CAPITOLO V.

TEOREMI GENERALI SUL LAVORO NEI SOLIDI ELASTICI ED APPLICAZIONI VARIE.

Dobbiamo ora esporre alcuni teoremi e principî generalissimi, valevoli perciò anche per i solidi non isotropi.

Essi sono importantissimi, sia per il contributo fondamentale ch'essi portano alla teoria dell'elasticità, sia per le dirette, utilissime applicazioni tecniche ch'essi trovano, particolarmente per lo studio ed il calcolo dei sistemi elastici iperstatici.

36. Teorema di Clapeyron.

Come si disse sopra, in fine al N.° 29, il lavoro L_e compiuto dalle forze esterne contro le forze interne si chiama *lavoro di deformazione.* Esso si può calcolare mediante il potenziale elastico secondo la (92):

$$L_e = \int_V \Phi \, dV \quad .$$

esprimendo poi la Φ secondo la (95), si ottiene:

$$L_e = -\frac{1}{2}\int_V (X_x \varepsilon_x + Y_y \varepsilon_y + Z_z \varepsilon_z + Y_z \gamma_{yz} + Z_x \gamma_{zx} + X_y \gamma_{xy}) \, dV \qquad (107)$$

Per maggior chiarezza, teniamo presente che il lavoro L_e s'intende compiuto dalle forze esterne, mentre queste crescono gradatamente secondo le avvertenze esposte al N.° 29, e mentre i punti di applicazione subiscono gli *spostamenti effettivi,* provocati nel solido elastico dalle stesse forze esterne applicate.

Ora, applicando la (102), in cui si faccia $\varepsilon'_x = \varepsilon_x ; \ldots \gamma'_{yz} = \gamma_{yz} , \ldots$ e tenendo presente ciò che si disse al N.° 32, dalla (107) si deduce súbito:

$L_e = \frac{1}{2} L'_e$ e perciò sussiste il seguente *Teorema di Clapeyron*:

Il lavoro di deformazione di un solido elastico soggetto a forze esterne, (crescenti gradatamente senza l'intervento di fenomeni dinamici), è uguale alla metà del lavoro che le forze stesse compirebbero se durante il prodursi della deformazione da esse provocata esse avessero costantemente tutta la loro intensità finale.

Di questo stesso teorema vogliamo pure esporre un'altra dimostrazione basata su concetti sintetici, ed indipendenti dall'analisi della deformazione e della ripartizione delle forze interne.

Come si vide al N.° 29 il lavoro di deformazione elementare per una variazione infinitesima δ della deformazione, è espresso da:

$$\delta L_e = \int_V \rho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dV + \int_S (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w)\, dS$$
$$+ \Sigma (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w).$$

Ora immaginiamo che le forze esterne date crescano gradatamente dal valore zero al valore finale, in modo che tutte raggiungano sempre simultaneamente dei valori intermedî proporzionali ad un valore finale; ossia supponiamo che se $X' \ldots, X'_n \ldots, F'_x \ldots$ sono i detti valori intermedî, ed $X \ldots X_n \ldots F_x \ldots$ i valori finali, si abbia sempre:

$$X' = \xi X, \ldots;\ X'_n = \xi X_n, \ldots;\ F'_x = \xi F_x, \ldots;$$

essendo ξ un parametro variabile tra 0 ed 1, ed intendendo che in ogni punto del solido le forze raggiungano simultaneamente i valori corrispondenti ad uno stesso valore di ξ. Ciò posto, per la legge di Hooke e per il principio della sovrapposizione degli effetti, (sempre esclusi i casi critici in cui questo non è applicabile), ne risulta che nello stato di equilibrio intermedio corrispondente al valore ξ, anche le componenti di spostamento saranno uguali a ξ volte i loro valori finali, ossia avremo, in tutto il solido ed in superficie:

$$u' = \xi u\ ; \quad v' = \xi v\ ; \quad w' = \xi w$$

e perciò, al variare di ξ:

$$\delta u' = u\delta\xi;\ \ \delta v' = v\delta\xi;\ \ \delta w' = w\delta\xi.$$

Quindi il lavoro di deformazione elementare compiuto per una variazione infinitesima di deformazione $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta w'$, effettuata a partire dallo stato di equilibrio definito dal valore ξ, sarà:

$$\delta L_e = \int_V \rho\,(X'\delta u' + Y'\delta v' + Z'\delta w')\,dV + \int_S (X'_n\delta u' + Y'_n\delta v' + Z'_n\delta w')\,dS$$

da cui sostituendo secondo ciò che si disse or ora, e mettendo in evidenza il fattore $\xi d\xi$, che è costante in tutto il volume V e su tutta la superficie S, si trova:

$$\delta L_e = \xi d\xi \left| \int_V \rho\,(Xu + Yv + Zw)\,dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,dS \right|$$

e per fare la somma di tutti gli incrementi δL_e bisogna integrare rispetto a ξ tra 0 ed 1; così, tenendo presente la (102), si trova ancora:

$$L_e = \frac{1}{2}\,L'_e$$

e così vien dimostrato di nuovo il *Teorema di Clapeyron.*

Tale teorema è molto utile per poter calcolare il lavoro di deformazione direttamente in base alle forze esterne ed agli spostamenti dei loro punti di applicazione, senza dover fare l'analisi della deformazione e delle pressioni interne.

37. Teorema di reciprocità di Betti. Teorema di Maxwell.

Possiamo ora dimostrare un principio di importanza capitale nella teoria dell'elasticità, specialmente notevole per le numerose ed eleganti applicazioni di cui è suscettibile.

Consideriamo due diversi sistemi di forze A e B agenti su uno stesso solido elastico; siano $X'_x \ldots\ Y'_z \ldots$ le componenti speciali di pressione provocate nel solido dal primo sistema A, e siano $X''_x \ldots$ $Y''_z \ldots$ le analoghe componenti dovute al secondo sistema B; analogamente $\varepsilon'_x \ldots\ \gamma'_{yz} \ldots$ siano le componenti della deformazione provocata dal primo sistema, ed $\varepsilon''_x \ldots\ \gamma''_{yz} \ldots$ quelle della deformazione dovuta al secondo sistema.

Indichiamo con L'_{ab} il lavoro svolto dal sistema di forze A, per effetto degli spostamenti provocati dal sistema B; e viceversa con L'_{ba} designiamo il lavoro che le forze del sistema B compiono per effetto degli spostamenti dovuti al sistema di forze A.

