

Equazioni di Betti e di Galle p. 76 e 141.

CAPITOLO VII.

SOLUZIONI PARTICOLARI DEL PROBLEMA  
DI SAINT-VENANT

SOLLECITAZIONI SEMPLICI

50. ESTENSIONE SEMPLICE. — (PRIMO CASO PARTICOLARE).

Consideriamo lo spostamento, definito in tutto il volume del nostro cilindro, ed in superficie, dalle tre seguenti componenti:

$$\boxed{u = -\frac{c}{m}x \quad v = -\frac{c}{m}y \quad w = cz,} \quad (187)$$

essendo  $c$  una costante piccolissima positiva o negativa.

È molto facile verificare che tali  $u, v, w$  soddisfano identicamente le (159) ÷ (163) in tutti i punti interni al cilindro, la terza delle (149) — tenute presenti le (148), — sulla superficie laterale, e le (164) nell'origine.

La deformazione rappresentata dalle (187) rientra quindi nella classe di quelle che soddisfano alle condizioni fondamentali del problema di Saint-Venant; perciò il corrispondente stato di tensione è in ogni punto definito dalla (154) e dalle due ultime delle (148), le quali in questo caso divengono:

$$\sigma_z = Ec; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = 0 \quad (188)$$

$\gamma_{xy} = 6\gamma_{yz} = 6\gamma_{zx}$

questi valori sono indipendenti dalle coordinate del punto che si considera: valgono perciò pure per i punti della base libera  $z=l$ . Per l'equilibrio, i singoli elementi  $dA$  di area della base libera devono essere soggetti a sole forze normali di intensità:

$$\underline{\sigma_z dA = Ec dA},$$

delle quali la risultante sarà in intensità:

$$\underline{N = EcA} \quad (189)$$

e dovrà essere normale e baricentrica rispetto a detta base: perciò essa dovrà avere per retta d'azione lo stesso asse delle  $z$ .

Nel problema pratico  $N$  è il dato; allora si può dalla (189) calcolare il valore della costante  $c$ :

$$c = \frac{N}{EA} \tag{190}$$

e quindi le componenti di spostamento date dalle (187), divengono:

$$u = -\frac{1}{m} \frac{N}{EA} x; \quad v = -\frac{1}{m} \frac{N}{EA} y; \quad w = \frac{N}{EA} z. \tag{191}$$

Il dato cilindro retto si trasforma in un altro cilindro ancora retto, le sezioni piane del primo si trasformano nelle sezioni piane del secondo: in particolare le sezioni rette si trasformano omoteticamente, ed inoltre si spostano lungo l'asse del cilindro di una quantità proporzionale alla loro rispettiva distanza dalla base vincolata  $z=0$ .

La  $w$  ha lo stesso segno di  $N$ ; e se  $m > 0$ , le  $u$  e  $v$  hanno segno contrario a quello di  $N$ ; ciò vuol dire che se il cilindro è sollecitato a trazione esso si allunga longitudinalmente, e si contrae trasversalmente: l'opposto succede se il cilindro è sollecitato a compressione.

Per quanto riguarda lo stato di tensione già sappiamo che tutte le sezioni rette sono sollecitate dal solo sforzo normale  $N$ , che si mantiene costante per tutte le sezioni rette; inoltre l'unica componente speciale di tensione diversa da zero è la:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \tag{192}$$

la quale è costante in tutti i punti del corpo.

Facendo  $z=l$  nella terza delle (191) si ottiene la variazione di lunghezza del cilindro:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \tag{193}$$

che risulta direttamente proporzionale allo sforzo normale esterno, ed alla lunghezza primitiva del cilindro, ed inversamente proporzionale all'area della sezione retta ed al modulo di elasticità normale del materiale.

Anzi dalla (193) si ricava:

$$E = \frac{N}{A} \frac{l}{\Delta l}, \quad (194)$$

e questa formula si presta *alla determinazione sperimentale del modulo di elasticità normale E*.

Per questo occorre misurare simultaneamente, su una provetta sperimentata a trazione od a compressione, lo sforzo normale  $N$  e l'allungamento (positivo o negativo)  $\Delta l$ .

La prima misura è sempre consentita dalla stessa macchina di prova, colla quale si esercita lo sforzo; la seconda si può fare con apparecchi o strumenti molto sensibili (estensimetri, apparecchi a specchi), alcuni dei quali consentono un'approssimazione molto grande, permettendo di apprezzare pure  $\frac{1}{5000}$  di millimetro.

Di tali apparecchi e metodi di misura si darà esplicita notizia in altra parte di questo libro, dedicata allo studio delle proprietà dei materiali da costruzione, ed anche dei mezzi e procedimenti sperimentali relativi.

Qui dobbiamo limitarci ad un cenno sommario; vogliamo però ancora accennare come, dopo determinato sperimentalmente il modulo di elasticità normale  $E$ , la misura delle contrazioni o dilatazioni trasversali del cilindro, rappresentate dalle prime due delle (91), ci può condurre alla determinazione sperimentale del coefficiente di Poisson  $\frac{1}{m}$ . Tale misura si presenta però molto più delicata di quella

di  $\Delta l$ , poichè richiede l'apprezzamento di spostamenti molto più piccoli: a titolo di notizia citiamo i metodi, pure in uso nella Fisica, per misurare spostamenti estremamente piccoli, dell'ordine del centomillesimo di millimetro, metodi, basati sullo spostamento delle frangie d'interferenza di due raggi luminosi opportunamente disposti.

Per chi volesse approfondire l'argomento rimandiamo ai trattati speciali di ottica, citando particolarmente i lavori di Stromeyer, di Cavendish, e di Shakespear; riservandoci, come già si disse, di dare a suo tempo e luogo, l'esplicita descrizione di tali metodi.

Notiamo inoltre come la determinazione del coefficiente di Poisson  $\frac{1}{m}$  si possa fare misurando simultaneamente per la sollecitazione qui descritta, la dilatazione lineare  $\epsilon_z$  e la dilatazione cubica  $\Theta$ , e poi applicando la nota relazione (156). Anche per questo caso le modalità sperimentali verranno esposte in altra parte.

Infine osserviamo che il coefficiente di Poisson si può ricavare indirettamente, in virtù della (62) (pag. 77, N.º 25) quando si sia misurato il *modulo di elasticità normale*  $E$ , (v. n.º 25, pag. 75), ed anche il *modulo di elasticità tangenziale o trasversale*  $G = \mu$  (o 2.<sup>a</sup> costante di Lamé); la determinazione sperimentale di quest'ultimo sarà esposta tra breve, in relazione con un altro caso particolare del nostro problema.

Calcoliamo ora per la sollecitazione qui studiata — *sforzo normale baricentrico* — il potenziale elastico, ed il lavoro di deformazione.

Secondo le (165), poichè qui  $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ , si ha:

$$\Phi = \frac{E}{2} \varepsilon_z^2$$

ed essendo, secondo la 3.<sup>a</sup> delle (191):  $\varepsilon_z = \frac{N_z}{EA}$ , si ha, sostituendo:

$$\Phi = \frac{N_z^2}{2EA^2} \cdot$$

Il potenziale elastico è quindi costante in tutto il cilindro: perciò il lavoro di deformazione di questo si ottiene moltiplicando detto valore costante del potenziale elastico, per il volume  $Al$  di tutto il cilindro stesso, e quindi si ottiene:

$$\boxed{L = \frac{N_z^2 l}{2EA}} \qquad L = \frac{1}{2} \Delta l \cdot N \qquad (195)$$

Allo stesso valore si può pure giungere applicando il teorema di Clapeyron (n.º 36), e tenendo presente la (193).

