Quindi sarà pure:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_r} = \frac{\partial L}{\partial \delta_a} = \frac{\partial L}{\partial \delta_b} = P$$

uguale quindi alla forza P valutata nella direzione AB ed agente in sensi opposti sui due punti A e B, la quale si sviluppa come azione del legame mutuo riunente i punti stessi.

Questi risultati ci indicano come debbano essere interpretati ed applicati i due teoremi di Castigliano nel caso qui considerato, che tra due punti del sistema elastico esista un legame mutuo esercitante su essi rispettivamente due forze uguali ed opposte, nel modo ora detto.

Dobbiamo ora passare ad esporre una particolare interpretazione ed applicazione del secondo teorema di Castigliano, utile per la determinazione di forze incognite iperstatiche, come già si era preannunziato più sopra.

44. Interpretazione ed applicazione del secondo teorema di Castigliano, nel caso in cui siano assegnati come variabili indipendenti spostamenti di alcuni punti, e forze esterne applicate in altri punti.

Nel N.º 43 precedente abbiamo sempre considerato lo stato di tensione del sistema elastico, e conseguentemente il lavoro di deformazione, come funzioni, o di sole forze esterne date, (nello studio del primo teorema), o di soli spostamenti di punti dati, (nello studio del secondo teorema), assumendo quali variabili indipendenti in un caso le sole forze, nel secondo i soli spostamenti.

Anzi nell'enunciare e dimostrare il secondo teorema si è supposto di assegnare gli spostamenti o di tutti i punti in superficie, od anche di un numero limitato di punti, essendo però essi tutti e soli quelli, in cui agiscono forze esterne, capaci di provocare gli spostamenti stessi, ritenendo invece scarichi tutti gli altri punti, di spostamenti non assegnati.

Ora in varie questioni tecniche occorre di considerare uno stato di tensione provocato da forze esterne date, e da spostamenti assegnati di alcuni punti, la cui posizione può venir determinata da vincoli esterni sviluppanti delle reazioni incognite.

In tal caso lo stato di tensione e quindi il lavoro di deformazione sono funzioni di diverse variabili indipendenti, le quali sono: *a)* forze esterne (concentrate o distribuite) in punti, nei quali *non* sono noti gli spostamenti; *b)* spostamenti di punti, nei quali *non* sono note le forze applicate (che si originano in virtù degli spostamenti stessi, e delle forze date). Spesso nella pratica si presenta appunto il problema di determinare i valori delle forze incognite nei punti, di cui sono assegnati gli spostamenti.

Mettendoci nelle condizioni dei casi concreti più comuni ed interessanti, noi supporremo che il sistema elastico preso in esame sia dapprima fissato in posizione da un numero di vincoli rigidi strettamente necessarî, ossia da vincoli staticamente determinati; cioè noi consideriamo anzitutto il *sistema principale*, secondo la denominazione già introdotta nell'applicazione fatta al N.º 38. La generalità non vien lesa dall'aver supposto rigidi i vincoli, poichè se essi sono elastici, possono essere riguardati come facenti parte del sistema elastico, considerando quindi come vincoli rigidi i legami che li uniscono direttamente a punti fissi nello spazio. Se poi i vincoli *principali* subiscono inizialmente spostamenti non elastici dati, viene perciò attribuito a tutto il sistema elastico uno spostamento *rigido* iniziale, il quale provoca nei varî punti del sistema, spostamenti lineari ben determinati, che dovranno sottrarsi geometricamente da quelli eventualmente assegnati od attribuiti dalle forze esterne ai punti stessi.

Possiamo dunque, nella trattazione generale prescindere da spostamenti iniziali dei punti trattenuti con i *vincoli principali.*

Ora sul *sistema principale* immaginiamo di far agire le forze esterne date quali variabili indipendenti, che chiameremo genericamente Q; inoltre scelti n punti del sistema elastico per ciascuno (i^{mo}) di questi sia assegnata, dello spostamento totale la componente δ_i in una data direzione; ciò si potrà ottenere supponendo il punto stesso trattenuto da un vincolo lineare semplice, senza attrito, capace di sviluppare una reazione P_i avente la direzione sopradetta (nel modo già visto al N.º 43 precedente, per la dimostrazione diretta del 2.º teorema di Castigliano).

I nuovi vincoli così introdotti sono *sovrabbondanti*, e le loro *reazioni* P costituiscono le *incognite iperstatiche*, che qui dobbiamo determinare. Tali vincoli si potranno sempre riguardare come rigidi coll'avvertenza già sopra indicata di attribuire al sistema elastico stesso l'eventuale elasticità dei vincoli; gli spostamenti δ_i sono poi *spostamenti anelastici* dei vincoli, di natura analoga a quella della *deformazione anelastica* già considerata al N.º 41 nello studio delle coazioni elastiche.

Anzi sotto un certo punto di vista si potrebbe pure considerare paragonabile ad una speciale *distorsione* il complesso degli spostamenti δ_i, e come una *coazione elastica* lo stato di tensione da essi provocato.

Questi spostamenti δ_i costituiscono dunque le ulteriori variabili indipendenti oltre alle forze Q sopra dette. Lo stato di tensione ed il lavoro di deformazione saranno, come già si disse, funzioni delle une e delle altre variabili.

Per determinare la P_i generica noi possiamo sempre applicare il secondo teorema di Castigliano, conforme alla (116), che qui diviene:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \delta_i},$$

ove però, — ricordiamo, — *il lavoro* L va considerato come funzione dei soli spostamenti dei varî punti del sistema elastico e *la derivata parziale va intesa calcolata facendo variare la sola* δ_i, *restando fissi tutti gli altri punti, o almeno quelli in cui sono applicate forze esterne.*

Ora nelle applicazioni tecniche non riesce agevole — come si vedrà meglio in séguito, — calcolare direttamente una tale derivata parziale: riesce invece più facile calcolare per un dato incremento $d\delta_i$ dello spostamento δ_i, il corrispondente incremento (che indicheremo con $\frac{\partial L}{\partial \delta_i} d\delta_i$) (*) subìto dal lavoro di deformazione L, *ritenendo fissi tutti e soli i punti vincolati, tranne l'i^{esimo}, di cui si fa variare lo spostamento* δ_i, *e lasciando liberi di spostarsi tutti gli altri punti del sistema elastico.*

Questi in conseguenza subiscono degli spostamenti funzioni dell'incremento $d\delta_i$, e le forze Q in essi applicate generano dei lavori, la cui somma rappresenta la differenza tra l'incremento dL ora descritto e *l'incremento parziale rispetto a* δ_i dato dalla espressione: $\frac{\partial L}{\partial \delta_i} d\delta_i$.