Secondo la (102), abbiamo:

$$L'_{ab} = -\int_V (X'_x\varepsilon''_x + Y'_y\varepsilon''_y + Z'_z\varepsilon''_z + Y'_z\gamma''_{yz} + Z'_x\gamma''_{zx} + X'_y\gamma''_{xy})\,dV$$

Ma per le (93) si ha pure:

$$X'_x = -\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x}\right|' \;.\;.\;.\;.\;.\qquad Y'_z = -\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}}\right|' \;.\;.\;.\;.\;.$$

indicando con $\left|\quad\right|'$ il valore che la funzione entro parentesi [ ] assume per i valori $\varepsilon'_x \ldots \gamma'_{yz} \ldots$ delle variabili.

Sostituendo si ottiene:

$$L'_{ab} = \int_V \left\{ \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x}\right|'\varepsilon''_x + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_y}\right|'\varepsilon''_y + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_z}\right|'\varepsilon''_z + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}}\right|'\gamma''_{yz} + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xz}}\right|'\gamma''_{zx} + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xy}}\right|'\gamma''_{xy} \right\} dV.$$

In modo perfettamente analogo si dimostra che il lavoro L'_{ba} si esprime come segue:

$$L'_{ba} = \int_V \left\{ \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x}\right|''\varepsilon'_x + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_y}\right|''\varepsilon'_y + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_z}\right|''\varepsilon'_z + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}}\right|''\gamma'_{yz} + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{zx}}\right|''\gamma'_{zx} + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xy}}\right|''\gamma'_{xy} \right\} dV.$$

avendo indicato con $\left|\quad\right|''$ il valore che la funzione entro parentesi [] assume per i valori $\varepsilon''_x \ldots \gamma''_{yz} \ldots$ delle variabili.

Per una notissima proprietà delle forme algebriche quadratiche risultano uguali tra loro i secondi membri delle due ultime relazioni.

Ed invero le $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x} \ldots\ldots$ sono funzioni algebriche omogenee (forme) lineari nelle $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$: perciò risulta sùbito che gli integrandi nei secondi membri sopra detti sono entrambi uguali al valore che assume quella forma bilineare nelle $\varepsilon'_x \ldots \gamma'_{yz} \ldots ; \varepsilon''_x \ldots \gamma''_{yz} \ldots$ che si dice *emanante* o *polare* della forma quadratica Φ:

$$L'_{ab} = L'_{ba} \tag{107}$$

$\frac{d\Phi}{dx} \cdot x_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot y_2 = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2 \cdot x_1 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_2 \cdot y_1 = F(x_1, x_2, y_1, y_2)$

Ciò si può pure riconoscere in modo più sintetico, considerando solo l'azione delle forze esterne, ed applicando il principio della sovrapposizione degli effetti, per calcolare il lavoro di deformazione dovuto all'azione complessiva, simultanea o successiva, dei due sistemi di forze dati A e B.

Indichiamo con $L_{(a+b)}$ tale lavoro di deformazione; e per il principio della sovrapposizione degli effetti esso dovrà avere lo stesso valore qualunque sia l'ordine col quale si fanno crescere le forze applicate.

Indichiamo poi con L_a ed L_b i lavori di deformazione prodotti rispettivamente sul solido elastico dai singoli sistemi di forze A e B.

Ricordiamo che i lavori L_a, L_b ed L_{a+b} sono esprimibili con la (92), ovvero col teorema di Clapeyron (106).

Immaginiamo dapprima di far agire per primo il sistema di forze A, e poi quello B: allora, calcolando in ordine i lavori successivamente prodotti, avremo:

$$L_{(a+b)} = L_a + L_b + L'_{ab}$$

Poi supponiamo di far agire invece per primo il sistema B, e poi successivamente quello A; avremo così:

$$L_{(a+b)} = L_b + L_a + L'_{ba}:$$

e dalle due ultime uguaglianze si deduce sùbito di nuovo la (108): $L'_{ab} = L'_{ba}$.

Questo risultato si può enunciare come segue:

Se in un solido elastico agiscono due diversi sistemi di forze, il lavoro compiuto dalle forze del primo sistema per effetto degli spostamenti provocati dal secondo sistema, è uguale al lavoro compiuto dalle forze del secondo sistema per effetto degli spostamenti provocati dal primo sistema.

Questo *teorema* fondamentalissimo è dovuto al Betti, che lo enunciò nel 1832 (Nuovo Cimento); esso si chiama pure *teorema o principio di reciprocità.*

Come caso particolare supponiamo che i due sistemi di forze A e B si riducano a due sole forze concentrate di intensità uguale ad 1, applicate in due punti A e B del solido elastico, ed agenti rispettivamente secondo due rette a e b; indichiamo con δ_{ab} lo spostamento del punto A nella direzione a, dovuto all'azione della forza $=1$ agente in B secondo b; e viceversa sia δ_{ba} lo spostamento di B nella direzione b, prodotto dall'azione della forza $=1$ agente in A secondo la retta a.

Con tali premesse, il teorema di Betti fornisce subito:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba}. \tag{109}$$

Questo caso particolare costituisce il *Teorema di Maxwell* già dimostrato precedentemente a quello di Betti (Philosophical Magazine, Vol. 27.°).

Questi teoremi hanno nella pratica importantissime applicazioni, che saranno sviluppate in altra parte del libro.

38. Lavoro mutuo di due sistemi di forze: Lavori virtuali: applicazione alla determinazione di forze incognite iperstatiche.

Abbiamo visto al N.° precedente che si ha: $L'_{ab} = L'_{ba}$; perciò tale grandezza si può chiamare il *lavoro mutuo* dei due sistemi di forze A e B.

Colle convenzioni relative ai simboli fatte nel N.° precedente, se si eguagliano le due diverse espressioni di L'_{ab} secondo la (102) e la (106), si ha:

$$\int_V \rho (X'u'' + Y'v'' + Z'w'')\, dV + \int_S (X'_n u'' + Y'_n v'' + Z'_n w'')\, dS +$$

$$+ \Sigma (F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w'') = \tag{110}$$

$$= - \int_V (X'_x \varepsilon''_x + Y'_y \varepsilon''_y + Z'_z \varepsilon''_z + Y'_z \gamma''_{yz} + Z'_x \gamma''_{zx} + X'_y \gamma''_{xy})\, dV.$$

Il primo membro di questa uguaglianza si può considerare come il *lavoro virtuale delle forze esterne del sistema A, per effetto degli spostamenti dovuti al sistema di forze B* (assunti quali spostamenti virtuali); il secondo membro, cambiato di segno, ha analogo significato per le pressioni interne provocate dal sistema A, e per la deformazione (considerata come virtuale) dovuta al sistema B.

Perciò la (110) si può interpretare come l'*equazione dei lavori virtuali* per il sistema A di forze esterne ed interne in equilibrio, assumendo come spostamenti virtuali quelli dovuti al sistema B.