Dobbiamo osservare che in questo caso la distribuzione delle tensioni interne si riduce ad una sola *dimensione* (v. n.º 19, pag. 60); in ogni punto esiste una sola tensione principale non nulla, la  $\sigma_z$ ; le linee isostatiche sono rette parallele all'asse  $z$ ; le quadriche delle tensioni e di direzione degenerano, poichè hanno un solo semiasse non nullo.

Le quadriche di dilatazione sono iperboloidi di rotazione intorno all'asse  $z$ , aventi i semiasse uguali normali a  $z$ , di lunghezza  $\sqrt{m}$  volte quella del semiasse disteso secondo l'asse  $z$ .

$$\Delta V = \int_0^l \left( 0 \cdot \sigma_x + \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{N_z}{E} + \Delta l \cdot z \right) \frac{N_z}{E} dz = \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{1}{E} \left( N_z \sigma_z + \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{N_z}{E} \right) \frac{N_z}{E} dz = \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{1}{E} \left( N_z \sigma_z + \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{N_z}{E} \right) \frac{N_z}{E} dz$$

*particolarmente*  
 $\Delta V = \int_0^l \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{1}{E} \left( N_z \sigma_z + \left( 1 - \frac{z}{m} \right) \frac{N_z}{E} \right) \frac{N_z}{E} dz$

## 51. FLESSIONE SEMPLICE. — (SECONDO CASO PARTICOLARE).

Studiamo ora un altro tipo di deformazione.

Con gli assi ortogonali  $x$  ed  $y$  in posizione generica sulla sezione vincolata, ed indicando ancora con  $c$  una nuova costante piccolissima, poniamo ora:

$$\left. \begin{aligned} u &= -c \frac{xy}{m} \\ v &= -\frac{c}{2} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) \\ w &= cyz \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

È facile verificare che con ciò sono soddisfatte le equazioni differenziali (159) ÷ (163) in tutto il volume del cilindro, le (164) nell'origine  $O$ , ed inoltre, essendo nulle pure le  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$ , come si può agevolmente constatare, è certo soddisfatta sulla superficie laterale la terza delle (149). Si ha poi:  $\epsilon_z = cy$ .  $\epsilon_x = \frac{cy}{z}$

Dalle (148) si deduce, per ciò che ora si è detto:

$$\tau_{yz} = 0 \quad ; \quad \tau_{zx} = 0 .$$

L'unica componente speciale di tensione diversa da zero risulta la  $\sigma_z$  data, secondo la (154), da:

$$\sigma_z = Ecy \quad (197)$$

la quale è indipendente da  $z$ , e perciò vale pure per  $z = l$ , ove per l'equilibrio deve coincidere coll'analogha, unica componente speciale di tensione della distribuzione di forze esterne applicate sulla base libera del cilindro.

L'asse  $x$ , sul quale non si hanno dilatazioni, nè tensioni, si dice asse neutro.

Calcoliamo ora le caratteristiche di questo sistema di forze, secondo le (183): si ottiene così:

$$N_z = Ec \int_A y dA \quad (198)$$

$$T_x = T_y = M_x = 0$$

$$M_x = Ec \int_A y^2 dA \tag{199}$$

$$M_y = - Ec \int_A xy dA \tag{200}$$

Vediamo ora le conseguenze di particolarità nella posizione degli assi  $x$  ed  $y$  sulla base vincolata.

Se l'asse  $x$  contiene il baricentro della detta base, è nullo il momento statico dell'area  $A$  rispetto allo stesso asse  $x$ , cioè si ha:

$$\int_A y dA = 0$$

e perciò, secondo la (198), è:  $N_z = 0$  è nullo lo sforzo normale. Questo caso di sollecitazione si chiama flessione semplice. Il piano della coppia risultante di  $M_x$  ed  $M_y$  si chiama piano di sollecitazione, ed è parallelo all'asse  $z$ .

Se poi l'asse  $x$  è uno degli assi principali d'inerzia della sezione  $A$  (v. statica grafica), è noto che:

$$\int_A xy dA = 0$$

e per la (200), si ha  $M_y = 0$ ; cioè deve essere nullo il momento delle forze esterne rispetto all'asse  $y$ . In tal caso la flessione si dice retta o diritta, e la sola caratteristica diversa da zero è  $M_x$ , ed il piano di sollecitazione è parallelo al piano  $yz$ .

Tornando ora a considerare una posizione generica degli assi  $x$  ed  $y$ , ed indicando con

$$I_0 = \int_A y^2 dA$$

il momento d'inerzia dell'area della sezione rispetto all'asse principale  $x$ , la (199) diviene:

$$M_x = Ec I_0 ;$$

dalla quale si può ricavare la costante  $c$  in funzione del momento flettente esterno  $M_x$ :

$$c = \frac{M_x}{EI_x} \quad \xi_z = \frac{\int x \cdot y}{E \cdot I_x} \quad (201) \quad \xi_z = \frac{M_x \cdot y}{E \cdot I_x}$$

Sostituendo questo valore nelle (196) si ottengono così, pure in funzione del momento flettente esterno  $M_x$ , le componenti dello spostamento in un punto generico del cilindro:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{M_x}{EI_x} \frac{xy}{m} \\ v &= -\frac{1}{2} \frac{M_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) \\ w &= \frac{M_x}{EI_x} yz \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Vediamo ora di analizzare e descrivere, nella sua generalità, la deformazione rappresentata dalla (202).

Se indichiamo  $x', y', z'$  le nuove coordinate di un punto generico avente prima della deformazione le coordinate  $x y z$ , avremo:

$$x' = x + u \quad y' = y + v \quad z' = z + w,$$

e quindi, per le (202)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - \frac{M_x}{EI_x} \cdot \frac{xy}{m} \\ y' &= y - \frac{1}{2} \frac{M_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) \\ z' &= z + \frac{M_x}{EI_x} yz \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Risulta subito che per  $z=0$  si ha pure  $z'=0$ , il che vuol dire che la base vincolata [colle condizioni espresse dalle (164)], si mantiene piana.

È facile verificare che lo stesso accade per tutte le sezioni rette, se le deformazioni si mantengono piccolissime, come s'è supposto.

Infatti se la costante  $c = \frac{M_x}{EI_x}$  è piccolissima, ed assimilabile ad

un infinitesimo del 1.<sup>o</sup> ordine, il suo quadrato si potrà assimilare ad un infinitesimo del 2.<sup>o</sup> ordine, e sarà perciò trascurabile in confronto della 1.<sup>a</sup> potenza.

Con questo criterio, se eliminiamo  $y$ , tra la seconda e la terza delle (203), otteniamo:

$$z' = z \left( 1 + \frac{M_x}{EI_x} y' \right)$$

relazione che per  $z =$  costante rappresenta la superficie trasformata appunto del piano  $z =$  costante ed è l'equazione di un piano parallelo all'asse  $x$ , ed avente al piano  $xy$  un'inclinazione:  $\frac{M_x}{EI_x} z$ .

Questo piano taglia il piano  $xy$  secondo la retta di equazione  $\rightarrow$

$$y' = - \frac{EI_x}{M_x} z \tag{204}$$

la quale retta non dipende dal particolare valore attribuito alla  $z$ , e quindi è sempre la stessa per qualunque sezione retta che si consideri.

Possiamo quindi concludere che nella deformazione a flessione semplice qui studiata, i piani delle sezioni rette, inizialmente paralleli tra loro ed alle due basi d'estremità, si trasformano nei piani di un fascio, avente per asse una retta del piano  $z = 0$ , parallela all'asse  $x$ , situata dalla parte delle  $y$  negative ad una distanza dall'asse  $x$  data da  $\frac{EI_x}{M_x}$ .

