

GENERALITÀ SUL PROBLEMA DI SAINT-VENANT.

47. POSIZIONE GENERALE DEL PROBLEMA.

Già si disse al N.º 28, pag. 92 che le equazioni generali dell'equilibrio elastico, esposte nello stesso N.º, presentano per la loro soluzione gravissime difficoltà analitiche, le quali si sanno superare completamente solo in pochissimi casi particolari semplici.

Per le applicazioni tecniche è specialmente interessante lo studio della deformazione e della distribuzione di tensioni o pressioni interne nei solidi elastici di forma cilindrica o prismatica, quali sono quelli che più comunemente si presentano come parti di costruzioni od organi di macchine.

Salvo a fare poi le opportune osservazioni sul modo di applicare i risultati e sull'approssimazione consentita e raggiunta, noi prenderemo qui a studiare un solido elastico, cilindrico o prismatico retto, limitato cioè da due basi piane normali alle generatrici della superficie laterale, supponendo che siano nulle tutte le forze di massa, che sia completamente scarica e libera da vincoli la superficie laterale cilindrica o prismatica, e che siano soggette a forze esterne ed a reazioni di vincoli soltanto le due basi.

Anche così impostato il problema non si sa risolvere in tutta la sua generalità; ma per merito del *Barré de Saint-Venant* sono stati assegnati e risolti rigorosamente alcuni casi particolari semplici e specialmente utili per le applicazioni, dai quali poi si possono dedurre con la sovrapposizione degli effetti le soluzioni, almeno approssimate, di altri casi più complessi.

Il procedimento che qui esporremo è valido pure per un corpo non isotropo; tuttavia, per limitarci al caso più utile negli studi tecnici, noi prenderemo a considerare solo un corpo elastico isotropo.

Si suol chiamare *asse geometrico* del prisma o cilindro, la retta

contenente tutti i baricentri delle sezioni piane normali del prisma stesso.

Assumiamo l'origine O in un punto generico di una delle basi; l'asse z parallelo all'asse geometrico (e perciò anche alle generatrici del cilindro, od agli spigoli laterali del prisma); gli assi x ed y siano due rette ortogonali per O , contenute nella base considerata; il senso positivo dell'asse z in O sia diretto verso l'interno del cilindro.

Nei trattati, a questo punto si usa introdurre altre ipotesi ulteriormente restrittive sulla scelta degli assi. Poichè tali ipotesi non sono necessarie nella trattazione generale del problema, noi preferiamo non formularle per ora, e ciò al fine di lasciare all'impostazione di questo studio tutta la sua generalità.

Ci riserviamo però di adottare le ipotesi stesse, quando la loro introduzione possa essere utile per lo studio di qualche caso particolare. Ciò verrà precisato volta a volta nel luogo più opportuno.

Indichiamo poi con L la lunghezza del prisma ossia la distanza tra le due basi, contata lungo l'asse z .

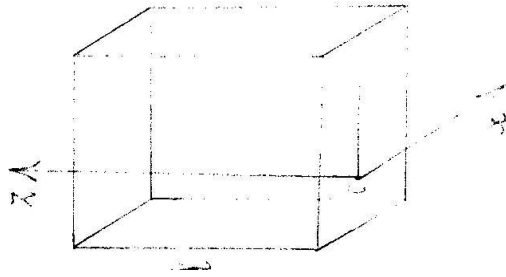
Secondo l'uso invalso nei trattati tecnici, invece delle componenti speciali di pressione $X_x \dots Y_z \dots$, considereremo quelle di tensione, uguali ed opposte alle prime, indicando con σ le tensioni normali (agli elementi su cui si esercitano), e con τ le tensioni tangenziali, ossia porremo:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -X_x; & \sigma_y &= -Y_y; & \sigma_z &= -Z_z; \\ \tau_{yz} &= -Y_z; & \tau_{zx} &= -Z_x; & \tau_{xy} &= -X_y \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Così veniamo ad introdurre le *componenti speciali di tensione*, anzichè di pressione; ed in conseguenza può convenire di mutare pure il verso positivo della normale ad una superficie, prendendola positiva verso l'esterno della porzione di solido da essa limitata.

Con queste notazioni, e per l'ipotesi fatta delle forze di massa nulle, le equazioni indefinite dell'equilibrio (36) [pag. 54 N.º 18], ci forniscono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (146)$$



(ricordando che si ha, com'è ben noto :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}) .$$

Inoltre trascriviamo qui colle nuove notazioni le (73) e (74), stabilite al N.° 27, pag. 83 e 84, per passare dalle deformazioni agli sforzi, e seguendo pure l'uso invalso nella tecnica indichiamo qui con G la seconda costante di Lamé, o modulo di elasticità tangenziale (v. N.° 25, pag. 77); abbiamo quindi :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \Theta + 2 G \epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda \Theta + 2 G \epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda \Theta + 2 G \epsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Le condizioni di equilibrio in superficie, secondo quanto si è supposto, comportano che sulla base $z=l$ le τ_{zx} , τ_{yz} , σ_z siano rispettivamente uguali alle omologhe componenti normali delle tensioni superficiali applicate, mentre sulla base $z=0$ analoghe eguaglianze valgono, col segno cambiato in uno dei membri.

Poichè la superficie laterale cilindrica o prismatica si è supposta scarica, sulla superficie stessa essendo $\alpha_z=0$, si deve avere :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y &= 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y &= 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Il Saint-Venant ha indicato alcuni casi particolari, nei quali la soluzione del problema ora posto è rigorosa; essi sono quelli in cui ogni elemento superficiale parallelo all'asse z è soggetto solamente ad una tensione tangenziale parallela all'asse stesso; e da questa nuova ipotesi risulta, che in ogni punto del solido deve essere :

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Il Saint-Venant ha proposto e risolto rigorosamente il problema di determinare una deformazione, che, in relazione colle proprietà del corpo isotropo, soddisfaccia alle condizioni (150); una tale defor-

$$G = \frac{E}{2(1 + \frac{1}{m})}$$

$$L = X_z dx + X_y dy + X_x dz$$

$$L = Y_{zx} ; M = Y_{zy}$$

$$N = \sigma_z$$

Denotare ad elementi τ_{zx} , τ_{zy} , σ_z ; non può essere lo stesso il caso, per $\sigma_z \neq 0$.