Ora è facile vedere che questa somma di lavori (compiuti dalle forze Q per effetto degli spostamenti provocati dalla $d\delta_i$) si può esprimere con:

$$\frac{\partial L_{pq}}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

indicando con L_{pq} il *lavoro mutuo* dei due sistemi di forze P e Q (v. N.° 38).

Infatti, ricordiamo che il lavoro di deformazione L complessivo si può riguardare come quello generato sul *sistema principale* (inizialmente allo stato naturale non deformato) dall'azione delle forze P e

(*) N. B. Si ponga attenzione al segno ∂ *gotico*, distinto dal ∂ *rondino*.

Q, e se indichiamo poi con L_p ed L_q i lavori di deformazione dovuti separatamente e rispettivamente ai sistemi di forze P e Q, abbiamo come è ben noto:

$$L = L_p + L_q + L_{pq} \tag{125}$$

Il lavoro mutuo L_{pq} è quello generato dalle forze Q per effetto degli spostamenti prodotti dalle forze P.

D'altra parte lo spostamento δ_i si potrà riguardare come la somma di due spostamenti δ_{ip} e δ_{iq}, i quali sarebbero rispettivamente prodotti nello stesso punto e nella stessa direzione dalle azioni separate dei due sistemi di forze P e Q; e notiamo che le δ_{ip} e δ_{iq} sono tra loro indipendenti, come sono pure i sistemi di forze che li provocano, e perciò ne risulta che è indifferente derivare parzialmente rispetto a δ_i ovvero rispetto a δ_{ip}, sicchè si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} = \frac{\partial}{\partial \delta_{ip}} .$$

Orbene, quando lo spostamento δ_i subisce un incremento $d\delta_i$, il lavoro in conseguenza compiuto dalle forze esterne Q è appunto l'incremento conseguentemente subìto dal lavoro L_{pq}, ossia è:

$$\frac{\partial L_{pq}}{\partial \delta_{ip}} d\delta_i = \frac{\partial L_{pq}}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

come si era enunciato più sopra.

Colle notazioni così introdotte possiamo dunque scrivere:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = \frac{\partial L}{\partial \delta_i} + \frac{\partial L_{pq}}{\partial \delta_i} \tag{126}$$

La derivata del 1.° membro si può denominare *la derivata completa* di L rispetto allo spostamento δ_i, in *quanto nel calcolarla si tiene conto dell'incremento complessivo del lavoro L per effetto di $d\delta_i$, non solo in quanto varia δ_i nei termini di L che contengono esplicitamente δ_i, ma pure in quanto variano in conseguenza gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze Q, i quali spostamenti sono a loro volta funzioni implicite dei δ_i.*

Nello stabilire le leggi di tali variazioni bisogna, ben inteso, riferirsi sempre al *sistema principale* coi suoi vincoli principali, e tener ben presente che in esso, assegnati gli spostamenti — tutti indipendenti — δ_i degli n punti di applicazione delle reazioni iperstatiche, restano in conseguenza determinati gli spostamenti di *tutti* gli altri punti. Nei casi concreti più usuali è facile esprimere il lavoro mutuo L_{pq} come funzione degli spostamenti δ_{ip} e quindi calcolarne le derivate parziali rispetto a δ_{ip}, che, come sappiamo, è la stessa che rispetto a δ_i. Tale derivata si potrebbe denominare la *derivata complementare di L rispetto a* δ_i, *giacchè essa è la quantità che bisogna aggiungere alla derivata parziale per avere la derivata completa.*

Chi scrive qui preferisce proporre per questa derivata l'aggettivo *completa*, invece di adottare la denominazione di *derivata totale*, che in un certo senso potrebbe anche sembrare a tutta prima naturale ed opportuna: ciò allo scopo di evitare equivoci, in vista del fatto che il corrispondente incremento $\frac{\partial L}{\partial \delta_i} d\delta_i$ *non* è il differenziale *totale* di L. La denominazione qui introdotta non ha poi nulla a che vedere con altra analoga *(integrale completo)* in uso nella teoria delle equazioni differenziali.

Ora la *derivata completa* $\frac{\partial L}{\partial \delta_i}$ si può pure esprimere in un altro modo, come qui esponiamo.

Lo stato di tensione finale del nostro sistema elastico, (al quale stato corrisponde il lavoro di deformazione totale L), si può immaginare raggiunto introducendo dapprima sul sistema principale scarico, gli spostamenti δ_i assegnati, (ai quali corrisponderanno certe forze P_{si}, e conseguentemente un lavoro di deformazione, che indicheremo con $L'_{(\delta)}$), ed in sèguito, sul sistema completo, tenendo fissi nelle nuove posizioni finali gli n vincoli che hanno introdotto le δ_i, far agire le forze esterne Q, compiendosi così un lavoro che diremo L'_q, il quale risulta indipendente dalle P_i e dalle δ_i, poichè durante l'ultima fase ora descritta le δ_i non variano e le P_i non fanno lavoro).

Ne consegue la relazione:

$$L = L'_{\delta} + L'_q$$

dalla quale, tenendo presente che L'_q *non* dipende dalle δ_i, si ricava:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = \frac{\partial L'_{\delta}}{\partial \delta_i}, \qquad (127)$$

(essendo: $\frac{\partial L'_q}{\partial \delta_i} = 0$).

Ciò esprime che la *derivata completa* (nel senso sopra definito) *rispetto alla* δ_i *del lavoro di deformazione totale L dovuto alle forze*

P e Q sopra dette è uguale alla analoga derivata parziale del lavoro di deformazione $L'_{(\delta)}$ *provocato nel sistema principale scarico dagli spostamenti* δ_i *attribuiti agli n punti sottoposti ai vincoli sovrabbondanti,* (restando inteso che in tali derivate le δ_i hanno i valori finali).