In particolare il piano della base vincolata resta fisso, mentre il piano della base libera  $z = l$  ruota di un angolo:

$$\vartheta = \frac{M_x l}{EI_x} \tag{205}$$

D'altra parte abbiamo visto che in questo caso mancano affatto le tensioni tangenziali, e quindi sono nulli gli scorrimenti  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$ ; perciò le rette inizialmente parallele all'asse  $z$ , traiettorie ortogonali alle sezioni rette nel cilindro non deformato, devono trasformarsi nelle traiettorie ortogonali ai piani del fascio or ora descritto, ossia nei cerchi aventi i loro centri sulla retta asse del fascio, e contenuti in piani normali alla retta stessa, e pertanto paralleli al piano  $yz$ ,

$$\frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{M_x}{EI_x}$$

$$\left\{ \begin{aligned} z' &= z \left( 1 + \frac{M_x}{EI_x} y' \right) \\ z' &= 0 \end{aligned} \right.$$

derivata  $1 + \frac{M_x}{EI_x} y'$   
 oltre che  $y' = - \frac{EI_x}{M_x} z$

l'angolo  $\vartheta$  è l'angolo di rotazione del piano della base libera rispetto al piano della base vincolata.  
 anche paralleli all'asse  $x$ .



il quale perciò si dice piano di flessione; l'asse  $y$  si dice pure asse di flessione.

Particolarmente interessante per le applicazioni è la linea trasformata dell'asse geometrico del cilindro, la quale comunemente si denomina linea elastica, (nel caso qui considerato essa è pure un cerchio).

Poichè dalla 3.<sup>a</sup> delle (202) si ha che per  $y=0$  è  $\epsilon_z=0$ , ne risulta che le rette parallele inizialmente all'asse  $z$  ed incidenti all'asse  $x$  (in particolare lo stesso asse  $z$ ), senza alterare la loro primitiva lunghezza, s'incurvano secondo archi di cerchio di raggio:  $\frac{1}{\nu}$

$$r = \frac{EI_x}{M_x}.$$

(206)

Per definire ora completamente la forma del solido deformato, basta analizzare come si trasforma una sua sezione retta, e potremo sceglierne una qualunque, poichè le componenti di deformazione sono indipendenti da  $z$ . Per comodità consideriamo la base vincolata  $z=0$ .

Tra la prima e la seconda delle (203), per  $z=0$  eliminiamo la  $y$ , trascurando, come poco più sopra, i termini contenenti la costante piccolissima  $\frac{M_x}{EI_x}$  a potenza uguale o superiore alla seconda: così si trova:

$$x' = x \left( 1 - \frac{M_x}{EI_x} \cdot \frac{y'}{m} \right).$$

Questa relazione, per  $x=$  costante, ci dà l'equazione della trasformata di una retta parallela all'asse  $y$  (nel piano  $xy$ ): ne consegue che tale trasformata è una retta che incontra l'asse  $y$  nel punto di ordinata:

$$y' = m \frac{EI_x}{M_x}$$

Poichè tale punto non dipende dal valore costante attribuito alla  $x$ , se ne deduce che tutte le rette inizialmente parallele all'asse  $y$  si mantengono rette e si dispongono in un fascio col centro nel punto or ora definito.

Per la mancanza degli scorrimenti  $\gamma_{xy}$  si deduce che le rette inizialmente perpendicolari all'asse  $y$ , devono trasformarsi nelle traiettorie ortogonali dei raggi del fascio suddetto, ossia in cerchi aventi il centro nello stesso punto.

In particolare i punti che inizialmente si trovavano sull'asse  $x$ , si dispongono su un cerchio di raggio:

$$r = mr = m \frac{EI_x}{M_x}$$

il quale è  $m$  volte quello della deformata dell'asse  $z$ ; ed il centro di tale cerchio, rispetto al baricentro della sezione, si trova da parte opposta del centro della suddetta deformata.

Poichè dalle (202) risulta che per  $y=0$  si ha  $\epsilon_x=0$ , se ne deduce che il segmento di asse delle  $x$  compreso nella base vincolata che qui consideriamo, si incurva ad arco di cerchio nel modo detto, senza però modificare la sua primitiva lunghezza, nè complessiva, nè dei suoi singoli elementi.

La sopra esposta descrizione della deformazione si può riconoscere anche più brevemente in altro modo, assai istruttivo.

Si calcolino, secondo le (18), N.º 9, pag. 26, le componenti della rotazione dello spostamento definito dalle (196).

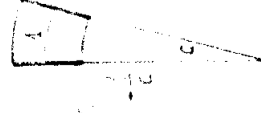
Si trova facilmente:

$$p = cz \quad ; \quad q = 0 \quad ; \quad r = \frac{c}{m} x.$$

Da queste relazioni con ovvii ragionamenti si deduce che le sezioni rette  $z = \text{cost.}$  si mantengono piane, e si dispongono secondo un fascio di asse definito da:  $y = -\frac{1}{c} z$ , ed inoltre che in ciascuna sezione le rette parallele all'asse  $y$  si trasformano nelle rette di un fascio, nel modo indicato poco più sopra; le altre modalità sopra specificate sono conseguenze di queste constatazioni e della mancanza degli scorrimenti  $\gamma$ .

Anzi è opportuno notare che per impostare lo studio di questo caso si potrebbe partire proprio dalla descrizione della deformazione, (qui invece ricavata), e dedurne le sopra scritte espressioni di  $p, q, r$ ; quindi, dato l'annullarsi delle  $\gamma$ , si possono esprimere tutte le derivate « rettangolari » delle  $u, v, w$ , mentre d'altra parte risulta ovviamente:  $\epsilon_z = cy$ , nonchè  $\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{c}{m} y$ ; dopo di che per integrazione, con opportuna determinazione delle costanti, in base alle condizioni di vincolo, sarebbe facile ricavare le (196).

Nella fig. 6 è accennata la forma assunta dopo la deformazione a flessione da un prisma a sezione rettangolare: per maggior chia-



rezza nella figura si sono rappresentate deformazioni molto grandi, ed occorre notare ancora una volta che la teoria da noi svolta vale solo per deformazioni piccolissime.