+

form. (27)]:

$$\Theta = \xi_x + \xi_y + \xi_z \quad (1, 33)$$

$$\Theta = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \varepsilon_z \quad (156)$$

Inoltre dalle (151), in virtù delle (148) si ricava:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{zo}}{\partial z} = 0; & \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_{zo}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{E}{G} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0 & \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

e ricordando l'espressione di $G = \mu$ fornita dalla (62) a pag. 77, N.º 25, si deduce:

$$\frac{\partial \gamma_{zo}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + 2 \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0 \quad (158)$$

Riassumendo, le relazioni (153), (155), (157), (158), esprimono le condizioni a cui devono soddisfare le componenti della deformazione a causa delle ipotesi fondamentali del problema, compresa la restrizione stabilita dalle (150).

Dette relazioni di condizione si possono poi trasformare sostituendo alle $\varepsilon_o \dots \gamma_{yz} \dots$ le loro ben note espressioni contenenti le u, v, w , componenti di spostamento, [v. N.º 6, pag. 20, form. (10)].

Si ottengono così le seguenti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{m} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (159)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (160)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \quad (161)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \quad (162)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (163)$$

Queste relazioni, dalla (159) alla (162) incluse, si ricavano in modo affatto ovvio; per l'ultima (163) può essere opportuno un cenno di delucidazione.

La (158), trasformata secondo le (10), diviene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{m+1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0;$$

da questa, sviluppando le derivate e raccogliendo i termini simili, si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{m+2}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

ossia:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{m+2}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

e per la (156):

$$\frac{m-2}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{m+2}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

da cui, infine raccogliendo il primo e l'ultimo termine, si trova la (163), che risulta così dimostrata.

Per caratterizzare ulteriormente la deformazione, ossia per rendere nullo quello spostamento rigido arbitrario a meno del quale la deformazione stessa è determinata, noi imporremo delle condizioni arbitrarie di vincolo, strettamente necessarie ad evitare un moto rigido, e pertanto stabiliremo:

- 1.º che un punto assegnato $P_0(x_0, y_0)$ sulla sezione retta $z=0$ sia fisso;
- 2.º che un elemento lineare $n(\alpha_x, \alpha_y)$ uscente da P_0 e giacente nel piano $z=0$ in una assegnata direzione, mantenga inalterata la sua stessa direzione primitiva;
- 3.º che l'elemento superficiale di piano $z=0$ in adiacenza di P_0 conservi inalterata la sua giacitura.

La prima condizione impone che in P_0 siano nulle le tre componenti di spostamento u, v, w ; le altre due comportano ovvie relazioni tra le derivate di u, v e w secondo la direzione n e la sua normale n' .

Se, come si usa più comunemente, si assume P_0 nell'origine O ed n coincidente con x , la seconda condizione comporta che in O stesso siano nulle le derivate $\frac{\partial v}{\partial x}$, e $\frac{\partial w}{\partial x}$; ed infine la terza condizione in

unione colle altre, richiede che ancora in O sia nulla pure la $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Riassumendo, le condizioni di vincolo ora descritte complessivamente impongono, che per $x=y=z=0$, si abbia:

$$u=v=w=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=0. \quad (164)$$

Com'è ben noto, lo spostamento rigido arbitrario, introdotto con una eventuale variazione della scelta dell'elemento di area $z=0$ vincolato, è privo di effetto sullo stato di tensione.

Ne consegue che noi possiamo sovrapporre gli effetti di deformazione e di tensione ricavati da casi particolari trattati anche con diverse condizioni di vincolo.

D'altra parte, poichè queste ultime altro non sono sostanzialmente che delle condizioni analitiche o geometriche, atte a definire, a meno di uno spostamento rigido, la posizione del cilindro deformato, noi potremmo, ove ci riuscisse comodo ed opportuno, scegliere il punto vincolato P_0 , (sia pure coincidente con l'origine O), anche eventualmente *situato fuori dell'area limitata della sezione $z=0$* del cilindro, sempre quando gli spostamenti u, v, w vengano rappresentati con *funzioni definite anche fuori dell'area suddetta*.

Così la generalità del problema non subisce restrizioni per la scelta dell'elemento vincolato.

48. IL POTENZIALE ELASTICO, LE TENSIONI PRINCIPALI E LE LINEE ISOSTATICHE NEL CASO GENERALE DEL PROBLEMA DI SAINT-VENANT.

È opportuno poi esprimere fin d'ora, per il caso qui considerato, il potenziale elastico definito al N.º 29. p. 22

Ricordiamo l'espressione del potenziale per i solidi elastici isotropi (97), stabilito al N.º 31, pag. 103: tale espressione, trasformata mediante le (153) e (156), diviene:

$$2\Phi = \left(\lambda \frac{(m-2)^2}{m^2} + 2G \frac{m^2+2}{m^2} \right) \varepsilon_z^2 + G(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2);$$

in questa, ponendo in luogo di λ e $G=\mu$ i loro notissimi valori dati dalle (61) e (62), si trova che il coefficiente di ε_z^2 è identicamente uguale ad E ; perciò l'ultima relazione diventa:

$$\Phi = \frac{E}{2} \varepsilon_z^2 + \frac{G}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (165)$$

Facciamo ora, per il caso qui studiato del problema di Saint-Venant, la ricerca delle tensioni principali in un punto generico del cilindro, e vediamo alcune proprietà delle linee isostatiche.

Da quanto precede risulta che su di un elemento di sezione normale (o retta) del cilindro, (ossia normale all'asse z) si sviluppa, oltre alla tensione normale σ_z , anche e solo una tensione tangenziale totale, che indicheremo con τ_z , la quale è la risultante delle due τ_{yz} e τ_{xz} , agenti sullo stesso elemento di sezione normale e dirette secondo i due assi x ed y .

In un punto O' generico della sezione retta consideriamo una terna di assi $x' y' z'$ uscenti da O' , e scelti come segue: l'asse x' diretto come la τ_z ora definita, nel piano della sezione retta; l'asse y' normale ad x' , e contenuto nella sezione retta; l'asse z' parallelo all'asse z del cilindro.