Perciò la relazione (126) diviene:

$$\frac{\partial L'_{(\delta)}}{\partial \delta_i} = \frac{\partial L}{\partial \delta_i} + \frac{\partial L_{pq}}{\partial \delta_i} \tag{128}$$

la quale combinata colla (116), ci dà:

$$\boxed{P_i = \frac{\partial L'_{(\delta)}}{\partial \delta_i} - \frac{\partial L_{pq}}{\partial \delta_i}} \tag{129}$$

Quest'ultima relazione esprime il teorema che ci interessa, e cioè:

La forza incognita iperstatica P_i è uguale alla derivata parziale, rispetto allo spostamento rispettivo δ_i, del lavoro di deformazione provocato sul sistema principale scarico dagli spostamenti assegnati δ, diminuita della derivata parziale, pure rispetto a δ_i, del lavoro mutuo delle forze P e Q.

Quest'ultima derivata si può calcolare dividendo per $d\delta_i$ la somma dei prodotti delle forze esterne date Q per gli spostamenti dei rispettivi punti di applicazione provocati nel sistema completo dall'incremento infinitesimo $d\delta_i$ mentre restano fissi tutti gli altri punti vincolati.

La relazione (128) è dunque stata qui dedotta esprimendo un fatto analitico che, colle definizioni introdotte, e coi concetti fondamentali del calcolo differenziale, risulta del tutto ovvio, e cioè: la *derivata parziale è uguale alla derivata completa diminuita della derivata complementare.*

Ma d'altra parte noi possiamo pure ricavare la stessa (129), partendo direttamente dalla (125), calcolando mediante essa la $\frac{\partial L}{\partial \delta_i}$, tenendo conto della (127) ed osservando che il lavoro L_q — (*che le forze Q compierebbero agendo da sole sul sistema principale*), — risulta indipendente dagli spostamenti assegnati δ_i, di modo che risulta, per ogni valore di i (tra 1 ed n):

$$\frac{\partial L_q}{\partial \delta_i} = \frac{\partial L_q}{\partial \delta_i} = 0.$$

Dobbiamo pure ricordare che, secondo una constatazione già fatta, per la mutua indipendenza delle variabili δ_{ip} e δ_{iq}, si ha: $\frac{\partial}{\partial\delta_i} = \frac{\partial}{\partial\delta_{ip}}$, ed inoltre, essendo L_p indipendente dalle forze Q, la sua *derivata completa* coincide con quella parziale, ed è quindi:

$$\frac{\partial L_p}{\partial\delta_i} = \frac{\partial L_p}{\partial\delta_{ip}},$$

Infine per il secondo teorema di Castigliano si ha pure:

$$\frac{\partial L_p}{\partial\delta_{ip}} = P_i,$$

ove il lavoro L_p va considerato come funzione (quadratica omogenea) degli spostamenti δ_{ip}.

Con queste osservazioni, calcolando la $\frac{\partial L}{\partial\delta_i}$ per derivazione della (125) si ritrova appunto la (129).

L'utilità pratica del teorema ora qui dimostrato è dovuta appunto alla difficoltà di applicare direttamente il secondo teorema di Castigliano a calcolare le derivate parziali: $\frac{\partial L}{\partial\delta_i} = \frac{\partial L_p}{\partial\delta_{ip}}$, poichè è spesso malagevole esprimere il lavoro totale L in funzione degli spostamenti δ_i assegnati, od il lavoro L_p in funzione degli spostamenti δ_{ip}. Infatti questi sono incogniti, in quanto sono funzioni implicite delle forze P_i incognite, ovvero essi debbono venir determinati dalle relazioni.

$$\delta_{ip} = \delta_i - \delta_{iq}$$

calcolando preventivamente in funzione delle forze esterne Q gli spostamenti δ_{iq}; e tale determinazione riesce lunga, laboriosa, e conduce a delle espressioni di L_p eccessivamente complesse.

Riesce invece molto più semplice e comodo calcolare in funzione degli spostamenti assegnati δ e delle forze esterne Q i lavori L'_{δ} ed L_{pq}, ed eseguirne poi le derivate parziali che compaiono nella (129).

Il teorema espresso dalla (129) stessa si potrebbe designare brevemente come il *secondo teorema di Castigliano generalizzato*, ovvero come *teorema delle derivate complementari del lavoro di deformazione*, (e ciò in virtù della denominazione introdotta più sopra per la $\frac{\partial L_{pq}}{\partial\delta_i}$).

Questo teorema si presta dunque alla determinazione delle reazioni incognite iperstatiche, qui chiamate P_i, e ci fornisce colle relazioni analoghe alla (126) direttamente e separatamente i valori di tali incognite, *con equazioni già risolte* rispetto alle singole incognite.

Notiamo che invece il metodo di determinazione delle reazioni incognite iperstatiche basato sul teorema dei lavori virtuali (N.° 38, applicazione), ed anche quello basato sul primo teorema di Castigliano (v. N.° 43) ci forniscono tra le n incognite iperstatiche n equazioni lineari formanti un sistema, che deve essere risolto colla regola di Cramer.

L'applicazione della relazione (129) ci fornisce direttamente le formule risolutive del detto sistema di equazioni lineari. *L'eliminazione del sistema* stesso, anzichè per via analitica, *è fatta direttamente con i ragionamenti di carattere meccanico* esposti nel dedurre la (129) stessa.

Ed ora dobbiamo passare a stabilire un confronto tra i varî mezzi fin qui esposti per la determinazione delle incognite iperstatiche.

45. Le equazioni determinatrici delle reazioni incognite iperstatiche, ricavate dai teoremi precedenti.

a). Dal primo teorema di Castigliano.