Sul modo di applicare qui il notissimo principio dei lavori virtuali dobbiamo notare che noi, considerando l'equilibrio tra le forze interne e quelle esterne, intendiamo di includere tra queste anche le eventuali reazioni di vincoli, le quali sostituiscono così i vincoli stessi, di modo che, con tale sostituzione, il solido elastico considerato si può riguardare come libero nello spazio.

Perciò non si deve fare nessuna restrizione riguardo alla scelta degli spostamenti virtuali, i quali *non* sono soggetti alla condizione di essere compatibili coi vincoli e si devono considerare tutti invertibili.

Inoltre al fine di interpretare la (110), già ricavata per altra via, il noto principio ci serve qui per esprimere una conseguenza dell'equilibrio già supposto verificato tra le forze applicate e le forze interne; in altri termini il detto principio ci serve qui in quanto ci permette di stabilire una condizione *necessaria* per l'equilibrio.

Quindi in base al citato principio e per gli scopi del nostro studio noi possiamo affermare: *poichè sussiste equilibrio tra le forze esterne applicate al solido elastico e le forze interne in esso provocate, deve sempre essere nullo il lavoro virtuale di tutte le dette forze per un qualunque sistema di spostamenti virtuali.*

In particolare se si assumono come spostamenti virtuali quelli $u'', \ldots \varepsilon''_x \ldots \gamma''_{yz} \ldots$ provocati nel solido elastico dalle forze del sistema B, uguagliando a zero il lavoro virtuale di tutte le forze esterne ed interne del sistema A, si trova appunto la (110).

Tale relazione si può dunque indifferentemente riguardare come l'equazione dei lavori virtuali (colle particolari avvertenze sopra esposte), ovvero come l'equazione esprimente che il lavoro mutuo delle forze esterne dei due sistemi A e B è uguale ed opposto al lavoro mutuo delle corrispondenti forze interne.

Applicazione. L'equazione (110) può essere utilmente impiegata per determinare reazioni di vincoli sovrabbondanti, e perciò non determinabili colle sole leggi della statica. Limitiamoci qui al caso in cui detti vincoli sviluppino quali reazioni delle forze concentrate, che diremo R', R'', R''',..., delle quali supporremo date le rette di azione (vincoli semplici); queste sono dunque le incognite, che si dicono *iperstatiche*, come è ben noto dal corso di statica.

Supponiamo inoltre per ora che il solido non abbia tensioni interne indipendenti dalle forze superficiali e di massa, ossia che quando è scarico, sia allo stato naturale non deformato.

Il solido elastico, liberato idealmente dai vincoli sovrabbondanti (e trattenuto dai soli vincoli strettamente necessarî alla sua indeformabilità cinematica) si suol brevemente chiamare il *sistema principale.*

Allora si considerino agenti separatamente sul solido elastico i varî sistemi di forze seguenti:

A': la forza $R'=1$, e le reazioni C' dei vincoli strettamente necessarî provocate da detta forza agente sola sul *sistema principale*; siano $X'_x \ldots Y'_z \ldots$ le componenti speciali di pressione dovute al sistema di forze A'.

A'': ottenuto dalla forza $R''=1$ colle reazioni C'' come il sistema

A' è ottenuto dalla forza $R'=1$: siano $X''_x \ldots$ $Y''_z \ldots$ le componenti speciali di pressione dovute al sistema A''.

A''': ecc... $C''' \ldots$ $X'''_x \ldots$ $Y'''_z \ldots$ ecc... analogamente, ecc... (per quante sono le R', R'', $R''' \ldots$).

B: le forze effettive agenti sul solido coi vincoli completi; esse sono le forze esterne (superficiali e di massa), e le reazioni di tutti i vincoli, comprese quelle incognite iperstatiche R', R'', R''',... e quelle dei vincoli strettamente necessarî, le quali verranno indicate genericamente con C.

Siano poi:

$X_x \ldots$ $Y_z \ldots$ le componenti speciali di pressione del sistema B;

u, v, w; $\varepsilon_x \ldots$ $\gamma_{yz} \ldots$ gli spostamenti e le componenti di deformazione provocati dal sistema B (spostamenti effettivi);

δ_c, δ', δ'', δ''',... ecc., gli spostamenti effettivi (dovuti al sistema B) dei punti di applicazione delle C, R', R'', R''',... rispettivamente misurati ciascuno nella direzione nota della reazione relativa.

Ciò posto, l'equazione (110) applicata successivamente ai sistemi di forze: A' e B; A'' e B; A''' e B;... e così di séguito, fornisce le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma C'\delta_c + 1\cdot\delta' = -\int_V (X'_x\varepsilon_x + Y'_y\varepsilon_y + Z'_z\varepsilon_z + Y'_z\gamma_{yz} + Z'_x\gamma_{zx} + X'_y\gamma_{xy})\,dV\\
&\Sigma C''\delta_c + 1\cdot\delta'' = -\int_V (X''_x\varepsilon_x + Y''_y\varepsilon_y + Z''_z\varepsilon_z + Y''_z\gamma_{yz} + Z''_x\gamma_{zx} + X''_y\gamma_{xy})\,dV\\
&\Sigma C'''\delta_c + 1\cdot\delta''' = -\int_V (X'''_x\varepsilon_x + Y'''_y\varepsilon_y + Z'''_z\varepsilon_z + Y'''_z\gamma_{yz} + Z'''_x\gamma_{zx} + X'''_y\gamma_{xy})\,dV\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Com'è noto dal Cap. IV, per la legge di Hooke le $\varepsilon_x \ldots$ $\gamma_{yz} \ldots$ sono funzioni lineari omogenee delle $X_x \ldots$ $Y_z \ldots$; inoltre le δ_c, δ', δ'', $\delta''' \ldots$ saranno note, nel caso di vincoli rigidi con difetti iniziali di montaggio, ovvero per vincoli elastici saranno proporzionali ciascuna alla rispettiva C, R', R'', $R''' \ldots$ ecc....

D'altra parte, per il *principio della sovrapposizione degli effetti*, (N.º 26), le C, e le $X_x \ldots$ $Y_z \ldots$ sono funzioni lineari delle incognite iperstatiche R', R'', $R''' \ldots$ e precisamente si deve avere:

$$\left.\begin{array}{l} C = C_0 + C' R' + C'' R'' + C''' R''' + \dots\dots \\ X_x = X^0_x + X'_x R' + X''_x R'' + X'''_x R''' + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_z = Y^0_z + Y'_z R' + Y''_z R'' + Y'''_z R''' + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (112)$$

ove si intende che i simboli coll'indice o apice *zero*, rappresentano le rispettive reazioni, o pressioni provocate dalle forze esterne date, agenti sul *sistema principale* (coi soli vincoli strettamente necessarî).