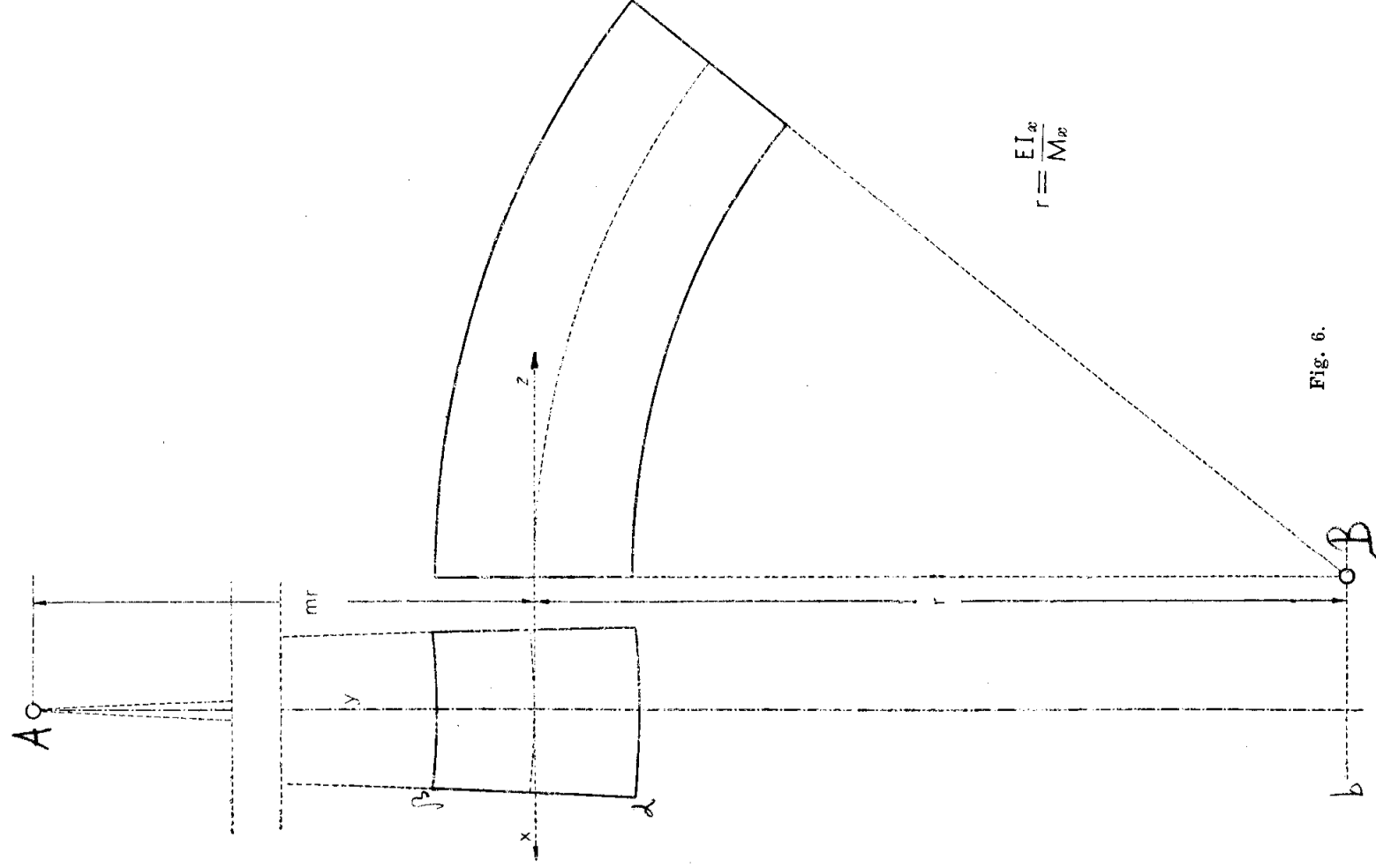


Fig. 6.

Nella detta figura è messo in evidenza l' incurvamento dell' asse geometrico, ed anche la forma assunta dalla sezione trasversale, secondo quanto si disse sopra. È chiaro che tra le faccie laterali del prisma a sezione rettangolare, quelle parallele inizialmente al piano di sollecitazione  $yz$ , si deformano secondo zone di superficie coniche di rotazione, aventi per asse la stessa retta sostegno del fascio dei piani, secondo cui si dispongono le sezioni rette; inoltre le altre faccie laterali parallele inizialmente all' asse geometrico  $z$  ed all' asse neutro  $x$  si trasformano in zone di tori circolari di rotazione aventi per asse ancora la stessa retta sostegno del fascio di piani sopra detto.

A titolo di notizia riferiamo come col già citato metodo delle frangie di interferenza del Fizeau si possono studiare le proprietà geometriche di dette superficie toriche, rese preventivamente speculari, ed avere così una conferma sperimentale di quanto sopra, ed anche un metodo di misura del coefficiente di Poisson  $\frac{1}{m}$ . — Su questo ci riserviamo di ritornare.

Dobbiamo pure notare che l'angolo  $\vartheta$  espresso dalla (205) si può misurare sperimentalmente col metodo degli specchi, ben noto nella fisica, e quindi si può ricavare il modulo di elasticità  $E$ ; e questo metodo può riuscire anche più sensibile e preciso di quello indicato nel N.º precedente, in base alla formola (194).

Se nel prisma a sezione rettangolare indichiamo con  $b$  la primitiva lunghezza dei lati paralleli all' asse  $x$ , l'angolo  $\vartheta'$  di cui dopo la deformazione si inclinano relativamente i lati della sezione inizialmente paralleli all' asse  $y$ , è dato da:

$$\vartheta' = \frac{b}{mr} = \frac{b}{m} \cdot \frac{M_x}{EI_x} \quad (207)$$

Perciò se l'angolo  $\vartheta'$  si misura sperimentalmente col mezzo degli specchi, e se già si è calcolato, come s'è detto or ora, il modulo di elasticità  $E$ , allora colla (207) si può ricavare il coefficiente di Poisson  $\frac{1}{m}$ .

TENSIONI INTERNE. DILATAZIONE CUBICA. POTENZIALE ELASTICO  
E LAVORO DI DEFORMAZIONE. X

Completiamo ora l'analisi dello stato di tensione.   
 [ Per tutte le sezioni rette la sola caratteristica diversa da zero è costantemente la  $M_x$  ]

*Indica che l'angolo  $\vartheta'$  è dato dalla (207) e che il coefficiente di Poisson  $\frac{1}{m}$  si ricava dalla (207).*

Così la sola componente speciale di tensione non nulla è, come sappiamo, la  $\sigma_z$ ; e dalle (197) e (201) combinate, risulta:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y} \quad (208)$$

Questa si suol chiamare la formola di Navier.

Essa ci dice come la tensione normale  $\sigma_z$  vari sulla sezione trasversale proporzionalmente alla distanza del punto generico della sezione dall'asse neutro  $x$ .

Essa perciò si annulla sull'asse neutro stesso, il quale separa quindi la sezione in due parti o regioni, nelle quali si hanno tensioni di segno o senso contrario, secondo il segno di  $y$ ; per  $c$ , e quindi  $M_x$  positivi, si hanno tensioni positive dalla parte delle  $y$  positive, tensioni negative, o compressioni dalla parte opposta.

Se si costruisce un diagramma delle tensioni in funzione della distanza  $y$  dell'asse neutro, tale diagramma risulta rettilineo, con ordinata nulla in corrispondenza dell'asse neutro stesso.

Sempre a titolo di notizia riferiamo che, per un prisma a sezione rettangolare di materiale trasparente omogeneo, cogli esperimenti sulla doppia rifrazione accidentale, mediante la luce polarizzata, si può mettere in evidenza il detto diagramma delle tensioni interne e misurare quindi queste.

Secondo la (156), possiamo calcolare la dilatazione cubica, che qui risulta:

$$\Theta = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right) \epsilon_z \quad \Theta = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{M_x}{EI_x} y \quad (209)$$

La variazione di volume totale del prisma o cilindro è:

$$\Delta V = \int_V \Theta dV$$

Ponendo:  $dV = dA dz$ , sostituendo, osservando che  $\Theta$  è costante rispetto a  $z$ , ed eseguendo le integrazioni si ottiene:

$$\Delta V = \frac{m-2}{m} \frac{M_x l}{EI_x} \int_A y dA.$$

*Solo per la flessione*

Essendo  $x$  un asse baricentrico è  $\int_A y dA = 0$ , e perciò si ha:

$$\Delta V = 0 \tag{210}$$

Dunque per la flessione semplice il volume complessivo del cilindro o prisma non si modifica.