Colle notazioni introdotte più sopra, e tenendo presenti quelle usate nel N.° 38 (applicazione, pag. 125 e seguenti), per un sistema elastico soggetto a forze esterne, ed a vincoli elastici principali (strettamente necessarî) sviluppanti reazioni C (staticamente determinate) soggetto pure a vincoli sovrabbondanti, sviluppanti reazioni incognite iperstatiche R', R'', R''', ecc., considerando queste come forze esterne, ed attribuendo invece allo stesso sistema elastico l'eventuale elasticità dei vincoli principali, si ha, conforme al teorema di Clapeyron:

$$L_e = \int_V \Phi \, dV - \frac{1}{2} \Sigma C \delta_c \qquad (130)$$

(ove, — specificando per maggior chiarezza, — la sommatoria sta a rappresentare il doppio del lavoro di deformazione dei vincoli elastici principali, e δ_c è lo spostamento elastico del punto d'applicazione di C nella direzione della forza, notando poi che possiamo completamente fare astrazione da analoghi spostamenti non elastici, poichè essi, attribuiti ai vincoli principali, non generano sforzi di sorta nel sistema principale.

Ripetiamo, (ciò che già si disse più sopra al precedente N.° 44), gli spostamenti di tutti i punti del sistema elastico vanno computati dalla posizione ch'esso assume dopo detti eventuali spostamenti anelastici dei vincoli principali.

La sommatoria poi compare col segno *meno* perchè colle ipotesi fatte le C si devono considerare come forze interne, e sono perciò di segno contrario a quello delle δ_c consentite dai vincoli rispettivi.

Indicando, come già al N.° 38, con δ' lo spostamento effettivo del punto di applicazione della reazione iperstatica R', misurato nella direzione della forza stessa, avremo per il primo teorema di Castigliano:

$$\delta' = \frac{\partial L_e}{\partial R'}$$

Poichè dunque δ_c è un cedimento elastico, provocato dalla stessa reazione C, avremo, per ciascun vincolo principale:

$$\delta_c = - a_c C \qquad (131)$$

ove a_c sarà la *costante elastica del vincolo principale* generico; il segno *meno* si ha perchè C è una reazione ed il cedimento elastico da essa provocato nel vincolo è di verso opposto a quello di C, mentre δ_c si è preso positivo nello stesso verso di C.

Teniamo poi presenti l'espressione del potenziale elastico (95), le (96) ed anche le (112) esposte al N.° 38; con ciò deriviamo la (130) rispetto ad R', ed osserviamo che si ha dalle (112):

$$\frac{\partial C}{\partial R'} = C' \qquad \ldots\ldots \text{ ecc.}$$

$$\frac{\partial X_x}{\partial R'} = X'_x \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial Y_z}{\partial R'} = Y'_z \qquad \ldots\ldots ;$$

quindi tenendo conto della (131) si ottiene:

$$\delta' = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial R'} dV + \Sigma a_c C \frac{\partial C}{\partial R'} =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_x} \cdot \frac{\partial X_x}{\partial R'} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial Y_z} \; \frac{\partial Y_z}{\partial R'} + \ldots \right) dV - \Sigma \frac{\partial C}{\partial R'} \delta_c$$

e quindi:

$$\left.\begin{array}{l} \delta' = -\int_V (X'_x \varepsilon_x + \ldots + Y'_z \gamma_{yz} + \ldots)\, dV - \Sigma\, C' \delta_c \\ \text{analogamente:} \\ \delta'' = -\int_V (X''_x \varepsilon_x + \ldots + Y''_z \gamma_{yz} + \ldots)\, dV - \Sigma\, C'' \delta_c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (111)$$

Si ritrovano così le (111) già ottenute al N.^{0} 38 (applicazione), utilizzando l'equazione (110) dei lavori virtuali (o del lavoro mutuo esterno ed interno); così resta verificato ciò che s'era preannunziato al N.^{0} 43, pag. 155 ossia l'identità delle equazioni, che, per determinare le forze incognite iperstatiche, si ricavano dall'equazione dei lavori virtuali, e dal primo teorema di Castigliano.

Può essere ora utile trasformare le (111), esprimendo le $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$, le δ_c, δ', δ'' ecc., come funzioni lineari delle R', R'', $R'''\ldots$, com'è lecito fare in virtù del principio della sovrapposizione degli effetti.

Potremo porre:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon^{(0)}_x + \varepsilon'_x R' + \varepsilon''_x R'' + \varepsilon'''_x R''' + \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{yz} = \gamma^{(0)}_{yz} + \gamma'_{yz} R' + \gamma''_{yz} R'' + \gamma'''_{yz} R''' \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (132)$$

ove i coefficienti ed i termini costanti hanno significati del tutto analoghi a quelli dei corrispondenti coefficienti e termini costanti delle (112). Cioè $\varepsilon^{(0)}_x \ldots \gamma^{(0)}_{yz} \ldots$; $\varepsilon'_z \ldots \gamma'_{yz} \ldots$; $\varepsilon''_x \ldots \gamma''_{yz} \ldots$; ecc. sono le componenti di deformazione provocate in un punto generico *del sistema principale* rispettivamente e separatamente dai sistemi di forze B (esterne date), A' ($R' = 1$), A'' ($R'' = 1$) ecc..., come è detto nella già citata applicazione al N.^{0} 38, pag. 125 e seguenti.

Le δ_c sono date dalle (131) e trasformabili secondo la prima delle (112), in:

$$\delta_c = -a_c (C_0 + C' R' + C'' R'' + \ldots) \quad (133)$$

o anche, direttamente:

$$\delta_c = \delta^0_c + \delta'_c R' + \delta''_c R'' + \delta'''_c R''' + \dots \tag{134}$$

ove i coefficienti e termini noti hanno significati analoghi a quelli degli omologhi delle (132), e sono anche esprimibili per confronto colla (133).

Inoltre gli spostamenti $\delta', \dots$ potranno in generale comprendere una *parte anelastica* costante $\delta'_a, \dots$ ed una *parte elastica*, proporzionale alla $R' \dots$; perciò si potrà porre:

$$\delta' = \delta'_a - a'R'\,; \quad \delta'' = \delta''_a - a''R''\,; \quad \delta''' = \delta'''_a - a'''R'''\,; \dots \tag{135}$$

ove delle *costanti elastiche* a', a'', a''',... si può ripetere (anche per ciò che riguarda il segno), quanto si disse sopra della a_c nella (131).