Le C_0, C', C''... si possono determinare colle sole leggi della statica; le X^0_x... Y^0_z...; X'_x... Y'_z... X''_x... Y''_z...; ecc. richiedono lo studio della ripartizione delle pressioni interne nel solido elastico, ridotto però al *sistema principale*, e perciò *reso staticamente determinato* per quanto riguarda il calcolo delle reazioni dei vincoli.

Perciò, se nelle (111) si esprimono le deformazioni in funzione degli sforzi, che le provocano, e se si tiene conto delle (112), le (111) stesse si trasformano in un sistema di equazioni lineari tra le incognite iperstatiche R', R'', R'''..., e le equazioni sono appunto tante quante sono le incognite, le quali possono così venir calcolate.

È facile dimostrare che il sistema di dette equazioni è sempre determinato, ossia che il suo determinante è sempre diverso da zero.

Ciò risulta, come caso particolare, dalla necessità dell'esistenza ed unicità della soluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico quando siano dati in superficie alcune delle forze ed alcuni tra gli spostamenti, secondo quanto fu esposto ai N.[i] 28 e 33, Cap. IV.

D'altra parte è facile verificare che in ciascuna delle (111), trasformate nel modo ora indicato, il gruppo dei termini contenenti le incognite R', R'', R'''... ecc. (ovvero il primo membro della stessa equazione *resa omogenea* — privata cioè del termine noto) — rappresenta lo spostamento del punto di applicazione della reazione incognita R', R'', R'''... corrispondente, prodotto dall'azione delle forze stesse R', R'', R'''... ecc. agenti insieme sul solido, del resto scarico (cioè senza l'azione delle altre forze esterne date). Orbene, l'annullarsi del determinante dei coefficienti delle (111) è condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema ora detto delle (111) *rese omogenee* sia soddisfatto per valori non tutti nulli delle incognite R', R'', R''', ecc...; perciò se detto determinante fosse nullo, esisterebbero dei valori non tutti nulli delle R', R'', R'''... ecc..., i quali provocherebbero spostamenti tutti nulli nei rispettivi punti di applicazione; allora il lavoro di deformazione da esse prodotto sarebbe nullo; e ciò in un sistema elastico generico, *non degenere*, non avente cioè parti rigide, è impossibile, poichè in tal caso il lavoro di deformazione prodotto da forze non nulle, deve sempre essere necessariamente positivo.

Resta così dimostrato pure direttamente che il sistema delle equazioni (111) risulta sempre determinato.

Trattando più oltre con altri metodi lo stesso problema del calcolo delle reazioni iperstatiche, avremo occasione di ritornare ancora su questo concetto, il quale verrà anche meglio chiarito nelle applicazioni concrete, che faremo in altra parte del libro.

Notiamo che, pure *interpretando* le (110) e le (111) come *equazioni ricavate dal principio dei lavori virtuali*, l'uso qui fatto di questo principio è sostanzialmente diverso da quelli che di solito si fanno nella meccanica razionale od applicata; invero in tali applicazioni il detto principio si adopera per esprimere delle *relazioni statiche* tra le forze effettive, delle quali si studia l'equilibrio; mentre invece l'applicazione qui fatta ci consente di scrivere *delle relazioni di condizione tra le deformazioni elastiche effettive incognite*, col l'artifizio di esprimere *l'equilibrio tra forze fittizie già note* (tali sono le forze esterne $R'=1$; $R''=1$;...) *e le forze interne da esse provocate nel sistema principale.*

39. Caso particolare in cui il lavoro mutuo è zero: uno dei due sistemi non contiene forze esterne date, che compiano lavoro.

Si deve spesso considerare nelle applicazioni un sistema elastico soggetto a sforzi interni non dipendenti da forze esterne applicate; poichè essi sforzi sono diversi da zero anche in completa assenza di forze esterne superficiali o di massa, tali sforzi interni possono essere dovuti a non uniformi dilatazioni termiche, ovvero anche a non uniforme raffreddamento e solidificazione nei metalli ottenuti per fusione o per fucinazione, ovvero comunque a delle azioni interne antagoniste esercitate mutuamente da due o più parti del solido o del sistema elastico, le quali si trasmettano reciprocamente delle costrizioni: quest'ultima condizione di cose si può sempre, materialmente od idealmente, ottenere praticando in un solido elastico opportuni tagli, che *non* lo spezzino in due o più parti, ed applicando sulle due faccie di ciascun taglio due sistemi di forze antagonisti; in tal caso si dice che il solido subisce una *distorsione*.

Avremo più innanzi occasione di occuparci più minutamente di questi speciali sistemi di forze interne; ora senza entrare in particolari, vogliamo indicarne alcune proprietà di carettere generale.

Anzitutto osserviamo che il solido (o sistema) elastico così soggetto a sforzi interni, indipendentemente dall'azione di forze esterne è in istato di deformazione: i suoi singoli elementi di volume hanno forma diversa da quella che avrebbero se fossero ciascuno libero nello spazio, e sottratto all'azione degli elementi circostanti.

In tal caso si usa dire che il solido si trova *allo stato naturale*, (perchè non soggetto a forze esterne, nè superficiali, nè di massa), *ma deformato*, poichè nei varî suoi punti le componenti di deformazione non sono tutte nulle.

In tale stato, per quanto si vide nel Cap. IV, n.° 30, il potenziale elastico è positivo, sicchè il solido possiede un'energia potenziale elastica non nulla, assimilabile al lavoro di deformazione necessario per portare il solido elastico allo stato attuale, partendo dallo stato naturale non deformato. Tale energia si suol chiamare *l'energia elastica vincolata.*

Un altro caso, che pure spesso si presenta nelle applicazioni, è quello di forze interne provocate da forze superficiali, le quali sono *pressioni (positive o negative)* esercitate da vincoli esterni *rigidi*, i quali, per essere incompatibili colla forma geometrica della superficie esterna del solido allo stato naturale non deformato, esercitano su questo delle costrizioni, e lo mettono in istato di tensione.

In questo secondo caso esistono bensì delle forze esterne, ma c'è qui di comune col primo caso questo fatto: le forze esterne del sistema di forze complessivo, che diremo A, non fanno lavoro, qualora agiscano altre forze esterne di un sistema comunque dato B; nel primo caso perchè le forze esterne del sistema A non esistono, nel secondo caso perchè i punti di applicazione di tali forze (esterne, del sistema A) non si spostano, perchè essi fanno parte dei vincoli rigidi, i quali sviluppano, a guisa di reazione, le forze stesse.

L'aver supposto rigidi tali vincoli non lede menomamente la generalità, poichè se i vincoli sono elastici, noi possiamo sempre riguardarli come facenti parte del sistema elastico che consideriamo, e perciò riusciamo sempre a ridurci al caso di vincoli rigidi.