Calcoliamo ora il potenziale elastico: secondo la (165) si trova:

$$\Phi = \frac{\sum \mathcal{E}_z^2}{\lambda} \quad \Phi = \frac{M^2_{st} y^2}{2EI_{st}} \tag{211}$$

e quindi il lavoro di deformazione è:

$$L = \int_V \Phi dV = \frac{M^2_{st} l}{2EI_{st}^2} \int_A y^2 dA = \frac{M^2_{st} l}{2EI_{st}}.$$

*4. Lavoro di deformazione per la flessione semplice*  
 $L = \frac{1}{2} \frac{M^2_{st} l}{EI_{st}}$

Lo stesso valore si può ottenere applicando il teorema di Clapeyron (N.º 36), osservando che la coppia flettente esterna  $M_{st}$  compie lavoro per la rotazione relativa  $\vartheta$  delle due basi estreme del cilindro, espressa dalla (205).

**FLESSIONE DEVIATA.**

Riprendiamo ora a considerare il caso, già prospettato più sopra, in cui l'asse  $x$ , pur essendo baricentrico per la sezione, non coincide con nessuno dei due assi principali d'inerzia di essa.

Come già si riconobbe sopra in tal caso sono diversi da zero i due momenti flettenti  $M_x$  ed  $M_y$ , i quali componendosi danno luogo ad un momento flettente totale o complessivo, secondo la (185).

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Tale momento è staticamente equivalente ad una coppia che si può immaginare agente in un piano passante per l'asse  $z$ , il quale piano si può pure qui chiamare piano di sollecitazione, indicando poi con *asse di sollecitazione* la traccia  $s$  di tale piano su quello della sezione retta. In questo caso l'asse di sollecitazione non è più, (come nel caso della *flessione retta*) coincidente coll'asse  $y$ , e quindi non è normale all'asse neutro  $x$ .

Ora è molto facile stabilire una relazione tra l'asse neutro e l'asse di sollecitazione.

Infatti dalla (197), o dalla (208), risulta che la tensione normale  $\sigma_x$  è proporzionale alla distanza  $y$  dell'asse neutro: perciò le forze interne normali elementari agenti sugli elementi di area  $dA$ , espresse da  $\sigma_x dA$ , sono proporzionali ai momenti statici  $y dA$  degli elementi di area  $dA$  rispetto all'asse neutro. Quindi per quanto è noto dalla statica grafica la risultante di dette forze interne elementari deve essere applicata nel baricentro dei detti momenti statici, centro relativo dell'asse neutro  $x$  rispetto all'area della sezione, od anche antipolo dello stesso asse  $x$  rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione.

Ma poichè l'asse  $x$  è baricentrico, secondo quanto insegna la statica grafica, il rispettivo antipolo, o centro relativo, è il punto all'infinito del diametro dell'ellisse d'inerzia della sezione coniugato di  $x$  rispetto alla stessa ellisse.

Ciò prova anzitutto che la risultante delle dette forze interne elementari è una forza infinitamente piccola e lontana, ossia una coppia, — come già sapevamo — ed inoltre che l'asse di sollecitazione  $s$ , (traccia del piano della coppia sul piano della sezione), è coniugato dell'asse neutro  $x$  rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione stessa.

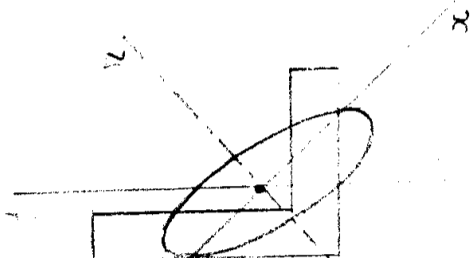
~~Ne consegue che~~ Se l'asse neutro è un qualsiasi asse  $x$  baricentrico per la detta sezione, il piano della linea elastica circolare risulta sempre normale all'asse neutro  $x$ ; dicendo asse di flessione la traccia  $r$  di tale piano su quello della sezione (e notando che su  $r$  sta il centro di curvatura della linea elastica), risulta che l'asse di flessione è sempre normale all'asse neutro.

Quindi se questo asse neutro non è uno dei due assi principali d'inerzia della sezione, il piano di flessione non coincide col piano di sollecitazione, (e l'asse di flessione non coincide coll'asse di sollecitazione).

In questo caso si dice che si ha la flessione deviata, perchè il piano della linea elastica è deviato rispetto a quello di sollecitazione (della coppia flettente esterna).

La tensione normale  $\sigma_x$  è ancora data dalla (208) che continua ad essere valevole, osservando però che  $M_x$  è, non tutto il momento flettente esterno, ma della coppia flettente  $M_f$ , il momento rispetto all'asse neutro, o, — ciò che fa lo stesso, — la coppia proiezione sul piano di flessione.

Ora la (208) si può trasformare introducendo il momento flettente totale  $M_f$ : perciò indichiamo con  $y_s$  la distanza di un punto generico della sezione dall'asse  $x$ , misurata però nella direzione  $s$  dell'asse di sollecitazione, coniugato di  $x$ ; indichiamo poi con  $I_{oss}$  il momento di inerzia della sezione rispetto allo stesso asse neutro  $x$ ,



valutato però misurando le distanze degli elementi pure nella direzione coniugata s.

Ciò posto, per ragioni ben ovvie, dalla (208) si ricava subito:  $\sigma_z = \frac{M_f}{I_{ss}} y_s$  (213) *per un dato y\_s*

$$\sigma_z = \frac{M_f}{I_{ss}} y_s$$

EQUAZIONE DI STABILITÀ. MODULI DI RESISTENZA E RELATIVO  $\times$   
 DIAGRAMMA POLARE.

Riferendoci a quanto si disse in fine del N.º 48<sup>a</sup> a proposito delle dilatazioni principali e delle tensioni principali ideali, e tenendo presenti le (180), si deduce che poichè qui la sola componente principale di tensione è la  $\sigma_z$ , essa è la sola tensione principale, la  $\epsilon_z$  è la corrispondente dilatazione principale, e quindi la stessa  $\sigma_z = E\epsilon_z$  è la sola tensione principale ideale.

Perciò in questo caso l'equazione di stabilità si dovrà scrivere uguagliando ai rispettivi carichi di sicurezza i valori massimo e minimo (massimo negativo) della  $\sigma_z$  stessa.

Dalla (213) risulta chiaramente che per un dato asse di sollecitazione, e per un dato valore del momento flettente totale  $M_f$ , i valori numericamente massimi di  $\sigma_z$  si hanno per i valori pure numericamente massimi di  $y_s$ : ossia nei punti del contorno della sezione più lontani dall'asse neutro, (punti di contatto delle tangenti al contorno parallele all'asse neutro e da questo più lontane).

Siano  $y'_s$  ed  $y''_s$  i valori assoluti di tali distanze massime, rispettivamente dalla parte delle  $y$  positive e da quella delle  $y$  negative: allora indicando con  $\sigma'_z$  e  $\sigma''_z$  i valori numerici massimi della  $\sigma_z$  rispettivamente a tensione ed a compressione, avremo:

$$\sigma'_z = \frac{M_f}{I_{ss}} y'_s \quad ; \quad \sigma''_z = \frac{M_f}{I_{ss}} y''_s \quad (214)$$

Se poi, al solito,  $k'$  e  $k''$  sono i due carichi di sicurezza del materiale, rispettivamente a trazione ed a compressione, per la stabilità dovranno essere verificate entrambe le disuguaglianze seguenti:

$$\sigma'_z \leq k' \quad ; \quad \sigma''_z \leq k'' \quad (215)$$

Possiamo porre:

$$W'_{ss} = \frac{I_{ss}}{y'_s} \quad ; \quad W''_{ss} = \frac{I_{ss}}{y''_s} \quad (216)$$



e con ciò le (214) divengono :

$$\sigma'_z = \frac{M_f}{W'_{as}} \quad ; \quad \sigma''_z = \frac{M_f}{W''_{as}} \quad (217)$$

Le grandezze  $W'_{as}$  e  $W''_{as}$  così introdotte si chiamano moduli di resistenza della sezione; essi sono riferiti al dato asse di sollecitazione e al corrispondente asse neutro, nel senso che per ogni asse di sollecitazione si hanno due valori dei detti moduli di resistenza.