Se, riferendoci a questa nuova terna di assi, studiamo la ripartizione delle tensioni in un piccolissimo intorno del punto O' , per quanto precede, troviamo diverse da zero le sole componenti speciali $\sigma_z (= \sigma_{z'})$ e $\tau_z (= \tau_{z'o'})$ sopra dette: invero le altre tensioni normali sono nulle per l'ipotesi restrittiva introdotta colle (150), ed inoltre per la particolare scelta degli assi $x' y' z'$ risulta:

$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'z'} = 0.$$

Perciò ci troviamo in presenza di una distribuzione a due dimensioni, come quella considerata al N.º 19, pag. 59, corrispondente al caso in cui si annulla il determinante Δ , che compare nella relazione (40). Infatti, pure nel caso qui considerato esiste un elemento — cioè il piano $x' z'$ — sul quale non si esercitano tensioni di sorta, nè normali, nè tangenziali; (come s'era detto a pag. 59).

In tal caso, (secondo quanto pure si disse a pag. 59), la tensione totale su un elemento comunque orientato nell'intorno di O' risulta parallela al piano $x' z'$ della distribuzione a due dimensioni, quindi nello stesso piano $x' z'$ devono essere contenute due delle tensioni principali in O' (v. N.º 21), mentre la terza di esse, la quale dovrebbe essere normale a detto piano, risulta nulla.

Secondo le prime due delle (151) si ha poi che le tensioni tangenziali τ_{yz} e τ_{xz} e quindi la loro risultante τ_z sono indipendenti dalla z , e perciò restano le stesse in tutti i punti di qualsiasi retta parallela all'asse z . Ne consegue che per tutti i punti dell'asse z' sopra descritto il piano della distribuzione a due dimensioni assunta dalle tensioni interne è lo stesso piano $x' z'$, di cui si riconobbe tale proprietà per il punto O' .

53
 di un piano
 normale

Si osservi poi che la τ_z è un vettore definito in ogni punto di una qualunque sezione trasversale; perciò in ciascuna di tali sezioni esiste una semplice infinità di linee che sono le *traiettorie*, ovvero *linee di forza* per detta distribuzione vettoriale; e dato che tale distribuzione della τ_z non dipende da z , ne consegue che tra tali traiettorie o linee di forza della τ_z , quelle che escono da punti di una stessa retta (come z') parallela all'asse z stanno tutte su una stessa superficie cilindrica a generatrici parallele allo stesso asse z .

Da quanto si disse sopra, risulta chiaramente che un qualsiasi piano tangente a detto cilindro costituisce il piano della distribuzione a due dimensioni delle tensioni per qualsiasi punto della rispettiva generatrice di contatto. Se ne deduce immediatamente che a detto cilindro sono tangenti le direzioni principali relative a tutti i suoi punti, e perciò la superficie del cilindro stesso contiene tutte le linee isostatiche uscenti dai suoi punti, tangenzialmente alla superficie stessa, le quali costituiscono sulla detta superficie un doppio sistema di traiettorie ortogonali (v. N.º 23).

Riassumendo, possiamo dunque enunciare che, *nel solido elastico cilindrico o prismatico che soddisfa alle condizioni del problema di Saint-Venant, la distribuzione delle tensioni interne si riduce in ogni punto a due sole dimensioni; le linee isostatiche, secondo le quali si trasmettono le tensioni principali diverse da zero, si riducono a due sole congruenze mutuamente ortogonali, e sono tutte ordinatamente contenute sulle superficie cilindriche a generatrici parallele all'asse z , aventi per linee direttrici le traiettorie delle tensioni tangenziali totali τ_z nei punti di una qualsiasi sezione retta del solido cilindrico, di modo che ciascuna di dette superficie cilindriche contiene due schiere semplicemente infinite e mutuamente ortogonali di tali linee isostatiche.*

Per brevità di linguaggio dette superficie cilindriche si potrebbero denominare le *superficie cilindriche di forza delle τ_z* , ovvero anche le *traiettorie cilindriche delle τ_z* .

Delle tre congruenze mutuamente ortogonali, di cui si è parlato al N.º 23, la terza, ortogonale alle prime due, è costituita dalle linee secondo cui si può immaginare si trasmettano le tensioni principali nulle, normali al piano $x' z'$, secondo si disse poco sopra; esse sono in ogni punto ortogonali alle superficie cilindriche di forza delle τ_z , descritte testè, e, per ragioni evidenti [sempre in virtù delle prime due delle (151)] queste linee sono esse pure ordinatamente situate su certe superficie cilindriche a generatrici parallele a z , ed anche sono ordinatamente contenute nei piani delle sezioni rette del cilindro, in

ciascuno dei quali piani esse costituiscono le traiettorie ortogonali alle linee di forza delle tensioni tangenziali τ_z , sopra citate.

Le linee di questa terza congruenza non hanno propriamente il significato fisico e meccanico di vere linee isostatiche, in quanto secondo esse non agiscono tensioni; esse più propriamente si possono considerare come involuipi delle normali agli elementi di area, sui quali non si esercitano tensioni.

Ed ora possiamo passare alla determinazione delle tensioni principali diverse da zero situate, come sappiamo, nel piano $x' z'$ e ne esprimeremo le intensità, ed i parametri di direzione in funzione delle sole componenti speciali di tensione non nulle, σ_z e τ_z .

Indicando genericamente con σ_* una tensione principale, di cui siano $\alpha_{x'}$ ed $\alpha_{z'}$, i coseni direttori nel piano $x' z'$, in virtù del noto teorema di Cauchy [v. N.º 17, formola (35)] si hanno le relazioni seguenti :

$$\tau_z \alpha_{z'} = \sigma_* \alpha_{x'} \quad (166)$$

le quali esprimono che la σ_* è normale all'elemento di superficie sul quale essa si esercita, e costituiscono la forma particolare che assumono le (55) del N.º 21, per essere ora nulle 4 delle 6 componenti speciali di tensione (o pressione).

Perchè le (166) siano soddisfatte da valori non tutti nulli delle $\alpha_{x'}$ ed $\alpha_{z'}$ (le quali, come è noto, non possono essere simultaneamente nulle), occorre e basta che sia :

$$\begin{vmatrix} -\sigma_* & \tau_z \\ \tau_z & \sigma_z - \sigma_* \end{vmatrix} = 0, \quad (167)$$

la quale è la forma particolare assunta nel nostro caso dall'equazione (56) al N.º 21.