A titolo di chiarimento citiamo qualche esempio di entrambi i casi qui considerati:

Del caso primo: un prisma, il quale venga riscaldato con temperatura non uniforme sulla sua sezione trasversale; un prisma di metallo o di materiale comunque fusibile, il quale sia stato preventivamente riscaldato al calor rosso, portato quindi ad uno stato quasi plastico, e poi raffreddato rapidamente in modo che gli strati superficiali si siano solidificati prima che non la regione centrale; un anello chiuso, nel quale si pratichi un taglio, per es. secondo un piano radiale, si asporti uno straterello di materiale adiacente al taglio, e poi si rinsaldino insieme le faccie del taglio stesso; un solido qualunque, nel quale si pratichi una incassatura, in cui si introduca a forza od a caldo un cuneo, il quale riempia tutto lo spazio dell'incassatura ed eserciti pressioni sulle pareti della stessa; una travatura reticolare, di cui alcuni nodi siano riuniti due a due da aste sovrabbondanti muniti di *tenditore* a doppia filettatura, mediante il quale si creino nelle aste stesse sforzi di tensione o di compressione; ed altri analoghi si potrebbero citare;

del caso secondo: una trave continua con più appoggi bilaterali non tutti di livello, i quali perciò costringano la trave ad inflettersi anche se scarica; una molla ad elica collocata a forza tra due piani paralleli rigidi a distanza invariabile, minore della lunghezza naturale della molla; un arco con due cerniere ad imposte fisse, con distanza di poco diversa dalla « luce » naturale dell'arco; un arco od una trave incastrati rigidamente agli estremi, e con « difetto di montaggio » tale che le due sezioni estreme abbiano, in causa degli incastri, una *posizione relativa* diversa da quella che essi avrebbero quando mancasse uno dei due incastri; in genere qualunque sistema elastico avente vincoli sovrabbondanti rigidi, così disposti da alterare la forma geometrica che la superficie esterna del sistema elastico avrebbe quando esso fosse libero da vincoli e da forze esterne applicate.

È chiaro che i due casi, qui distinti per comodità logica possono verificarsi insieme in uno stesso solido o sistema elastico: anzi è pure ovvio che anche in un solido o sistema elastico a vincoli rigidi sovrabbondanti, inizialmente allo stato naturale non deformato, si possono provocare le condizioni del secondo caso, mediante una variazione di temperatura, e la conseguente dilatazione (positiva o negativa), parzialmente ostacolata dai vincoli.

Occorre qui tener presente la (110), e la conseguente uguaglianza in valore assoluto dei lavori mutui delle forze interne e di quelle esterne secondo quanto è esposto al N.° 38.

Sarebbe poi facile verificare direttamente in alcuni esempî concreti che lo stato di tensione provocato in un solido iperstatico da una non uniforme variazione di temperatura, si può pure ottenere con una o più opportune distorsioni.

In generale uno stato di tensione indipendente da forze esterne è dovuto a mutue costrizioni dei varî elementi di volume che costituiscono il solido o sistema elastico e perciò si può sempre immaginare generato dall'intervento di forze, che agiscano sugli elementi stessi attraverso le superficie di opportuni tagli, atti a distruggere le mutue costrizioni degli elementi suddetti, restituendo questi allo stato naturale non deformato.

Non vogliamo per ora dilungarci su questo argomento delle costrizioni interne o coazioni elastiche, pur importantissimo per la tecnica, ma che ci porterebbe troppo oltre i fini immediati dello studio che qui facciamo. Per ora ci basta aver accennato la natura di dette coazioni, per precisare la sostanziale identità degli stati di tensione (o sistemi di sforzi interni) indipendenti da forze esterne, con quelli provocati da apposite distorsioni.

Poichè l'argomento è importante e fecondo di applicazioni, avremo probabilmente occasione di riprenderlo, rimandando per ora, chi volesse approfondirlo, alle ricerche del Prof. G. Colonnetti, pubblicate in gran parte sui Rendiconti della R.ª Accademia dei Lincei, e sugli Atti della R.ª Accademia delle Scienze di Torino (anni 1915 ÷ 1918).

Per precisare le nozioni relative al lavoro mutuo sopra citato, che si presenta quando uno dei due stati di tensione che si considerano sia dovuto ad una distorsione, è opportuno stabilire fin d'ora un teorema o principio importantissimo, fecondo di svariate applicazioni, le quali verranno indicate poi più innanzi.

Esso è il seguente:

40. Secondo principio di reciprocità.

Per dimostrare ed enunciare tale principio è utile precisare ulteriormente il concetto di distorsione già introdotto nel N.° 39 precedente.

Si dice dunque che un solido o sistema elastico comunque connesso vien soggetto ad una *distorsione* quando si pratica in esso un taglio secondo una superficie Σ qualsiasi interna al solido, il quale taglio *non* separi il sistema elastico stesso in due o più parti indipendenti (ossia lasci che il sistema risulti ancora connesso), e poi sulle due faccie del taglio Σ_a e Σ_b inizialmente combacianti in Σ, si applicano due sistemi di forze distribuite sulle faccie stesse, con intensità uguali ed opposte punto per punto su tutta la superficie Σ: questi due sistemi di forze, senza alterare l'equilibrio delle forze esterne applicate, provocano nel sistema elastico una deformazione; e le faccie del taglio subiranno in conseguenza uno spostamento *relativo*, definito in ogni punto della superficie Σ; questo può anche essere tale da produrre in punti di Σ una *compenetrazione* delle due regioni del solido in quei punti separate dalla superficie Σ: si può evitare la compenetrazione e render possibile lo spostamento immaginando di asportare lo strato piccolissimo secondo cui avverrebbe la compenetrazione stessa; si può poi immaginare di riempire di materiale il vano (sottilissimo) lasciato dove i bordi del taglio risultano scostati, e poi si possono supporre saldati i bordi del taglio; la modificazione così introdotta nel sistema elastico colla deformazione e col corrispondente stato di tensione si dice appunto *distorsione*.

Indichiamo con (S) il sistema delle forze esterne date, o di massa, o superficiali, agenti sulla superficie esterna S; indichiamo con (Σ) il sistema delle forze interne, che nel solido non soggetto alla distorsione la faccia del taglio Σ_a esercita contro quella Σ_b, per effetto delle dette forze esterne applicate (S).

[Allora la faccia Σ_b esercita contro quella Σ_a un sistema di forze $-(\Sigma)$].

(In altri termini il sistema (Σ) è quello delle forze interne provocate da quelle esterne (S) e trasmesse attraverso le faccie del taglio praticato secondo la superficie Σ).