Il minore dei due prodotti :

$$k' W'_{as} \quad \text{e} \quad k'' W''_{as}$$

rappresenta, secondo le (215) e (216) il momento flettente massimo che secondo il dato asse di sollecitazione, la sezione può sopportare con tutta sicurezza; perciò esso si dice pure il momento resistente della data sezione, col dato materiale, secondo il rispettivo asse di sollecitazione, e per il dato verso del momento flettente; giacchè è ben chiaro che se il verso di questo momento cambia, allora come momento resistente si deve assumere il minore dei due prodotti:

$$k' W'_{as} \quad \text{e} \quad k'' W''_{as}$$

Se il materiale di cui è costituito il solido ha un solo carico di sicurezza a trazione come a compressione  $k' = k'' = k$ , allora come modulo di resistenza della sezione relativamente al dato asse di sollecitazione si deve assumere il minore dei due moduli di resistenza sopra indicati, il quale è quello che corrisponde al maggiore dei due valori  $y'_s$  ed  $y''_s$ .

Tale modulo di resistenza si può indicare con  $W_{as}$ .

Vediamo ora come si possa trovare un diagramma polare dei moduli di resistenza relativi ai vari assi di sollecitazione.

Dalla Statica grafica è noto che, se  $\rho_{as}$  è il semi-diametro dell'ellisse centrale di inerzia della sezione disteso sull'asse di sollecitazione  $s$ , allora si ha:  $I_{as} = A \rho_{as}^2$   $\rho_{as} = \sqrt{\frac{I_{as}}{A}}$

$$I_{as} = A \rho_{as}^2 ,$$

essendo al solito  $A$  l'area della sezione.

Ciò posto, le (216) si possono scrivere :

$$W'_{as} = A \frac{\rho_{as}^2}{y'_s} \quad ; \quad W''_{as} = A \frac{\rho_{as}^2}{y''_s}$$

Ora, sempre dalla Statica grafica, si ha che le lunghezze:

$$n' = \frac{c^2_{os}}{y'_s} \quad \text{e} \quad n'' = \frac{c^2_{os}}{y''_s}$$

sono i due raggi vettori, distesi sull'asse di sollecitazione  $s$ , del nòciolo centrale della sezione, e contati dal baricentro della sezione.

Orbene, i moduli di resistenza si possono quindi esprimere come segue:

$$W'_{os} = An' \quad ; \quad W''_{os} = An'' \quad ; \quad (218)$$

e ciò prova che il nòciolo centrale della sezione è il diagramma polare dei moduli di resistenza della sezione stessa relativi ai vari assi di sollecitazione.

La scala del diagramma risulta dalla stessa (216).

Se occorre per ciascun asse di sollecitazione un unico modulo di resistenza  $W_{os}$ , come s'è detto poco sopra, allora esso è uguale all'area  $A$  della sezione moltiplicata per il *minore* dei due raggi vettori del nòciolo centrale della sezione, distesi sul detto di sollecitazione. Perciò in tal caso, per avere il diagramma polare del modulo di resistenza  $W_{os}$  basta considerare il nòciolo diviso in due parti da un asse qualsiasi baricentrico, e poi rotare nel piano della sezione ed intorno al baricentro, di un angolo uguale a  $\pi$ , una delle due parti suddette del nòciolo. Allora l'area interna comune alla parte del nòciolo lasciata fissa, ed alla parte rotata, stacca su un asse di sollecitazione generico (passante per il baricentro) un segmento che moltiplicato per l'area  $A$  della sezione ci dà il modulo di resistenza relativo al dato asse di sollecitazione.

Questa costituisce una proprietà molto notevole ed utile del nòciolo centrale.

Tra l'altro essa ci fornisce il modo di determinare l'asse di sollecitazione a cui corrisponde il massimo modulo di resistenza: esso è quell'asse che contiene il massimo raggio vettore del diagramma polare ora descritto.

Esso in generale non coincide con nessuno dei due assi principali d'inerzia della sezione; però per molte delle sezioni più comuni nelle applicazioni, tale asse coincide coll'asse maggiore dell'ellisse centrale di inerzia della sezione.

Notiamo che i moduli di resistenza, come risulta dalla (216), sono termini del terzo ordine, ossia risultano dal prodotto di tre lunghezze.

Ne consegue che se una sezione si trasforma per similitudine, o

per omotetia, il modulo di resistenza si modifica secondo il rapporto che è uguale al cubo del rapporto di similitudine o di omotetia.

È facile riconoscere che se la sezione si trasforma in una affinità omologica avente per asse lo stesso asse neutro, in modo che tutte le dimensioni a questo parallelo ( $x$ ) rimangono inalterate mentre si trasformano nel rapporto di affinità le dimensioni a quello normali ( $y$ ), allora il modulo di resistenza si modifica in un rapporto uguale al quadrato del rapporto di affinità. Se poi la sezione si trasforma per affinità omologica con asse di affinità coincidente coll'asse  $y$  normale all'asse neutro  $x$ , (restando così inalterate le  $y$  e trasformandosi invece le  $x$  nel rapporto di affinità) allora il modulo di resistenza si modifica secondo lo stesso rapporto di affinità.

Questi concetti sono utili nei *calcoli di progetto*, ove spesso, per trovare una sezione atta a fornire un dato momento resistente, si fissa la forma che ad essa si vuole attribuire, e poi la si trasforma o per omotetia, ovvero per affinità omologica, nei modi ora descritti.

Le relazioni sopra esposte servono appunto per determinare il rapporto di omotetia o di affinità tra una sezione di primo tentativo e quella definitiva, avente il modulo di resistenza richiesto.

#### STUDIO ANALITICO DELLA FLESSIONE DEVIATA.

Per trattare analiticamente il caso della flessione deviata può essere preferibile introdurre in calcolo i momenti principali d'inerzia della sezione, anzichè il momento di inerzia obliquo  $I_{os}$  sopra definito.

Ora, in questa ricerca chiamiamo  $\xi$  ed  $\eta$  gli assi principali di inerzia della sezione, ed indichiamo colle stesse lettere le coordinate del punto generico della sezione, riferito agli stessi assi.

Indichiamo con  $\varphi$  l'angolo acuto compreso tra l'asse di sollecitazione  $s$  e l'asse  $\eta$  (positivo se l'asse  $s$  sta nel 1.º e nel 3.º dei quadranti  $\xi\eta$ ); e sia  $\psi$  l'analogo angolo compreso tra l'asse di flessione  $y$  e lo stesso asse  $\eta$  (positivo analogamente) (v. fig. 7).