Essa, sviluppata, ci fornisce l'equazione quadratica seguente :

$$\sigma_*^2 - \sigma_z \sigma_* - \tau_z^2 = 0$$

Indichiamo con σ_1 e σ_2 le due radici di questa equazione; quindi si ha :

$$\begin{matrix} \sigma_1 = \\ \sigma_2 = \end{matrix} \left\{ \frac{\sigma_z \pm}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_z^2} \right. \quad (169)$$

ove converremo che il segno + valga per σ_1 e quello - per σ_2 .

ed i piani
normali ad σ_*
sono normali a σ_*

$\tau_z \alpha_{z'} = \sigma_* \alpha_{x'}$
 $\tau_z \alpha_{x'} + \sigma_z \alpha_{z'} = \sigma_* \alpha_{z'}$
 $\sigma_*^2 - \sigma_z \sigma_* - \tau_z^2 = 0$
 $\sigma_* = \frac{\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}}{2}$

vedi sistema 2º p. 58

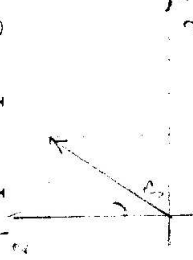
Risulta súbito dalla (169) che le due tensioni principali σ_1 e σ_2 sono sempre reali (come già si sapeva secondo il N.º 21 a pag. 67), ed inoltre che esse sono sempre di segno contrario, per le notissime proprietà delle equazioni quadratiche λ si ha poi:

$$\boxed{\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_z; \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\tau_z^2} \quad (170)$$

Notiamo che queste due ci esprimono rispettivamente gli invarianti fondamentali lineare e quadratico, definiti dalle (57) N.º 21, pag. 68.

In séguito possiamo ricavare i parametri di direzione delle due tensioni principali, come tali possiamo assumere le inclinazioni i_1 ed i_2 delle dette tensioni rispetto all'asse z (o z'), ossia le tangenti trigonometriche degli angoli che esse formano coll'asse z ; abbiamo allora evidentemente, come inclinazione della tensione principale generica σ_* :

$$i_* = \frac{\alpha_{z'}}{\alpha_{z''}} \quad (171)$$



$$\alpha_{z'} = \cos \beta = \cos \alpha$$

$$\alpha_{z''} = \sin \beta = \sin \alpha$$

e quindi dalla prima delle (166) si deduce:

$$i_* = \frac{\tau_z}{\sigma_*} \quad (172)$$

Ora sostituendo separatamente in questa i due valori delle tensioni principali dati dalla (169), si ottiene:

$$i_1 = \frac{\tau_z}{\sigma_1}; \quad i_2 = -\frac{\tau_z}{\sigma_2} \quad (173)$$

Da queste, tenendo presente la seconda delle (170), ricaviamo:

$$i_1 i_2 = -1 \quad (174)$$

come deve essere, poichè le due direzioni principali devono risultare mutuamente ortogonali.

Dalle stesse (173) e (170) si ricava poi:

$$i_1 + i_2 = -\frac{\sigma_z}{\tau_z} \quad (175)$$

Orbene dalle (174) e (175) risulta che le i_1 ed i_2 sono le radici dell'equazione quadratica:

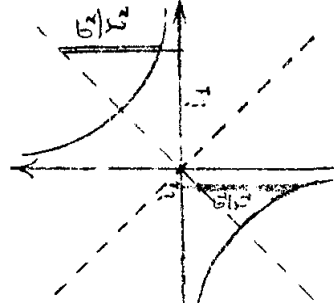
$$i_*^2 + \frac{\sigma_z}{\tau_z} i_* - 1 = 0, \quad (176)$$

la quale, d'altra parte, si può pure dedurre dalle (166), eliminando tra esse la σ_* e tenendo conto della (171).

La (176) si può anche scrivere nella forma seguente: $\det. \begin{pmatrix} i_* & 1 \\ 1 & \frac{\sigma_z}{\tau_z} i_* \end{pmatrix} = 0$.

$$\boxed{\frac{1}{i_*} - i_* = \frac{\sigma_z}{\tau_z}}, \quad (177)$$

la quale si presta ad una soluzione grafica molto semplice, in quanto che il termine $\frac{1}{i_*}$ si può rappresentare coll'ordinata di un'iperbole equilatera, in funzione di i_* considerata come ascissa, ed inoltre il termine i_* si può rappresentare coll'ordinata di una retta uscente dall'origine ed inclinata a 45° rispetto agli assi ortogonali, asintoti della detta iperbole.



Tale rappresentazione grafica può essere adoperata per determinare con costruzioni ovvie le i_1 ed i_2 , dato il rapporto $\frac{\sigma_z}{\tau_z}$, e ciò

ci conduce al tracciamento delle linee isostatiche con procedimento grafico, progressivo, cioè tracciando ordinatamente di dette linee successivi elementi piccolissimi, assimilabili ad infinitesimi; può essere pure impiegata per determinare il rapporto $\frac{\sigma_z}{\tau_z}$ quando sia data i_1 (e quindi i_2), e così quando si conoscano le leggi di ripartizione della σ_z e τ_z , si possono trovare i luoghi dei punti ove le i_1 e i_2 hanno dati valori costanti: tali luoghi, sulle dette *traiettorie cilindriche* delle τ_z , costituiscono delle linee, per le quali chi scrive propone la denominazione di linee *isocline rispetto alle isostatiche*, (notando esplicitamente come sia da evitarsi l'equivoco di ritenere che tale denominazione significhi: linee ugualmente inclinate rispetto alle isostatiche; il significato vero risulta da quanto è detto sopra).

Dette linee isocline possono riuscire utili per un tracciamento grafico delle linee isostatiche più approssimato di quello sopra indicato; ed inoltre esse assumono particolare importanza per le travi a sezione rettangolare costante, sollecitate da forze contenute nel piano individuato dalle mediane omologhe della sezione trasversale, o, co-

munque, per una qualsiasi lastra piana, a contorno generico, e sollecitata da forze contenute nel piano bisecante ovunque lo spessore della lastra. In questi casi particolari semplici, ma specialmente interessanti per le applicazioni, le dette linee *isocline* si possono mettere in evidenza e rilevare direttamente coi già citati esperimenti sulla doppia rifrazione accidentale dei solidi trasparenti, amorfi, assoggettati a sforzi (v. N.º 25). Su questo argomento ritorneremo meglio in séguito, dimostrando ciò che ora è solo qui riportato a titolo di notizia; però sin d'ora si è ritenuto opportuno accennare l'argomento stesso per mettere subito in rilievo l'utilità tecnica della considerazione delle dette linee *isocline*.