Indichiamo con D e $-D$ i due sistemi di forze che, applicati sulle due faccie del taglio nel modo sopra detto, producano la descritta distorsione.

Applichiamo il teorema di Betti ai due sistemi di forze seguenti:

(I) i sistemi (S), (Σ), $-(\Sigma)$ agenti simultaneamente
(II) » » D, e $-D$ » »

Si ha quindi:

Lavoro del sistema (I) per effetto degli spostamenti dovuti alla distorsione = lavoro del sistema (II) per effetto degli spostamenti effettivi dovuti al sistema (I).

Il secondo membro è *zero*, perchè le forze D e $-D$, sono uguali ed opposte punto per punto sulla superficie Σ, mentre gli spostamenti effettivi dovuti alle forze esterne date [sistema (I)] sono uguali punto per punto sulle faccie Σ_a e Σ_b del taglio, cioè sono gli stessi per i punti di applicazione di due forze omologhe (e perciò uguali ed opposte) dei due sistemi D e $-D$.

Quindi si ha:

Lavoro del sistema complessivo (S), (Σ), $-(\Sigma)$, *per effetto degli spostamenti dovuti alla distorsione = zero.*

Ora il lavoro dei sistemi (Σ) e $-(\Sigma)$ per gli spostamenti dovuti alla distorsione si può riguardare come *il lavoro del sistema di forze* (Σ) (*forze esercitate dalla faccia* Σ_a *contro quella* Σ_b), *per gli spostamenti relativi,* (*dovuti alla distorsione*) *dei punti della faccia* Σ_b *rispetto ai corrispondenti punti della faccia* Σ_a.

Infatti, poichè le forze dei sistemi (Σ) e $-(\Sigma)$ sono, come già si vide poco più sopra, rispettivamente uguali ed opposte su ogni punto della superficie del taglio Σ, ne consegue che tra i due termini rappresentanti il lavoro dovuto alla distorsione, compiuto dalle due forze uguali ed opposte agenti in uno stesso punto di Σ, si può mettere in evidenza, quale fattore comune, l'intensità uguale delle forze, e come altro fattore resta la differenza tra lo spostamento (dovuto alla distorsione) del punto di applicazione considerato sulla faccia Σ_b meno lo spostamento (dovuto alla distorsione) del punto contiguo situato sulla faccia Σ_a; tale differenza è appunto lo *spostamento relativo* (dovuto alla distorsione), dei due punti considerati, omologhi e contigui sulle due faccie del taglio.

Resta così dimostrato ciò che è affermato poco sopra. Perciò, e portando a secondo membro col segno cambiato il lavoro delle forze (Σ), conforme alle premesse su esposte si può enunciare quanto segue:

Il lavoro che le forze esterne applicate su un sistema elastico compiono per effetto di una distorsione (ottenuta con un taglio Σ e con un generico sistema di forze distorcenti applicate sulle faccie del taglio) è uguale al lavoro che le forze interne (Σ) trasmettentisi attraverso al taglio Σ, compiono per effetto degli spostamenti relativi (dovuti alla distorsione), dei punti della faccia del taglio dalla quale il sistema (Σ) emana, rispetto agli omologhi punti dell'altra faccia sulla quale il sistema (Σ) si esercita.

Questo enunciato è appunto conosciuto sotto la denominazione di *secondo principio di reciprocità.*

Esso fu dimostrato per spostamenti relativi rigidi dal Prof. *G. Colonnetti* (Rendiconti della R.e Accademia dei Lincei vol. XXI. Roma 1912).

Per alcuni casi particolari, specialmente in vista di applicazioni alle travi continue, era già stato enunciato, ma non rigorosamente dimostrato dal *Land* (Cfr. *Enzyklopädie der mathematische Wissenschaften*, IV, 2).

L'enunciato che qui è stato formulato precisa il *segno* del lavoro delle forze (Σ) e $-(\Sigma)$. Inoltre la dimostrazione qui esposta rende manifesto che la distorsione che si considera può essere affatto qualunque, sia per la scelta della forma della superficie Σ del taglio, sia per il sistema delle forze distorcenti D e $-D$, che può essere affatto generico; particolarmente notiamo che lo spostamento relativo di Σ_a e Σ_b può essere anche *non rigido*; ciò poniamo qui in evidenza perchè nelle applicazioni più comunemente si usa considerare spostamenti relativi rigidi; perciò qui esplicitamente enunciamo, ciò che del resto risulta dalla dimostrazione fatta:

il secondo principio di reciprocità è valido per una distorsione affatto generica, ottenuta cioè attribuendo alle faccie del taglio uno spostamento relativo affatto qualunque, e perciò anche non rigido.

41. Interpretazione del secondo principio di reciprocità per il caso di un sistema elastico soggetto a costrizioni interne o coazioni elastiche provocate da cause diverse dalle distorsioni.

Rammentiamo qui il concetto di *costrizione interna o coazione elastica* introdotto e chiarito al N.° 39.

Nello stabilire il secondo principio di reciprocità abbiamo considerato le forze (Σ) e $-(\Sigma)$ interne, trasmettentisi attraverso alle faccie del taglio per effetto delle forze esterne (S) applicate; ora immaginando il solido o sistema elastico quale si trova dopo praticato il taglio, le forze stesse (Σ) e $-(\Sigma)$ si possono riguardare quali forze esterne agenti sul sistema elastico tagliato; e si noti che esse sono appunto tali da annullare nel solido tagliato, gli spostamenti relativi delle faccie del taglio che verrebbero, nel solido tagliato, provocati dalle forze esterne (S).

Orbene, considerando le forze (Σ) e $(-\Sigma)$ come un sistema di forze esterne agenti sul solido tagliato, (che supporremo esente inizialmente da coazioni elastiche), esse provocano in detto solido delle pressioni interne, le cui componenti speciali indicheremo genericamente con X_d. Per quanto si vide pure al N.° 32 è chiaro che il lavoro che le forze (Σ) e $(-\Sigma)$ (considerate esterne) compiono per effetto dello spostamento relativo provocato tra le faccie del taglio dalla distorsione, conforme all'enunciato del secondo principio di reciprocità (colla esposta avvertenza riguardo al segno), è uguale al lavoro che le corrispondenti pressioni interne X_d compiono per effetto della deformazione dovuta alla stessa distorsione.

Perciò l'enunciato del secondo principio di reciprocità si potrebbe esprimere come segue:

Il lavoro che le forze esterne (S) applicate su un sistema elastico compiono per effetto di una distorsione (ottenuta con un taglio Σ e con un generico sistema di forze distorcenti applicate sulle faccie del taglio) è uguale al lavoro compiuto, per effetto della stessa distorsione, dalle pressioni interne X_d che sarebbero provocate nel sistema elastico tagliato secondo Σ dalle forze (Σ) e $(-\Sigma)$ che nel sistema non tagliato si trasmettono attraverso alla superficie Σ, per effetto delle forze esterne S.