Notiamo poi che combinando la (206) e la (208) si trova:

$$\eta = \frac{\sum I_x}{M_x} \quad \sigma_x = \frac{M_x y}{I_x} \quad \sigma_z = \frac{E y}{r}. \quad (219)$$

Ciò posto, ricordando che la coppia flettente totale  $M_f$  agisce nel piano  $sz$ , per l'equilibrio alla rotazione intorno agli assi princi-

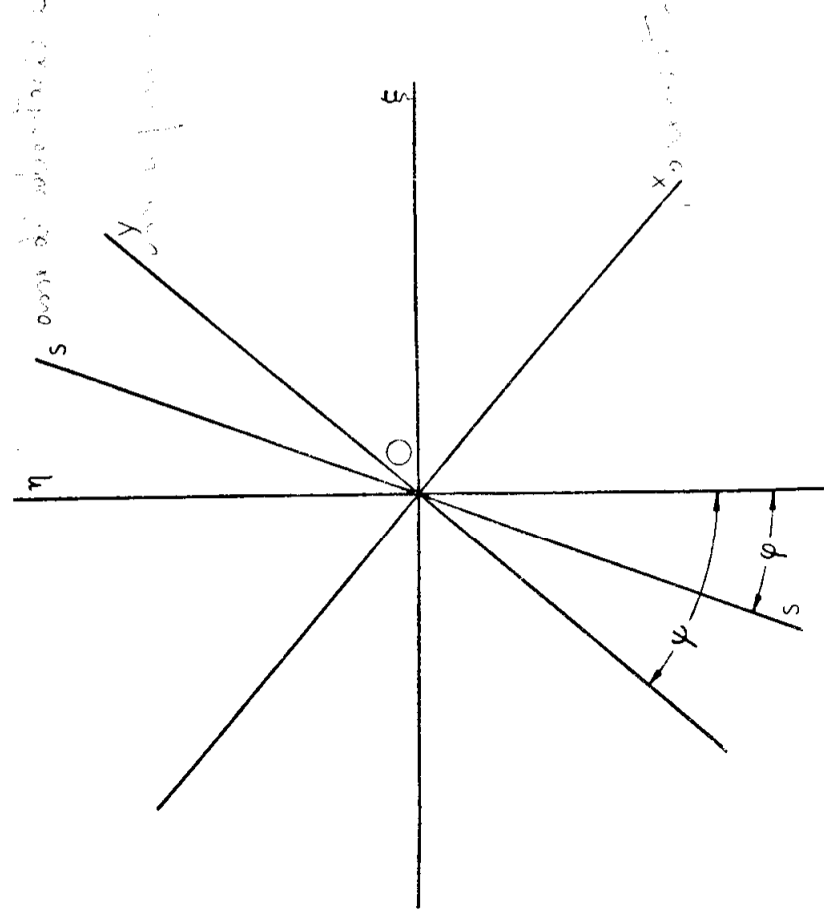


Fig. 7

pali  $\xi$  ed  $\eta$ , tra le forze interne e le sollecitazioni esterne, e tenendo presente la (219) si deve avere:

$$\begin{cases} M_\xi = M_r \cos \varphi = \frac{E}{r} \int_A y \eta dA \\ - M_\eta = M_r \sin \varphi = \frac{E}{r} \int_A y \xi dA \end{cases} \quad (220)$$

Si ha pure evidentemente, — e come del resto è noto dalla geometria analitica —:

$$y = \eta \cos \psi + \xi \sin \psi \quad (221)$$

Sostituiamo questo valore nelle (220), eseguiamo le integrazioni, indicando con

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA \quad , \quad I_\eta = \int_A \xi^2 dA$$

i momenti d'inerzia della sezione rispetto agli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$ ,

ricordando che è nullo il momento centrifugo rispetto agli stessi assi:

$$\int_A \xi \eta dA = 0.$$

Con ciò le (220) divengono:

$$\begin{aligned} M, \cos \varphi &= \frac{EI_\xi}{r} \cos \psi \\ M_f \sin \varphi &= \frac{EI_\eta}{r} \sin \psi \end{aligned} \quad (222)$$

Dividendo di queste la seconda per la prima si ottiene:

$$\text{tang } \varphi \cotg \psi = \frac{I_\eta}{I_\xi} = \frac{\rho_\eta^2}{\rho_\xi^2} = \frac{\text{tang } \psi}{\text{tang } 30 - \psi} = \frac{\rho_\eta^2}{\rho_\xi^2} \quad (223)$$

indicando con  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  i due raggi d'inerzia rispetto agli assi principali  $\xi$  ed  $\eta$ , ossia i semiassi dell'ellisse d'inerzia distesi rispettivamente sugli assi  $\eta$  e  $\xi$ .

L'ultima relazione (223), conforme a quanto insegna la geometria analitica, esprime la già nota proprietà, che *l'asse neutro  $x$  e l'asse di sollecitazione  $s$  sono coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia*. La relazione stessa può servire per determinare analiticamente l'asse neutro quando sia dato l'asse di sollecitazione e viceversa.

L'ellisse d'inerzia funziona come *ellisse di direzione*, per la ricerca dell'asse di flessione  $y$  corrispondente ad un dato asse di sollecitazione  $s$ .

Conveniamo ora, di rappresentare la curvatura  $\frac{1}{r}$  dell'asse geometrico con un segmento — o raggio vettore — in una scala assegnata, e disteso sull'asse di flessione  $y$  a partire dal baricentro  $O$ . Ricerchiamo il luogo dell'estremo di tale segmento, per un momento  $M_f$  di intensità fissa, al variare della direzione dell'asse di sollecitazione e perciò di quello di flessione.

Le quantità:

$$\frac{1}{r_\eta} = \frac{\sin \psi}{r} \quad , \quad \frac{1}{r_\xi} = \frac{\cos \psi}{r}$$

che compaiono nei secondi membri delle (222) sono le proiezioni

rispettivamente sugli assi  $\xi$  ed  $\eta$  della curvatura totale  $\frac{1}{r}$  distesa sul-

l'asse di flessione  $y$  (componenti della curvatura), e nella data scala sopra detta sono le coordinate del punto, di cui cerchiamo il luogo.

$$\text{potrebbe } \rho_\eta^2 = \frac{I_\xi^2}{A^2} \cdot \rho^2 = \frac{I_\xi^2}{A^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{I_\xi^2}{EA^2} = 1$$

Dalle (222), eliminando l'angolo  $\varphi$  si deduce subito:

$$\left(\frac{1}{r_\eta}\right)^2 : \left(\frac{1}{\rho_\eta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_\xi}\right)^2 : \left(\frac{1}{\rho_\xi}\right)^2 = \left(\frac{M_f}{EA}\right)^2.$$

Ciò dimostra che il luogo da noi ora cercato, a meno del fattore costante  $\frac{M_f}{EA}$  (computabile nella scala del diagramma), è l'ellisse di centro  $O$  ed avente per semiasse  $\frac{1}{\rho_\eta}$  e  $\frac{1}{\rho_\xi}$ , distesi rispettivamente sugli assi  $\xi$  ed  $\eta$ .

Questa linea si può chiamare *ellisse delle curvaturei*, e costituisce il diagramma polare della legge con cui varia la curvatura al variare del rispettivo asse di flessione, e per  $\frac{M_f}{EA} = 1$ .

La curvatura su un determinato asse  $y$  di flessione è data dal raggio vettore della detta ellisse, misurato sull'asse stesso e moltiplicato per il fattore  $\frac{M_f}{EA}$ . (Cfr. per analogia il comportamento delle quadriche di direzione e dell'ellissoide di Lamé).

È poi facile esprimere  $\frac{1}{r}$  in funzione dell'angolo  $\varphi$  (posizione dell'asse di sollecitazione  $s$ ).

$$\frac{1}{r} = \frac{M_f}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I_\xi^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I_\eta^2}}. \tag{224}$$

Ora, dalle (219) e (221) si ottiene:

$$\sigma_z = \frac{E}{r} y = \frac{E}{r} (\eta \cos \psi + \xi \sin \psi):$$

e per le (222) si ottiene infine:

$$\sigma_z = \frac{M_f \cos \varphi}{I_\xi} \eta + \frac{M_f \sin \varphi}{I_\eta} \xi. \tag{225}$$

Questa relazione avrebbe pure potuto ricavarsi immaginando il

momento complessivo  $M_f$  scomposto nelle sue due componenti  $M_f \cos \varphi$  ed  $M_f \sin \varphi$ , producenti ciascuna una *flessione retta*; quindi applicando per ciascuna componente la (208) riferita ai rispettivi assi principali  $\xi$  ed  $\eta$ , ed utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti, che in questo caso è perfettamente applicabile.