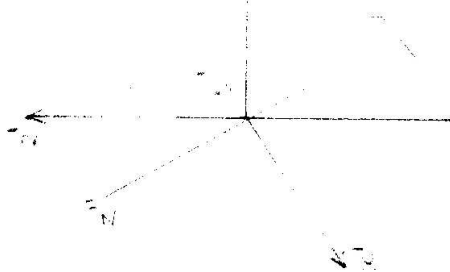
Vediamo ora, nel caso del problema qui trattato, come si presentano le quadriche ed i coni attinenti alla distribuzione delle tensioni, che furono studiati al N.º 20.

Poichè ora la distribuzione delle tensioni è a sole due dimensioni nel piano $x'z'$, è facile verificare che quelle quadriche si specializzano in coniche contenute nel piano $x'y'$ o in cilindri quadrici a generatrici normali a detto piano, aventi per assi le due rette di azione delle tensioni principali σ_1 e σ_2 e quei coni si specializzano in coppie di rette, pure contenute nel piano $x'y'$, ovvero in coppie di piani normali a questo e passanti per il punto O' ; tali rette o tali piani sono sempre reali perchè le tensioni principali sono di segno contrario come risulta dalla (169), o dalla seconda delle (170).

L'ellissoide di Lamé dà luogo ad un'ellisse avente per semiassi le due tensioni principali σ_1 e σ_2 , che si potrà dire l'*ellisse di Lamé*. Il cono di scorrimento rappresentato dall'equazione (47), N.º 20, pag. 63 diviene una coppia di rette, alla quale appartiene certo la retta z' , poichè sugli elementi contenenti tale retta agiscono solo tensioni tangenziali ad essa parallele e non agisce invece nessuna tensione normale; e giacchè il cono suddetto ha per assi le rette principali, l'altra retta della coppia sarà la z'' , simmetrica della z' rispetto a ciascuna delle rette d'azione delle σ_1 e σ_2 , (in modo che queste siano le due bisettrici dell'angolo completo formato dalle due rette z' e z'').

Quindi le quadriche di pressione (o tensione), dette anche quadriche di direzione, divengono qui delle iperboli aventi per asintoti le rette z' e z'' ora considerate.

Per ragioni analoghe si vede subito che il cono delle componenti normali nulle si specializza nella coppia di piani normali alle rette z' e z'' sopra definite; i quali perciò si tagliano secondo l'asse y' , ed hanno per traccie sul piano $x'z'$ lo stesso asse x' e la retta x'' simmetrica di questa rispetto a ciascuna delle tensioni principali σ_1 e σ_2 ;



ne consegue che le quadriche delle componenti normali divengono qui dei cilindri iperbolici, a generatrici normali al piano $x' y'$, asintotici alla coppia di piani ora definita; tali cilindri hanno per direttrici sul piano $x' z'$ le iperboli asintotiche alla coppia di rette $x' x''$ sopra dette.

Ulteriori ovvie specializzazioni si hanno quando sia $\sigma_z = 0$, ovvero $\tau_z = 0$.

DILATAZIONI PRINCIPALI — EQUAZIONI DI STABILITÀ. — Per quanto riguarda l'analisi della deformazione nel problema qui trattato dobbiamo ancora aggiungere che le dilatazioni principali in O' si potrebbero ricavare dall'equazione cubica (25), N.º 10, pag. 32, tenendo presente le (153), (154) e (155).

In tal modo è facile verificare che la detta equazione cubica (25) si sdoppia in una quadratica ed una lineare, le quali, risolte, dànno:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left| \frac{m-1}{2m} \varepsilon_z \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\varepsilon_z^2 + 4 \left(\frac{m}{2(m+1)} \right)^2 \gamma_z^2} \right. \\ \varepsilon_2 &= \left. \varepsilon_z \right. \end{aligned} \quad (178)$$

(avendo posto: $\gamma_z^2 = \gamma_{zx}^2 + \gamma_{yz}^2$, o in altri termini essendo γ_z lo scorrimento totale, risultante dei due scorrimenti parziali γ_{zx} e γ_{yz}), e

$$\varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_z}{m}. \quad (179)$$

Sostituiti questi valori nelle (24) del N.º 10 si potrebbero ricavare i coseni direttori delle rette principali, nel modo detto a pag. 47.

Ma poichè qui ci limitiamo al caso del corpo isotropo, per quanto già si disse al N.º 27, pag. 79, le rette principali di deformazione coincidono pure qui sempre colle rette principali di tensione: e queste ultime sono già state determinate poco sopra.

Ciò posto, le dilatazioni principali si possono ricavare in funzione delle tensioni principali mediante le (68) a pag. 80, N.º 27, le quali qui si trasformano introducendo le tensioni in luogo delle pressioni, e ricordando che si è trovato $\sigma_3 = 0$; si ottiene perciò:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m} \right); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m} \right); \quad \varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{Em}; \quad (180)$$

Di qui, sostituendo i valori dati dalle (169), e dalla prima delle (170) si ottiene:

$$\varepsilon_1 = \left\{ = \frac{1}{E} \left[\frac{m-1}{2m} \sigma_z \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \right] \right. \quad (181)$$

$$\varepsilon_2 = \left\{ = -\frac{\sigma_z}{Em} \right. \quad (182)$$

e queste coincidono colle (178) e (179), in virtù della (154) e della (148).

Poichè le dilatazioni principali sono tutte e tre diverse da zero le quadriche di deformazione ed il cono delle dilatazioni nulle (v. N.º 9) non degenerano *in generale*, e restano a tre dimensioni. Inoltre poichè le ε_1 ed ε_2 sono di segno contrario secondo la (181), ne consegue che il cono delle dilatazioni nulle è sempre reale, e le quadriche di deformazione sono iperboloidei ad una od a due falde ad esso asintotiche.