Come si è accennato più sopra al N.° 39, un sistema di coazioni elastiche generato, non da una distorsione, ma da alcuna delle altre cause citate anche al N.° 39 stesso, in molti casi si può considerare pure come prodotto da una appropriata distorsione, (tale che, applicata al sistema elastico allo stato naturale non deformato, sia capace di provocare lo stesso sistema di tensioni o pressioni interne). Una tale distorsione si potrebbe denominare la *distorsione equivalente* al dato sistema di coazioni elastiche.

Evidentemente essa si può sempre trovare quando il dato sistema di coazioni interne è tale che, con uno o più appropriati tagli, (secondo una superficie complessiva Σ), si possa restituire questo al suo stato naturale non deformato; infatti in tal caso basterà assumere come forze distorcenti le tensioni o pressioni interne che prima di praticare il taglio (complessivo, semplice o multiplo) si trasmettevano attraverso alla superficie Σ; tali pressioni poi, (come si notò in caso analogo poco sopra), sono appunto quelle capaci di annullare nel solido tagliato gli spostamenti relativi delle faccie del taglio manifestatisi dopo il taglio stesso.

Ora è chiaro che colle considerazioni che precedono, *i due enunciati sopra esposti del secondo principio di reciprocità si possono immediatamente estendere al caso di un sistema di costrizioni interne, o coazioni elastiche, anche se dovute a cause diverse da una effettiva distorsione, sempre quando tali coazioni elastiche ammettano una distorsione equivalente.*

A tale scopo basterà nei detti enunciati, in luogo di:

« *lavoro compiuto per effetto di una distorsione,* (*ottenuta con un taglio* Σ, ecc...) » (v. sopra).

dire invece:

« *lavoro compiuto per effetto di un sistema di coazioni elastiche, ammettente una distorsione equivalente, ottenibile con un taglio* Σ *(semplice o multiplo)*, ecc... ».

ed inoltre, parlare della « *distorsione equivalente* » ove prima si parlava semplicemente di « *distorsione* ».

Dobbiamo ora fare qualche considerazione sulla natura della deformazione provocata da una distorsione, oppure da una coazione elastica dovuta a cause diverse dalla distorsione.

È anzitutto evidente che la deformazione dovuta ad una distorsione corrisponde ad una distribuzione del *vettore spostamento* discontinua, (v. Cap. II, N.° 5); infatti tale deformazione è ottenuta mediante un taglio secondo la superficie Σ, con spostamento relativo dei punti omologhi sulle faccie del taglio: tale spostamento relativo costituisce appunto una discontinuità dello spostamento assoluto (di componenti u, v, w,) del punto generico nel sistema elastico, e la superficie Σ del taglio è appunto la superficie di discontinuità.

Perciò tale deformazione colle sue componenti $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz}$ non può soddisfare alle *condizioni di congruenza* studiate al N.° 8 e più oltre al N.° 14 (Cap. II), le quali ivi furono riconosciute necessarie e sufficienti perchè la deformazione sia realizzabile senza soluzioni di continuità o sovrapposizioni di materia. Tale deformazione perciò *non è congruente*, (v. N.° 8, in fine).

Per quanto riguarda invece la deformazione dovuta ad una coazione ottenuta senza distorsione, ma per altre cause, come variazione non uniforme di temperatura, e simili, dobbiamo osservare che la deformazione *complessiva* è certo congruente, poichè è ottenuta senza tagli di sorta, e conduce ad una distribuzione del vettore spostamento affatto continua in tutto lo spazio occupato dal sistema elastico.

E però ovvio che la deformazione complessiva di una particella elementare generica si può considerare come la sovrapposizione di due distinte deformazioni, che ora specificheremo: invero, se si immagina di poter isolare la particella stessa da tutto il resto del sistema elastico essa prenderebbe una forma diversa da quella effettiva finale, ed in generale diversa pure da quella ch'essa aveva nel sistema elastico allo stato naturale non deformato, prima dell'intervento delle cause che provocano la coazione.

La deformazione che la particella stessa subisce quando si libera dagli elementi circostanti è evidentemente uguale e contraria alla deformazione elastica che la particella, prima di essere liberata, subiva per effetto delle azioni su di essa esercitate dagli elementi circostanti: deformazione che conforme alla legge di Hooke corrisponde alle pressioni o tensioni elementari interne, che la particella risentiva nel sistema elastico soggetto alla data coazione.

Tale *deformazione elastica* è dunque in generale diversa dalla *deformazione totale*, colla quale la particella passa dalla forma che aveva nello stato naturale non deformato, alla forma finale che ha nel sistema elastico soggetto alla coazione.

Consideriamo quindi la differenza delle due deformazioni, ossia quella deformazione che ha per componenti rispettivamente le differenze tra le componenti omologhe della deformazione totale e di quella elastica; in altri termini quella deformazione che si deve sovrapporre a quella elastica per avere quella totale.

Tale deformazione si può chiamare *deformazione anelastica*; essa è appunto quella che le cause della coazione, (quali variazioni termiche od altre analoghe), provocherebbero nella particella resa libera, od anche la stessa che le suddette cause provocano nel sistema elastico tagliato complessivamente secondo la superficie Σ del taglio della distorsione equivalente alla data coazione.

Per quanto si disse sopra a proposito delle distorsioni equivalenti e relativi tagli, risulta súbito che le suddette cause della coazione (producenti questa nel sistema elastico *non tagliato*), quando agissero sul sistema elastico tagliato, non produrrebbero sforzi interni, ma solo provocherebbero la sopra definita *deformazione anelastica*. Questa induce tra le faccie del taglio spostamenti relativi, e perciò è essa pure una deformazione *non congruente*; i suddetti spostamenti relativi sono appunto le discontinuità del corrispondente spostamento u, v, w del punto generico; ed è chiaro che la *deformazione elastica* (corrispondente alla stessa coazione) deve indurre, sulle stesse faccie del taglio Σ, degli spostamenti relativi uguali e contrarî a quelli ora detti, dovuti alla *deformazione anelastica*.

Con queste considerazioni vien precisato il concetto della *distorsione equivalente* ad una data coazione, introdotto poco sopra.

Tale *distorsione equivalente* ora si rivela quale quella capace di produrre, nel sistema elastico inizialmente allo stato naturale non deformato, le stesse tensioni interne dovute alla coazione corrispondente, ed insieme di provocare *la sola deformazione elastica* della coazione stessa.