Ora se le sostituzioni indicate dalle (132), (133) e (135), si eseguiscono nella prima delle (111), questa si trasforma come segue:

$$\left.\begin{aligned} \delta'_a - a'R' = & -\int_V (X'_x \varepsilon^0_x + \dots + Y'_z \gamma^0_{yz} + \dots)\, dV - \Sigma\, C' \delta^0_c - \\ & - R' \left| \int_V (X'_x \varepsilon'_x + \dots + Y'_z \gamma'_{yz} + \dots)\, dV + \Sigma\, C' \delta'_c \right| - \\ & - R'' \left| \int_V (X'_x \varepsilon''_x + \dots + Y'_z \gamma''_{yz} + \dots)\, dV + \Sigma\, C' \delta''_c \right| - \\ & - \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Raccogliendo i termini noti al primo membro, e nel secondo ordinando rispetto alle incognite R', R'', R''', ecc... si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} & \delta'_a + \int_V (X'_x \varepsilon^0_x + \dots + Y'_z \gamma^0_{yz} + \dots)\, dV + \Sigma\, C' \delta^0_c = \\ & = R' \left| a' - \int_V (X'_x \varepsilon'_x + \dots + Y'_z \gamma'_{yz} + \dots)\, dV - \Sigma\, C' \delta'_c \right| + \\ & + R'' \left| - \int_V (X'_x \varepsilon''_x + \dots + Y'_z \gamma''_{yz} + \dots)\, dV - \Sigma\, C' \delta''_c \right| + \\ & + \dots\dots\dots \text{ecc.} \dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

In modo analogo, dalla seconda delle (111) si ricava pure:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta''_a + \int_V (X''_x \varepsilon^{(0)}_x + \ldots + Y''_z \gamma^{(0)}_{yz} + \ldots)\, dV + \Sigma\, C'' \delta^{(0)}_c = \\
&= R' \left| -\int_V (X''_x \varepsilon'_x + \ldots + Y''_z \gamma'_{yz} + \ldots)\, dV - \Sigma\, C'' \delta'_c \right| + \\
&+ R'' \left| a'' - \int_V (X''_x \varepsilon''_x + \ldots + Y''_z \gamma''_{yz} + \ldots)\, dV - \Sigma\, C'' \delta''_c \right| + \\
&+ R''' \left| -\int_V (X''_x \varepsilon'''_x + \ldots + Y''_z \gamma'''_{yz} + \ldots)\, dV - \Sigma\, C'' \delta'''_c \right| + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (137)$$

E così di sèguito si possono trasformare tutte le (111).

Constatiamo così direttamente che le (137) costituiscono un sistema di n equazioni lineari *non* omogenee tra le n incognite iperstatiche R', R''...; e possiamo trovare súbito il significato fisico dei termini noti e dei coefficienti.

Infatti, nel primo membro della (137) consideriamo i termini che seguono il primo δ'_a; secondo la (110) (equazione dei lavori virtuali) applicata alle forze del sistema A' ($R' = 1$) ed agli spostamenti $\varepsilon^{(0)}_x \ldots \gamma^{(0)}_{yz} \ldots$, detti termini esprimono lo spostamento del punto d'applicazione della reazione R', in senso opposto a questa, provocato dalle forze esterne date, agenti sul sistema principale; per la condizione che il vincolo sviluppante la R' risulti connesso, ne consegue che il secondo membro deve rappresentare lo spostamento del suddetto punto, provocato nella direzione e verso della R' dal complesso delle reazioni R', R'', R''',... agenti simultaneamente sul sistema principale scarico. Ciò risulta pure verificato, osservando che ancora per la (110), i coefficienti delle R', R'', R'''... rappresentano rispettivamente gli spostamenti provocati nel punto di applicazione della R', in direzione e verso di questa dalle forze $R' = 1$, $R'' = 1$, $R''' = 1$,... agenti separatamente sul sistema principale scarico.

Stabilito così il significato dei secondi membri delle (137), risulta chiaro che, in un sistema elastico *non degenere*, essi non possono mai annullarsi simultaneamente, per valori non tutti nulli delle R', R'', R''', ecc...; se no si cadrebbe nell'assurdo di un lavoro di defor-

> il lavoro compiuto dalle forze [illegible] e dalle reazioni (provocate da R' = 1) per effetto degli spostamenti provocati dalle forze esterne cioè il lavoro compiuto dalle R' = 1 per questi spostamenti. L'spostamento tot[illegible] del vincolo è [illegible] al solo [illegible] (p. 178).

mazione, (o energia potenziale elastica) uguale a zero corrispondente a forze diverse da zero. Resta perciò confermato ciò che già s'era visto a pag. 127 (N.^{0} 38); e cioè che il determinante dei coefficienti delle (137) deve essere sempre diverso da zero, ed il sistema costituito dalle stesse (137), [le quali altro non sono che le (111) trasformate], risulta sempre determinato.

Notiamo poi che le (137) si possono ancora trasformare sostituendo alle $\delta^{(0)}{}_c$, $\delta'_c \ldots$ i loro valori espressi secondo la (131): $\delta^{(0)}{}_c = -a_c C_0$; $\delta'_c = -a_c C'$;... ecc. facendo così comparire le costanti elastiche dei vincoli principali, e le rispettive reazioni staticamente determinate C_0, C', C'', ecc., già definite al N.^{0} 38.

b). DAL SECONDO TEOREMA DI CASTIGLIANO GENERALIZZATO, (O TEOREMA DELLE DERIVATE COMPLEMENTARI DEL LAVORO).

Vediamo ora come alla determinazione delle reazioni incognite iperstatiche si possa applicare il sopradetto teorema, dimostrato al N.^{0} 44, precedente, ed espresso dalla (129).

Teniamo ben presente la convenzione già fatta di attribuire al sistema elastico considerato l'elasticità dei vincoli, e di contare gli spostamenti a partire dalla posizione assunta dal sistema principale dopo eventuali spostamenti anelastici dei vincoli principali.