Essendo $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m}$ e $\gamma_{xy} = 0$, ne consegue che in tutte le direzioni uscenti dal punto generico O' e normali all'asse z le dilatazioni sono tutte uguali a $\varepsilon_n = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m}$. Ne risulta che le quadriche ed il cono ora detti sono segati secondo cerchi dai piani normali all'asse z .

Se in particolare è $\gamma_z = 0$, dette superficie sono di rotazione intorno all'asse z' .

Se poi invece è $\varepsilon_z = 0$, si ha pure $\varepsilon_3 = 0$ e perciò le quadriche degenerano in cilindri iperbolici ed il cono in una coppia di piani, com'è facile verificare.

Le dilatazioni principali hanno nei problemi tecnici una grande importanza. Infatti secondo i più attendibili risultati sperimentali si trovò che, per assicurare la buona conservazione di un materiale, occorre evitare la produzione di deformazioni permanenti, e quindi occorre, meglio che alle tensioni interne, porre un limite alle dilatazioni principali massime.

Anzi, poichè nei casi di sollecitazione semplice, cioè quando esiste la sola σ_z o la sola τ_z , è invalso nella tecnica l'uso di assegnare un limite superiore per ciascuna di dette tensioni stesse, il quale limite si suol chiamare carico di sicurezza, così anche nei casi di sollecitazione composta, in cui la simultanea presenza della σ_z e della τ_z provoca la formazione delle dilatazioni principali, si usa, per uniformità, trasferire queste dilatazioni in tensioni moltiplicandole per il modulo di elasticità E , ed in séguito si impone che i valori massimi di tali tensioni non superino i rispettivi carichi di sicurezza.

Detti prodotti $E\varepsilon_1$, $E\varepsilon_2$, $E\varepsilon_3$ si dicono tensioni principali ideali.

Ideali perchè non effettive, perchè non agiscono effettivamente

su un qualsiasi elemento piano nell'intorno considerato di O' ; esse sono delle tensioni normali, le quali, se agenti da sole separatamente nelle rispettive direzioni principali produrrebbero delle dilatazioni lineari uguali alle dilatazioni principali prodotte dalla effettiva distribuzione di forze esterne.

Esse quindi servono a costituire le equazioni di stabilità nei casi di sollecitazioni composte.

A questo proposito dobbiamo ancora notare che come carico di sicurezza per i vari materiali si assume sempre una frazione del carico limite di elasticità, od anche del carico di snervamento. Quest'ultimo è un valore della tensione interna normale a trazione od a compressione, oltre il quale il materiale comincia a snervarsi, ossia a subire delle grandi deformazioni permanenti e delle brusche cadute e riprese di resistenza.

La frazione ora detta si chiama anche il coefficiente di sicurezza, e si assume, in base a risultati sperimentali, vario secondo i diversi materiali impiegati, compreso tra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{10}$, dai materiali più compatti ed omogenei, a quelli di struttura più varia ed eterogenea.

Dobbiamo pure notare che alcuni materiali da costruzione (es. ferro, acciaio, rame fuso, o elettrolitico, pietre durissime e compatte, ecc.) resistono ugualmente a trazione come a compressione: in tal caso un dato materiale ha un solo ed unico carico di sicurezza, che per lo più si indica con k , e quindi si scrive un'unica equazione di stabilità uguagliando al carico di sicurezza il valore assoluto della tensione principale ideale numericamente massima.

Altri materiali di struttura eterogenea (es. ghisa, legnami, pietre frantumate o stratificate, ecc.) resistono diversamente a trazione ed a compressione, e perciò per ciascuno di essi abbiamo due diversi carichi di sicurezza, uno k' per la trazione, l'altro k'' per la compressione; in tal caso bisogna scrivere due distinte equazioni di stabilità, uguagliando separatamente ai due carichi di sicurezza k' e k'' il valore massimo e quello minimo (massimo negativo) rispettivamente delle tensioni principali ideali prese ordinatamente coi relativi segni.

A scopo di chiarezza notiamo esplicitamente che il carico di sicurezza è una forza divisa per un'area; perciò la sua unità di misura è costituita dall'unità di forza divisa per l'unità di area.

Su questi concetti ritorneremo nel fare delle applicazioni concrete, ed inoltre quando, in altra parte del libro, parleremo dello studio sperimentale dei materiali da costruzione. Per ora ci basta accennare infine che per i materiali da costruzione più usuali, in tutti i manuali tecnici sono riportati i valori dei carichi di sicurezza sopra detti.

49. GENERALITÀ SULLE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI SAINT-VENANT, E SULLA LORO PORTATA PRATICA.

Tra breve noi studieremo alcune deformazioni particolari del nostro cilindro (o prisma), le quali rappresentano varie soluzioni particolari del problema di Saint-Venant sopra descritto.

A tale scopo noi useremo il seguente procedimento: sceglieremo *a priori* la deformazione assegnando le u , v , w in funzione delle coordinate; verificheremo che tali funzioni, in tutto lo spazio occupato dal cilindro, soddisfacciano alle equazioni differenziali fondamentali del problema (159) ÷ (163) (inclusivamente); inoltre che esse soddisfacciano alla terza delle (149) [interpretata mediante le (148)], sulla superficie laterale del cilindro o prisma, e che infine soddisfacciano alle condizioni di vincolo (164) nell'origine delle coordinate.

Ciò fatto, per mezzo delle (148)^{1, 2, 3, 4, 5} e della (154) calcoleremo le sole tre componenti speciali di tensione diverse da zero, σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} . Di queste, come già sappiamo, le due ultime non dipendono da z , in virtù delle prime due delle (151); è funzione della z la sola σ_z .

Or bene per $z=l$ le σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} dovranno essere uguali alle analoghe componenti speciali di tensione delle forze esterne distribuite sulla base $z=l$ del cilindro (o prisma); mentre che sulla base $z=0$ le dette componenti speciali di tensione delle forze esterne dovranno per l'equilibrio essere in ogni punto *uguali ed opposte* alle omologhe σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} delle tensioni interne. p. 135

Così dalla deformazione, si risale al sistema di forze esterne da applicare sulle due basi del cilindro per intrattenere nel cilindro stesso la data deformazione.