Perciò detta distorsione si deve considerare come equivalente alla data coazione solo in quanto riguarda la distribuzione delle tensioni, e non per la deformazione totale: *la deformazione anelastica* si può provocare solo per effetto di altre cause (termiche o simili), diverse dalla distorsione.

Questi concetti verranno ulteriormente chiariti dagli esempî, che daremo tra poco, come già abbiamo detto.

Ora dobbiamo dedurre da quanto precede alcune proprietà relative ai lavori, effettivi o virtuali, svolti nel caso delle coazioni elastiche.

Rammentiamo anzitutto la definizione di *energia vincolata* esposta al N.° 39.

Orbene, *l'energia vincolata relativa ad un dato sistema di coazioni elastiche si può considerare come il lavoro di deformazione dovuto alla distorsione equivalente, od anche come l'energia accumulata per effetto della deformazione elastica corrispondente al dato sistema di coazioni.*

Tale lavoro ovviamente è valutabile secondo il teorema di Clapeyron, come la metà del lavoro delle forze provocanti la distorsione equivalente, per effetto degli spostamenti relativi delle faccie del taglio.

Se le coazioni elastiche sono effettivamente prodotte non da una distorsione, ma da alcuna delle cause diverse già sopra accennate, detto lavoro verrà ceduto dall'esterno al sistema elastico *sotto forma diversa da quella di energia meccanica attuale*: per esempio potrà esser comunicato per *effetto termodinamico*.

Detto lavoro risulta poi uguale ed opposto a quello che le tensioni interne generano per effetto della *deformazione anelastica*.

Per quello che riguarda poi l'eventuale applicazione, in caso di coazioni elastiche, del teorema dei lavori virtuali, secondo i N.[i] 32 e 38, dobbiamo osservare quanto segue:

Poichè per un sistema di coazioni elastiche *non* esistono forze esterne, (ma le forze interne si fanno fra loro equilibrio sul sistema elastico, che si trova in quella condizione che al N.° 39 fu detta *stato naturale*), *è sempre nullo il lavoro virtuale delle tensioni interne della coazione, combinate con una qualsiasi deformazione congruente.*

In particolare *è nullo il lavoro virtuale delle forze interne della coazione, combinata colla deformazione totale o complessiva dovuta alla coazione stessa,* come si è riconosciuto testè per altra via.

Inoltre osserviamo che nell'applicare il sopra citato teorema dei lavori virtuali ad un sistema di forze affatto generico *(S), come deformazione virtuale si può assumere una deformazione affatto generica, anche non congruente, purchè si tenga conto del lavoro virtuale che le forze interne dovute al sistema (S) e trasmettentisi attraverso alla superficie Σ di discontinuità della deformazione (superficie di taglio), generico per effetto degli spostamenti relativi che per la stessa deformazione subiscono le faccie dello stesso taglio Σ (colla sólita avvertenza del segno).*

Con questa osservazione l'equazione dei lavori virtuali, espresso dalla (110), già esposta e delucidata al N.° 38, si riconosce valida nella massima generalità, per quanto riguarda il sistema di spostamenti, ovvero la deformazione virtuale.

Già allo stesso N.° 38 si osservò come non sia necessario assumere spostamenti virtuali compatibili coi vincoli, purchè si considerino come forze esterne le reazioni da essi sviluppate: in tal caso tra i lavori virtuali delle forze esterne si computano pure i lavori che dette reazioni generano per i rispettivi spostamenti virtuali assunti.

Analogamente ora riconosciamo che, *nell'applicare il suddetto teorema dei lavori virtuali, quale deformazione virtuale si può anche assumere una deformazione dovuta ad una distorsione, ovvero, ciò che fa lo stesso, la deformazione elastica dovuta ad una coazione, purchè insieme con i lavori virtuali delle forze esterne (S), si computino pure i lavori che per effetto della suddetta deformazione compiono le forze* (Σ) e (−Σ), *le quali in causa delle forze (S) si trasmettono attraverso alla superficie* Σ *di discontinuità (taglio) della deformazione stessa.*

È ovvio che in egual modo si potrebbe, colle ora dette avvertenze, assumere come deformazione virtuale, la *deformazione anelastica* di una coazione; la quale deformazione, come si vide sopra, ha la stessa superficie Σ di discontinuità (taglio) della corrispondente deformazione elastica, ed ha spostamenti relativi in ogni punto di Σ uguali ed opposti a quelli dovuti alla deformazione elastica stessa.

Inoltre è chiaro che in generale nell'applicare i teoremi basati su proprietà elastiche, dimostrati più sopra, ed altri che studieremo più innanzi, quando si presenti una coazione elastica, bisognerà considerare di questa la sola *deformazione elastica* (e non quella *anelastica*), considerandola come prodotta dalla *distorsione equivalente*, e tenendo opportuno conto della discontinuità del corrispondente spostamento $u\ v\ w$, riguardando cioè come forze esterne applicate le forze interne trasmettentisi attraverso la superficie Σ di discontinuità (o taglio).

Con questa avvertenza tutti i teoremi della teoria dell'elasticità acquistano la massima generalità e possono venir applicati anche agli stati di coazione elastica.

Di ciò abbiamo già avuti esempî poco sopra: inoltre dobbiamo osservare come il secondo principio di reciprocità (N.º 40), secondo la sua stessa dimostrazione là esposta, si possa considerare quale lo stesso teorema di Betti (N.º 37) applicato a due diversi stati di tensione dei quali uno è una distorsione, o una coazione elastica corrispondente. Infine dobbiamo riconoscere che lo stesso secondo principio di reciprocità, con quanto fu esposto dal N.º 40 sin qui, e particolarmente coll'ultima avvertenza ora detta, precisa il concetto e le modalità di calcolo del *lavoro mutuo* di due sistemi di forze (N.º 39) quando uno di essi sia dovuto ad una distorsione o ad una coazione elastica; e ciò conforme a quello che s'era detto appunto in fine del N.º 39.

42. Esempi concreti di coazioni elastiche e di distorsioni ad esse equivalenti. — Cenni sulla massima generalità delle distorsioni adottabili.

Come s'era preannunziato più sopra (nello stesso N.º 41 precedente) e col precipuo scopo di chiarire i concetti sopra esposti, vediamo ora alcuni esempî semplici e tipici di stati di coazioni elastiche, quali si possono presentare nella pratica, e delle distorsioni ad essi equivalenti.

Esempio 1.º — Consideriamo dapprima una travatura reticolare piana, colle aste riunite fra loro a cerniere senza attrito nei nodi, come sono quegli schemi che si studiano nella statica grafica, per determinare nelle aste gli sforzi principali. Essa *travatura* sia *ad aste sovrabbondanti*, tale che sopprimendo un certo numero delle sue aste si possa trasformare in una travatura strettamente indeformabile, che