Con ciò i punti di applicazione delle reazioni iperstatiche R', R'', R''',... si devono intendere suscettibili di soli spostamenti anelastici iniziali, da ritenersi assegnati, ed indipendenti dalle forze applicate; tali spostamenti poco più sopra sono stati designati con δ'_a, δ''_a, $\delta'''_a \ldots$; essi corrispondono a quelli che nella (129), N.^{0} 44, erano indicati con δ_i; e così le P_i considerate pure nella (129) sono nel presente problema sostituite colle R', R'', R'''...; mentre anche qui indicheremo con Q genericamente le forze esterne date.

Per applicare la (129) occorre esprimere in funzione delle δ'_a, δ''_a, δ'''_a,... il lavoro $L'_{(\delta)}$, ed il lavoro mutuo là indicato con L_{pq}, che qui dovremo designare con L_{rq}.

Il lavoro $L'_{(\delta)}$ si esprime facilmente come funzione quadratica omogenea delle δ'_a, δ''_a, $\delta'''_a \ldots$, poichè le R', R'', R''',... provocate dai dati spostamenti δ'_a, δ''_a, $\delta'''_a \ldots$, si possono esprimere come funzioni lineari omogenee degli spostamenti stessi, con formole analoghe alle (122) del N.^{0} 43; di modo che si ha genericamente:

$$R^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} \, \delta^{(k)}{}_a \; ; \tag{138}$$

perciò si ha pure, con espressione analoga alla (124):

$$L'_{(\delta)} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} \delta^{(i)}{}_a \delta^{(k)}{}_a \; ; \tag{139}$$

e teniamo presente che le H_{ik} sono i *coefficienti di influenza*, già specificati al N.° 43.

Per esprimere poi il lavoro L_{rq}, consideriamo lo spostamento u_r, v_r, w_r provocato nel punto generico del sistema elastico dalle forze R', R'', ... ecc... agenti simultaneamente sul sistema principale.

Al solito, per la sovrapposizione degli effetti, potremo porre:

$$\begin{aligned} u_r &= u' R' + u'' R'' + u''' R''' + \dots \\ v_r &= v' R' + v'' R'' + v''' R''' + \dots \\ w_r &= w' R' + w'' R'' + w''' R''' + \dots \end{aligned} \tag{140}$$

ove, come in altri casi analoghi, le u', u''...; v', v''... w', w''..., sono pure *coefficienti di influenza* di ben noto significato.

Allora, se X... X_n...; Q_x..., sono rispettivamente le componenti delle forze di massa, delle forze superficiali ripartite, e di quelle concentrate, appartenenti al sistema di forze esterne date Q, si ha, come è ben noto:

$$L_{rq} = \int_V \rho (X u_r + Y v_r + Z w_r)\, dV + \int_S (X_n u_r + Y_n v_r + Z_n w_r)\, dS + \\ + \Sigma (Q_x u_r + Q_y v_r + Q_z w_r) .$$

Calcoliamo ora le derivate rispetto a $\delta^{(i)}{}_a$ dei due lavori qui espressi, le quali entrano nell'espressione della (129), che in questo caso diviene:

$$R^{(i)} = \frac{\partial L'_{(\delta)}}{\partial \delta^{(i)}{}_a} - \frac{\partial L_{rq}}{\partial \delta^{(i)}{}_a} \tag{129 bis}$$

Dalla (139) si ricava:

$$\frac{\partial L'_{(\delta)}}{\partial \delta^{(i)}{}_a} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} \delta^{(k)}{}_a \tag{141}$$

e notiamo che essa rappresenta il valore della reazione $R^{(i)}$ che corrisponde ai dati spostamenti δ'_a, δ''_a, ecc. nel caso in cui manchino tutte le forze date Q.

Si ha poi, (essendo le forze Q indipendenti dai δ'_a, $\delta''_a \dots$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{rq}}{\partial \delta^{(i)}_a} &= \int_V \rho \left(X \frac{\partial u_r}{\partial \delta^{(i)}_a} + Y \frac{\partial v_r}{\partial \delta^{(i)}_a} + Z \frac{\partial w_r}{\partial \delta^{(i)}_a} \right) dV + \\ &+ \int_S \left(X_n \frac{\partial u_r}{\partial \delta^{(i)}_a} + Y_n \frac{\partial v_r}{\partial \delta^{(i)}_a} + Z_n \frac{\partial w_r}{\partial \delta^{(i)}_a} \right) dS + \\ &+ \Sigma \left(Q_x \frac{\partial u_r}{\partial \delta^{(i)}_a} + Q_y \frac{\partial v_r}{\partial \delta^{(i)}_a} + Q_z \frac{\partial w_r}{\partial \delta^{(i)}_a} \right) .\end{aligned} \tag{142}$$

Ora dalle (140), derivando, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial \delta^{(i)}_a} &= \frac{\partial u_r}{\partial R'} \frac{\partial R'}{\partial \delta^{(i)}_a} + \frac{\partial u_r}{\partial R''} \frac{\partial R''}{\partial \delta^{(i)}_a} + \frac{\partial u_r}{\partial R'''} \frac{\partial R'''}{\partial \delta^{(i)}_a} + \dots = \\ &= u' \frac{\partial R'}{\partial \delta^{(i)}_a} + u'' \frac{\partial R''}{\partial \delta^{(i)}_a} + u''' \frac{\partial R'''}{\partial \delta^{(i)}_a} + \dots ;\end{aligned}$$

ma dalle (138) risulta:

$$\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \delta^{(i)}_a} = \mathrm{H}_{ki} = \mathrm{H}_{ik} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial \delta^{(k)}_a} ;$$

e perciò si ha infine:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \delta^{(i)}_a} = \mathrm{H}_{i1} u' + \mathrm{H}_{i2} u'' + \mathrm{H}_{i3} u''' + \dots = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} u^{(k)}$$

ed analogamente:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \delta^{(i)}_a} = \mathrm{H}_{i1} v' + \mathrm{H}_{i2} v'' + \mathrm{H}_{i3} v''' + \dots = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} v^{(k)} \tag{143}$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial \delta^{(i)}_a} = \mathrm{H}_{i1} w' + \mathrm{H}_{i2} w'' + \mathrm{H}_{i3} w''' + \dots = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} w^{(k)}$$

Sostituiti questi valori nella (142), e tenendo conto della (141), la

(129 bis), dopo ovvie riduzioni ci fornisce:

$$R^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik} \Big| \delta^{(k)}{}_a - \int_V \rho (X u^{(k)} + Y v^{(k)} + Z w^{(k)}) \, dV -$$

$$- \int_S (X_n u^{(k)} + Y_n v^{(k)} + Z_n w^{(k)}) \, dS -$$

$$- \Sigma \, (Q_x u^{(k)} + Q_y v^{(k)} + Q_z w^{(k)}) \Big| \qquad (144)$$

(ove l'ultima sommatoria Σ (...) entro la [ ] s'intende estesa a tutte le forze concentrate del sistema Q).