Ed allora, in virtù dell'unicità della soluzione delle equazioni generali dell'equilibrio elastico, (v. N.º 33, pag. 106 e seg.) si può ritenere che inversamente, se sono applicate sulle basi del cilindro le distribuzioni di forze descritte, la deformazione da essa prodotta sia quella stessa che prima si considerava come data.

Il metodo qui esposto, come si vede, è *indiretto*, e non può servire che a giustificare alcune soluzioni note, od a verificare altre soluzioni che eventualmente si ritengano vere.

Tale metodo però presenta il vantaggio notevole di evitare le difficoltà analitiche, ed i lunghi e laboriosi calcoli che si richiederebbero per l'integrazione diretta e generale delle equazioni differenziali fondamentali (159) ÷ (163) inclusivamente, (equazioni differenziali alle derivate parziali).

Detto metodo si presta bene per verificare direttamente tutti i



casì particolari più interessanti ed importanti per le applicazioni pratiche.

Questi casi particolari poi si possono studiare come simultaneamente esistenti in virtù del principio della sovrapposizione degli effetti, e quindi servono a considerare e trattare per approssimazione dei problemi più complessi; e ciò per effetto del fatto seguente, giustificato specialmente per via sperimentale:

La sostituzione di un dato sistema di forze applicato ad una delle basi del cilindro (o prisma) con un altro staticamente equivalente, cioè avente uguali caratteristiche, ovvero, — ciò che equivale, — la stessa forza e la stessa coppia risultanti, per quanto differente nel modo di applicazione e nella legge di ripartizione, non ha influenze sensibili nei punti del cilindro situati dalla base suddetta a distanze minori di un valore, il quale può essere anche relativamente molto piccolo.

Per maggiore chiarezza dichiariamo esplicitamente che la locuzione *staticamente equivalente* vuol significare *equivalente dal punto di vista della statica dei sistemi rigidi*; poichè appunto in tale Capitolo della meccanica, dei sistemi di forze interessano soltanto le caratteristiche, o gli elementi della forza e coppia risultante, e non la legge di ripartizione o distribuzione.

La verità, od almeno la verosimiglianza di quanto è stato testè affermato, si può riconoscere intuitivamente col ragionamento seguente:

La sostituzione di cui là si parla può idealmente venir realizzata aggiungendo sulla base considerata del cilindro già deformato per l'azione della data sollecitazione, un nuovo sistema di forze *in equilibrio*, ottenuto sovrapponendo in ciascun punto alle componenti speciali di tensione, relative alla seconda sollecitazione, quelle relative alla prima, cambiate di segno.

A questo nuovo sistema di forze, supposto agente da solo, si devono attribuire le differenze dei due stati di deformazione sopra considerati, ma tale sistema di forze si trova raccolto tutto sopra una delle basi del cilindro, il quale poi in ogni altra sua parte resta libero da forze esterne; perciò è molto naturale ammettere che l'influenza del detto sistema di forze, la quale localmente potrebbe essere pure molto notevole, non si estenda che ad una piccola porzione del cilindro, e cessi perciò di farsi sentire in punti sufficientemente lontani dalla base sollecitata.

Resta ben inteso che questo ragionamento intuitivo non è una dimostrazione rigorosa: il miglior modo per convincersi della legittimità dell'affermazione suddetta, consiste nel ricorrere all'esperimento. Ed invero noi ci convinciamo senz'altro della verità di quanto più sopra è affermato, ogni qual volta, con una delle apposite mac-

$$1 = 2$$

$$2 - 1 = 0$$

$$= 1 + (2 - 1) = 2$$

però (1) = 2
 (2) = 1 + (2 - 1) = 2

chine per prove di elasticità e resistenza dei materiali, noi sperimentiamo una semplice provetta cilindrica o prismatica. La provetta si assicura alle staffe della macchina di prova in corrispondenza dei suoi due estremi; ma le azioni esterne non si distribuiscono solo sulle basi della provetta: più frequentemente interessano pure una certa zona della superficie laterale; ciò in modo vario da una macchina ad un'altra, ed anche da un esperimento ad un altro.

Ciò non ostante, i più delicati strumenti di misura ci rivelano che non esiste alcuna influenza della varia ripartizione delle forze, ad una distanza dagli attacchi uguale o poco superiore alla maggiore dimensione trasversale del cilindro o prisma sperimentato.

Altre conferme sperimentali di questo asserto ci vengono fornite in modo singolarmente elegante e probativo dalle già citate ricerche sulla doppia rifrazione accidentale nei solidi trasparenti soggetti a sforzi, le quali ci forniscono pure il mezzo di controllare se e quando il problema di Saint-Venant sia applicabile in casi concreti, nei quali le ipotesi fondamentali non siano rigorosamente soddisfatte.

Sulle modalità di tali esperimenti torneremo esplicitamente più tardi, come già altrove si disse; per ora ci basta l'aver accennato come da esse si possa ricavare una conferma sperimentale assai conclusiva della verità dell'asserto poco sopra enunciato.

X CARATTERISTICHE DEI SISTEMI DI FORZE ESTERNE.

Ciò posto è ora facile rendersi ragione dell'importanza delle semplificazioni che nella soluzione del nostro problema sono apportate dalle considerazioni svolte or ora.

Consideriamo una qualsiasi sezione retta del cilindro, la quale abbia la quota z ; in ogni punto di essa le tre componenti speciali di tensione non nulle σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} , sono le componenti secondo i tre assi z , y , x della tensione unitaria relativa all'elemento della stessa sezione retta, contiguo al detto punto.

Perciò se in corrispondenza della detta sezione s'immagina di tagliare in due il cilindro, le σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} , ci individuano completamente, punto per punto il sistema di tensioni interne, che, nello stato di equilibrio, la porzione del cilindro situata, rispetto alla data sezione retta, dalla parte delle z positive, trasmette alla rimanente porzione.

Quali caratteristiche di questo sistema di tensioni, o, come si suol dire più brevemente, della sollecitazione relativa a quella sezione, noi potremo assumere i seguenti sei integrali di superficie, estesi a tutta l'area A della detta sezione:

una tendenza a far rotare la sezione intorno ad un asse giacente nel piano stesso della sezione; essi tendono quindi ad inflettere il cilindro; perciò essi si chiamano *momenti flettenti*. Il loro momento risultante, avente per vettore - momento la somma geometrica dei loro vettori - momenti, si chiama il *momento flettente complessivo o totale*, ed ha per valore assoluto:

$$M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (185)$$

Infine, ancora nell'ipotesi suddetta, l'ultima caratteristica M_z rappresenta il momento del dato sistema di tensioni interne rispetto all'asse del cilindro; esso momento tende a far rotare la sezione nel suo piano, ossia tende a provocare nel cilindro *una torsione*; perciò tale momento vien designato come il *momento torcente*.

