relativo rispetto alla zona da esso limitata nel modo già detto coincide collo stesso centro  $X$  dato.

Analogamente a quanto si vide nel caso della fig. 13, resta pure qui in generale dimostrato che il centro ( $X$ ) relativo di  $x$  rispetto a tutta la sezione, è da  $x$  più lontano di  $X$ ; ora se ( $x$ ) è l'asse relativo di  $X$  rispetto a tutta la sezione (asse neutro nel caso in cui non manchi la resistenza a trazione), per le note e citate proprietà del-



assicurare la perfetta centratura dello sforzo di trazione o compressione esercitato con una macchina di prova sopra un saggio cilindrico o prismatico.

Orbene, per quanto s'è detto or ora, anche se tale condizione di centratura non è soddisfatta, la dilatazione  $\epsilon_2$  dovuta allo sforzo normale centrato si può sempre ricavare come la media aritmetica delle dilatazioni misurate sperimentalmente (mediante gli estensimetri, o gli apparecchi a specchi) in corrispondenza di due generatrici del cilindro o prisma simmetriche rispetto all'asse geometrico di questo. In tal modo si procede sempre nelle determinazioni sperimentali sopra citate.

Ricerchiamo ora la variazione di volume  $\Delta V$  del cilindro o prisma soggetto a sforzo normale eccentrico. Possiamo partire dalla (156), mediante le (154) e (231), e fare il calcolo in modo analogo a quello che in fine del n.º 51 ci ha condotti alla (210); ovvero possiamo tener presente la (210) stessa, ed applicare il principio di sovrapposizione degli effetti: in ambo i modi si trova che il  $\Delta V$  è quello stesso che si avrebbe per un uguale sforzo normale  $N_2$  centrato, ossia è espresso da:  $\sqrt{(A \Delta V, 2) (3)}$

$$\Delta V = A \Delta V = \left(1 - \frac{\Delta}{m}\right) \frac{N_2 l}{E} \quad (240)$$

$$\Delta N_2 = \int_V \theta \Delta N = \int_V \left(1 - \frac{\Delta}{m}\right) \frac{N_2}{E} dV$$

il lavoro di deformazione.

Secondo la (165) e la (154) abbiamo:

$$\Phi = \frac{E}{2} \epsilon_1^2 + \frac{E}{2} \left( \frac{\Delta}{m} \epsilon_2 \right)^2 \quad \Phi = \frac{N_2^2 l}{2E} \quad (241)$$

e per la (231):

$$\Phi = \frac{1}{2E} \left( \frac{N_2}{A} + \frac{M_J}{I_{pns}} y_s \right)^2 = \frac{1}{2E} \left( \frac{N_2^2}{A^2} + \frac{M_J^2}{I_{pns}^2} y_s^2 + \frac{2N_2 M_J}{A I_{pns}} y_s \right) \quad (242)$$

Il lavoro di deformazione per tutto il cilindro o prisma si calcola nel modo solito secondo la (92):

$$L = \int_V \Phi dV = l \int_A \Phi dA$$

Eseguita l'integrazione del valore dato dalla (242), si trova ov-

viamente :

$$L = \frac{N_e^2 l}{2EA} + \frac{M_f^2 l}{2EI_{os}} \quad (243)$$

A questa espressione si può pure pervenire tenendo presenti le (195) e (212), considerando il caso qui studiato come caso di sollecitazione composta di sforzo normale centrato e di flessione semplice, e poi applicando la sovrapposizione degli effetti: occorre però osservare che qui il lavoro di deformazione complessivo risulta semplicemente dalla somma dei lavori di deformazione dovuti alle sollecitazioni semplici componenti, perchè le caratteristiche (per ora due sole) del sistema di forze esterne sono state scelte, (in relazione colla forma del solido elastico sollecitato), in modo tale che ciascuna caratteristica non compie lavoro per effetto della deformazione provocata dall'altra; se questa condizione non fosse soddisfatta, alla predetta somma si dovrebbe aggiungere un termine proporzionale al prodotto delle due caratteristiche (termine rettangolare).

Avremo occasione di verificare che tale proprietà (dei termini rettangolari nulli) vale in generale per le sollecitazioni composte, in virtù della scelta delle caratteristiche delle forze esterne fatta al n.º 49 secondo le (183) e (186).

Per quanto riguarda le quadriche di deformazione, delle tensioni, i coni delle dilatazioni nulle, e degli scorrimenti, ecc., e le linee isostatiche (ossia per ciò che concerne la distribuzione delle tensioni e la deformazione nell'intorno di un punto generico), poichè pure qui l'unica componente speciale di tensione diversa da zero è la  $\sigma_z$ , non dobbiamo che ripetere ciò che si disse in fine del N.º 50, a pag. 219.

È poi superfluo rilevare che il caso di sollecitazione a sforzo normale eccentrico comprende come specializzazioni i due casi di sollecitazione semplice prima studiati nei N.º 50 e 51; lo sforzo normale centrato (per  $M_f=0$ ) e la flessione semplice (per  $N_e=0$ ).

53. TORSIONE SEMPLICE. (Terzo caso particolare).

Supponiamo ora di nuovo, come già precedentemente, che l'origine  $O$  degli assi sia il baricentro della sezione di base  $z=0$  del nostro cilindro.

Come già negli altri casi, indichiamo ora con  $c$  una costante pic-

The diagram shows a cylinder of length  $l$  along the  $z$ -axis. The origin  $O$  is at the center of the base. The  $x$  and  $y$  axes are in the plane of the base. The  $z$ -axis is along the length of the cylinder. The diagram is annotated with the following equations:

- $\tau_{\theta} = \theta \gamma_{\theta} = G c z$
- $\theta = \frac{M_z}{GI_p}$
- $M_z = 2G \pi c^2 \int_0^l z^2 dz = G c^2 \pi \frac{l^3}{3}$
- $M_z = \frac{1}{2} G I_p \theta = \frac{1}{2} G I_p \frac{M_z}{GI_p}$