Variando i tra 1 ed n si ottengono i valori di tutte le n incognite iperstatiche; le equazioni (144) ci dànno direttamente e separatamente i valori delle varie incognite: tali equazioni si possono considerare come le *formule risolutive del sistema* (137), equivalente, come sappiamo, alle (111). Esse però sono state qui ricavate direttamente, (in base al *secondo teorema di Castigliano generalizzato*, o *delle derivate complementari del lavoro*), evitando così l'eliminazione analitica del sistema (137). Inoltre i coefficienti che nella (144) moltiplicano le componenti delle forze esterne sono, come le H_{ik}, *coefficienti di influenza*, indipendenti dalle forze esterne (o, come si dice nella tecnica, dalla *condizione di carico*), ma dipendono solo dalla forma, dalle dimensioni e proprietà del materiale costituente il sistema elastico che si studia.

Essi devono essere determinati una volta tanto, e poi in sèguito possono servire a studiare il regime statico del sistema elastico per un qualunque sistema di forze esterne Q e di spostamenti assegnati ai vincoli $\delta^{(i)}{}_a$.

In altra parte del libro vedremo come al metodo analitico qui ora esposto faccia riscontro un metodo grafico basato appunto sull'uso di certe così dette *linee d'influenza*, le quali altro non sono che *diagrammi dei coefficienti d'influenza* sopra definiti ed espressi.

È utile ora notare che a secondo membro della (144) il gruppo dei termini contenenti le $\delta_a{}^{(k)}$ rappresenta il valore di $R^{(i)}$ provocato dai soli spostamenti assegnati anelastici $\delta^{(k)}{}_a$, attribuiti ai rispettivi punti vincolati, mentre mancano tutte le forze esterne (sistema elastico scarico); i rimanenti termini del suddetto secondo membro costituiscono quel valore della reazione $R^{(i)}$, il quale, mentre restan fissi tutti i punti vincolati, vien provocato dalle forze esterne date (sistema Q); i singoli termini rappresentano i rispettivi contributi (e ciò è in armonia col principio della sovrapposizione degli effetti).

Il segno negativo di questi ultimi termini è dovuto al fatto seguente: la reazione $R^{(i)}$ provocata nelle condizioni ora dette dalle forze esterne Q deve essere tale da annullare lo spostamento che al rispettivo punto d'applicazione supposto libero dal vincolo, (restando fissi tutti gli altri punti vincolati), imprimerebbero le forze stesse Q; perciò questo spostamento e la $R^{(i)}$ devono essere di senso opposto; ne consegue che deve essere negativo il lavoro mutuo del sistema Q e della forza $R^{(i)}$ agenti sul sistema elastico qui supposto avente fissi tutti i punti vincolati, eccetto l'i^{esimo} liberato dal vincolo rispettivo.

È istruttivo notare come alla (144) si possa giungere anche per altra via più diretta.

Infatti, secondo le (122), si può sempre esprimere la $R^{(i)}$ nella forma:

$$R^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}_{ik}\, \delta_r^{(k)}$$

indicando con $\delta_r^{(k)}$ lo spostamento che nella direzione e nel verso di $R^{(k)}$, viene attribuito al punto vincolato k^{esimo} dal complesso delle R effettive, quando esse agiscano da sole sul sistema elastico principale scarico.

D'altra parte, se indichiamo con $\delta_q^{(k)}$ lo spostamento che nel punto vincolato k^{esimo} viene provocato dalle forze Q agenti sul sistema principale, per le note ragioni di continuità del sistema elastico in adiacenza dei vincoli, già illustrate ed applicate in precedenza, si deve avere:

$$\delta_r^{(k)} = \delta_a^{(k)} - \delta_q^{(k)}$$

(cfr. n. 44, pag. 172).

Ma $\delta_q^{(k)}$ si può evidentemente calcolare come il lavoro mutuo della forza $R^{(k)} = 1$ e del sistema delle forze Q, agenti sul sistema principale.

Ne consegue che la $\delta_r^{(k)}$ è precisamente uguale al gruppo dei termini entro parentesi [ ] nella (144). — Così questa equazione risulta in altro modo giustificata.

Non ostante questa nuova dimostrazione assai semplice ed intuitiva, si deve pur tuttavia ritenere utile ed opportuno l'avere più sopra ricavato la (144) dai concetti generali, che stanno a base dei teoremi di Castigliano.

Richiamando ciò che si disse al N.° 41, crediamo utile ripetere esplicitamente che tutti i metodi qui indicati per la determinazione delle incognite iperstatiche, valgono pure nel caso in cui tra le forze date sia qualche sistema di coazioni elastiche: allora basterà tra le forze esterne includere le forze distorcenti come pure le forze (Σ) e ($-\Sigma$) trasmettentisi attraverso ai tagli Σ delle distorsioni equivalenti, come appunto si disse al luogo citato.

Nelle applicazioni tecniche, le quali verranno svolte in altre parti di questo libro, avremo sovente occasione di applicare senz' altro i metodi qui studiati per la risoluzione dei sistemi iperstatici; ciò si potrà fare immediatamente, appena avremo imparato a calcolare le componenti speciali di pressione e le componenti di deformazione in funzione delle forze esterne per i sistemi elastici che si presentano nella pratica; e ciò faremo tra breve.