La (225) è particolarmente utile per scrivere l'equazione di stabilità, poichè per molte sezioni usate nella pratica si trovano già calcolati nei manuali i momenti d'inerzia principali  $I_\xi$  e  $I_\eta$ .

Il valore massimo della  $\sigma_z$ , il quale deve non superare il carico di sicurezza, si ottiene dalla (225) ponendo in luogo di  $\xi$  ed  $\eta$  le coordinate  $\xi'$  ed  $\eta'$  del punto del contorno della sezione più lontano dall'asse neutro.  $x$

Così, limitandoci qui per ora al caso di un unico carico di sicurezza, abbiamo l'equazione di stabilità espressa da:

$$k \geq M_f \cos \varphi \frac{\eta'}{I_\xi} + M_f \sin \varphi \frac{\xi'}{I_\eta}. \quad (226)$$

In molti casi della pratica il contorno della sezione è poligonale, ottenibile come somma o differenza di rettangoli a lati rispettivamente paralleli (sezioni di ferri sagomati, già considerati pure nella statica grafica). Allora spesso esiste in un vertice del contorno poligonale un punto, che è sempre il più lontano da ogni asse neutro baricentrico compreso in uno degli angoli completi limitati dagli assi principali d'inerzia ed in particolare il più lontano da ciascuno di questi due assi: in tali casi le sue coordinate  $\xi'$  ed  $\eta'$  sono note a priori, ed inoltre i rapporti:

$$W_\xi = \frac{I_\xi}{\eta'} \quad W_\eta = \frac{I_\eta}{\xi'}$$

sono i *moduli di resistenza* rispetto agli assi principali, e per le varie sezioni di ferri sagomati usati nella pratica pure tali moduli sono elencati nei manuali; ad ogni modo poi essi possono calcolarsi molto facilmente.

In tali casi speciali, (e solo in essi), la (226) si può scrivere:

$$k \geq M_f \left( \frac{\cos \varphi}{W_\xi} + \frac{\sin \varphi}{W_\eta} \right) \quad (227)$$

Usando i ferri che già si trovano in commercio, questa condizione si soddisfa con successivi tentativi, e per approssimazione, fa-

cendo in modo che il secondo membro *non* superi il carico di sicurezza.

E superfluo osservare che non deve creare difficoltà alcuna il fatto che nei citati manuali siano spesso indicate con  $I_x, I_y, W_x, W_y$ , le grandezze che noi qui abbiamo indicato con  $I_\xi, I_\eta, W_\xi, W_\eta$ .

Notiamo ora che pure per il caso della flessione deviata valgono le relazioni dalla (209) alla (212) incluse, per la dilatazione cubica per il potenziale elastico, e per il lavoro di deformazione, già stabilite nel caso precedente della flessione retta. } // †

Può essere utile però tener presente che allo stesso modo come la (208) dà luogo alla (213), così pure le (209), (211), (212) possono trasformarsi come segue:

$$\Theta = \frac{m-2}{m} \frac{M_f}{EI_{os}} y_s \quad (209 \text{ bis})$$

$$\Phi = \frac{M_f^2}{2EI_{os}^2} y_s^2 \quad (211 \text{ bis})$$

$$L = \frac{M_f^2 l}{2EI_{os}} \quad (212 \text{ bis})$$

Chiederemo queste nozioni relative alla flessione semplice indicando un altro mezzo sperimentale per la determinazione del modulo di elasticità normale E.

Si consideri un prisma o cilindro disposto col suo asse orizzontale su due appoggi *A* e *B* allo stesso livello, sollecitato da forze verticali (carichi); in tali condizioni il prisma si dice *trave semplicemente appoggiata*. Gli appoggi siano intermedi ed equidistanti dagli estremi della trave; i tratti esterni agli appoggi si dicono anche *sbalzi* (V. fig. 8). Sia *a* la lunghezza uguale dei due sbalzi,  $2l$  la distanza tra gli appoggi *A* e *B*; e si abbiano solo due carichi concentrati uguali a *P*, applicati alle estremità libere della trave. Dalla statica è noto che le reazioni dei due appoggi sono in tal caso uguali a  $-P$ , ed è pure evidente che il tratto *AB* della trave è sollecitato a sola flessione semplice con un momento  $M = Pa$ .

Supponiamo che uno degli assi principali della sezione sia verticale, sicchè si abbia flessione retta, ed il piano di flessione sia pure verticale.

La linea elastica assume una forma analoga a quella indicata nella parte inferiore della fig. 8; nel tratto *AB* si dispone ad arco di cerchio di raggio *r* dato dalla (206).



La freccia  $f$  di tale arco si può misurare accuratamente e con molta precisione con appositi apparecchi detti *flessimetri*.

Tra la freccia  $f$ , il raggio  $r$ , e la semicorda  $l$  del detto arco circolare intercede la relazione ben nota dalla geometria:

$$r = \frac{l^2 + f^2}{2f} = \frac{l^2}{2f} \left[ 1 + \left( \frac{f}{l} \right)^2 \right].$$

*(277) f = l^2*

E poichè nella pratica s'incontrano sempre deformazioni picco-

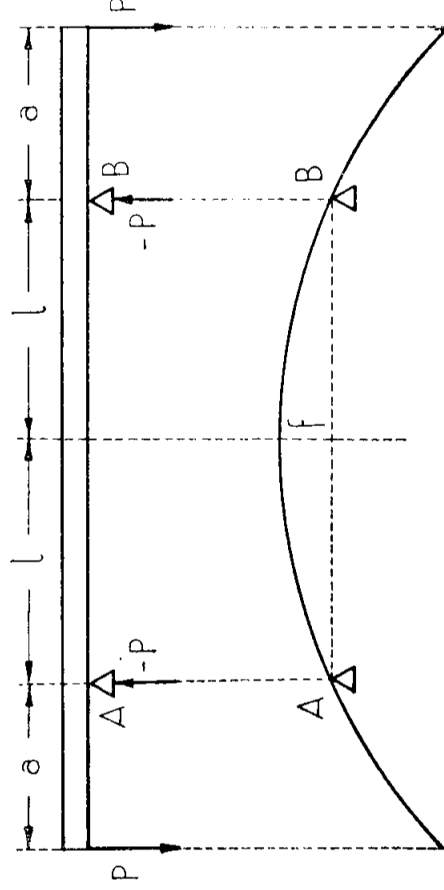


Fig. 8.

lissime, sarà sempre  $f$  molto piccola in confronto di  $l$ , sicchè il termine  $\left(\frac{f}{l}\right)^2$  si può trascurare in confronto dell'unità e ritenere con grandissima approssimazione:

$$r = \frac{l^2}{2f}$$

Orbene per la (206), e ricordando che qui è:  $M_c = Pa$ , si ottiene:

$$\nu = \frac{E}{11\alpha} \quad E = \frac{Pal^2}{2I_0 f} \quad (228)$$

si può calcolare  $E$  misurando  $f$ , il che si può fare con apparecchi molto meno delicati di quelli necessari a determinare  $\Delta l$ , per la tensione o pressione, al fine di determinare  $E$  colla (194).

Occorre tener presente che l'esperimento si deve condurre in modo da non oltrepassare il *limite di elasticità*, con la tensione massima  $\sigma_z$  calcolabile mediante la (208).