Definite così le caratteristiche della sollecitazione relativa ad una sezione retta generica del cilindro, vediamo come esse varino in funzione della quota z della detta sezione.

Siano:

$$N_{z, l}; T_{x, l}; T_{y, l}; M_{x, l}; M_{y, l}; M_{z, l}$$

le analoghe caratteristiche relative alla sezione estrema (base) del cilindro, per $z=l$; tali caratteristiche, per l'equilibrio, dovranno risultare uguali alle analoghe caratteristiche del sistema di forze esterne applicate sulla detta base del cilindro.

Ora, per trovare una relazione tra queste caratteristiche e quelle relative alla sezione generica di quota z , al tronco compreso tra questa sezione e la base $z=l$ applichiamo le equazioni di equilibrio dei corpi rigidi, *referendoci però alla forma primitiva cilindrica del solido*, e cioè ritenendo che le deformazioni siano così piccole da poter trascurare completamente la loro influenza sulla configurazione delle rette d'azione delle forze esterne applicate. Ciò è lecito quasi sempre, salvo in alcuni casi speciali, che per ora escludiamo, e che poi verranno esplicitamente considerati, e trattati separatamente col genere di approssimazione da essi richiesto. Tali casi di eccezione sono quelli in cui non è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti, già accennati a pag. 77 e 78 al N.º 26.

Applicando dunque le equazioni della statica dei sistemi rigidi al tratto di cilindro suddetto, compreso tra le sezioni di quota z e di quota l , colle notazioni introdotte, avemo:



$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_{x(t)} ; T_x = T_{x(t)} ; T_y = T_{y(t)} \\ M_x &= M_{x(t)} - T_y(l-z) ; M_y = M_{y(t)} + T_x(l-z) \\ M_z &= M_{z(t)} \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Da queste relazioni si deduce subito che nel nostro cilindro sollecitato da forze esterne date solo sulle due basi, lo sforzo normale, gli sforzi taglianti ed il momento torcente restano costanti per tutte le sezioni trasversali rette, mentre i momenti flettenti variano linearmente colle distanze della sezione retta generica dalle due basi, sezioni estreme del cilindro.

Ne consegue:

Date le sei caratteristiche del sistema di forze esterne applicate alla base libera del cilindro, risultano determinate le sei caratteristiche del sistema di tensioni interne relative ad una sezione retta qualsiasi, e viceversa.

Tutto questo, messo in relazione con quanto si spiegò più sopra a proposito della influenza della ripartizione delle forze esterne sulle basi del cilindro, ci permette di affermare, come conclusione:

prescindendo da due regioni limitate alle immediate vicinanze delle due basi del cilindro, lo stato di tensione in corrispondenza di una sezione retta qualunque riesce completamente determinato quando siano date le sei caratteristiche della sollecitazione ad essa relativa.

Questo risultato presenta la più alta importanza pratica, ed è suscettibile di venir applicato, almeno per approssimazione, anche a problemi assai più complessi di quelli che finora abbiamo considerati.

Ed appunto nell'aver intuito tale importanza e tale applicabilità, consiste il principale merito del Barré de Saint-Venant.

Il problema dell'equilibrio elastico dei solidi prismatici o cilindrici era stato già tentato nella sua forma più generale da Navier, da Poisson, da Clapeyron e da Lamé.

Anzi quest'ultimo aveva di proposito intrapreso lo studio dell'equilibrio di un prisma rettangolare colle sei faccie cimentate da forze date in modo arbitrario.

Il Lamé però ricercò solamente sempre delle soluzioni rigorose, ma i suoi tentativi furono numerosi, lunghi, ed altrettanto infruttuosi. Tuttavia egli continuò ad annettere al suo problema la massima importanza, volle a più riprese richiamare su di esso l'attenzione degli studiosi di tutto il mondo, ed indusse l'Académie des Sciences di Parigi a proporlo come argomento dei suoi premi più cospicui, (negli anni 1846 ÷ 1858).

Barré de Saint-Venant fu il primo a rendersi conto della scarsa e limitata utilità che il problema di Lamé, anche se rigorosamente risoluto, avrebbe avuto nella pratica.

In una nota alla sua traduzione del classico trattato del Clebsch « *Théorie de l'élasticité des corps solides* » (trad. 1883, Paris), il Saint-Venant osserva giustamente che, se si eccettua il solo caso della pressione uniforme prodotta da un fluido, i dati stessi del problema di Lamé, ossia le forze esterne distribuite punto per punto sulle sei faccie del prisma, non si conoscono mai completamente nella pratica; tali forze infatti nascono sempre dal contatto del corpo dato con altri corpi; le modalità di tale contatto e conseguentemente la legge di ripartizione delle forze trasmesse, dipendono dallo stato delle superficie dei corpi, come pure dalla natura dei materiali di cui essi sono costituiti.

Perciò le condizioni ai limiti (in superficie) nel detto problema di Lamé non potranno mai essere assegnate col dovuto rigore, in relazione colle condizioni concrete, poichè delle azioni esterne applicate alle sei faccie del prisma noi non conosceremo in pratica mai la legge di distribuzione vera ed effettiva, ma soltanto le forze e le coppie risultanti complessive.

Una siffatta conoscenza delle forze date è sufficiente allora e solo allora, quando il problema viene limitato nel modo genialmente ideato dal Saint-Venant, e da noi studiato nei precedenti numeri di questo capitolo.

Dalle osservazioni ora fatte noi possiamo concludere che la soluzione a cui possiamo giungere col procedimento sin qui esposto nelle sue linee generali, è non soltanto tale da bastare alle esigenze della pratica, ma è anche, nella maggior parte dei casi concreti, tutto ciò che in pratica si possa desiderare di meglio.

Nei numeri seguenti noi svilupperemo in tutte le sue conseguenze pratiche il detto procedimento basato sulla soluzione indiretta del problema di Saint-Venant.