45. Nota su un' estensione dei teoremi di Castigliano.

Nei numeri precedenti noi abbiamo dimostrato ed applicato i teoremi di Castigliano, pur supponendo che tra le forze applicate esistano anche forze ripartite: però le variabili indipendenti, rispetto alle quali abbiamo eseguito le derivate parziali del lavoro di deformazione, come pure le grandezze ottenute quali risultati delle dette derivazioni, erano tutte esclusivamente o spostamenti di punti isolati, o forze concentrate.

E stata pure studiata un' estensione dei detti teoremi, per lo scopo di ottenere, con operazioni analoghe alla derivazione, gli spostamenti espressi come funzioni delle coordinate dei punti spostati, ovvero le componenti specifiche (unitarie) di forze superficiali ripartite, pure espresse da funzioni come sopra.

Tale studio, che per certe applicazioni pratiche può riuscire molto importante, fu fatto dal Prof. *L. Donati*, nella sua « *Introduzione teorica al Corso di Fisica tecnica* » (litografia: Bologna 1907). — Per lo studio stesso occorre introdurre alcune estensioni del concetto di funzione, e conseguentemente di derivata; e precisamente è necessario usare quelle che nell' analisi superiore si chiamano *funzioni di linea*, [le quali sono funzioni, non di valori isolati di variabili indipendenti, ma della *forma* di altre funzioni, ossia del gruppo di tutti i valori che altre funzioni di date variabili indipendenti prendono entro certi intervalli o campi].

Cogli attuali piani di studî, tali concetti e le relative operazioni analoghe alla derivazione non rientrano affatto nella preparazione degli allievi ingegneri. Perciò qui noi ci limitiamo a citare il pregevole lavoro sopra indicato, ed a rimandare ad esso chi volesse approfondire l'argomento; questo è specialmente utile per la determinazione di reazioni ripartite di vincoli lineari o superficiali estesi, ovvero per studiare la ripartizione di forze interne sulle superficie di tagli idealmente praticati nell'interno del sistema elastico.

46. Teorema di Menabrea, o del minimo lavoro.

Consideriamo un sistema elastico comunque trattenuto da vincoli rigidi sovrabbondanti, colla solita avvertenza di attribuire al sistema stesso l'eventuale elasticità dei detti vincoli, come già si disse più sopra: supponiamo poi che il sistema elastico sia *completamente privo di sforzi interni indipendenti dalle forze esterne applicate,* di modo che *manchino coazioni elastiche prodotte da distorsioni o da altre cause analoghe* (v. N.° 39 e segg.), ed inoltre *i punti vincolati abbiano posizioni perfettamente compatibili colla forma che il sistema elastico liberato dai vincoli sovrabbondanti (sistema principale), assume nel suo stato naturale non deformato.*

Se sul sistema elastico agiscono delle forze esterne date Q, i vincoli sovrabbondanti svilupperanno certe reazioni iperstatiche R', R'', R''',...; inoltre potremo idealmente praticare nel sistema stesso uno o più tagli (un taglio multiplo); secondo una superficie complessiva Σ, attraverso alla quale si trasmetteranno le forze interne antagoniste (Σ) e $(-\Sigma)$: notiamo che pure la ripartizione di tali forze interne risulta staticamente indeterminata.

Sulla generalità dei tagli che si possono immaginare praticati e sulle modalità delle forze (Σ) occorre tener presente quanto è esposto al N.° 41 al titolo: « *Osservazioni sulle distorsioni e relativi tagli* ».

Già sappiamo che le forze incognite iperstatiche R', R'', R'''... (Σ) e $(-\Sigma)$ vengono determinate dalla condizione di esser tali, che agendo simultaneamente sul sistema elastico principale tagliato, inducano nei punti di applicazione delle R', R'',... degli spostamenti assoluti, e nei varî punti di Σ degli spostamenti relativi, rispettivamente uguali ed opposti a quelli negli stessi punti provocati dalle forze esterne date, agenti sullo stesso sistema principale tagliato.

Consideriamo complessivamente il sistema delle forze effettive agenti sul sistema elastico principale tagliato: le Q, le R', R'',... le (Σ) e $(-\Sigma)$; designiamo brevemente questo sistema con $[Q, R, (\Sigma)]$: esso è dunque tale che agendo sul sistema elastico principale tagliato provoca spostamenti nulli nei punti vincolati, e spostamenti relativi pure nulli in ogni punto delle facce del taglio Σ.

Indichiamo con L il lavoro di deformazione effettivo, che è quello dovuto allo stesso sistema di forze $[Q, R, (\Sigma)]$.

Ora attribuiamo alle forze $R', R''\ldots, (\Sigma)$ e $(-\Sigma)$ — (pensate sempre come agenti sul sistema principale tagliato) — certe variazioni arbitrarie piccolissime $\Delta R', \Delta R'',\ldots (\Delta\Sigma), (-\Delta\Sigma)$, le quali nel loro complesso verranno designate come sistema $\Delta[R,(\Sigma)]$.

Notiamo di nuovo che le variazioni $(\Delta\Sigma)$ e $(-\Delta\Sigma)$ devono soddisfare alle condizioni specificate nel passo del N.° 41, citato poco più sopra. p. 148

È chiaro che tali forze $\Delta[R,(\Sigma)]$ indurranno spostamenti nei punti vincolati, e spostamenti relativi tra i punti delle facce del taglio Σ; esse corrispondono quindi ad una costrizione da parte dei vincoli, e ad una distorsione secondo il taglio Σ.

Proponiamoci di calcolare la conseguente variazione ΔL del lavoro di deformazione effettivo L, or ora definito.

Poichè le forze esterne date Q non vengono alterate per detta variazione $\Delta[R,(\Sigma)]$, se applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo affermare che ΔL risulta uguale alla somma del lavoro di deformazione proprio del sistema $\Delta[R,(\Sigma)]$, più il lavoro mutuo dei due sistemi $[Q, R, (\Sigma)]$ e $\Delta[R, (\Sigma)]$.

Ora questo lavoro mutuo è zero, comunque si sia scelta la variazione $\Delta[R, (\Sigma)]$, poichè, esso si può valutare come lavoro delle forze $\Delta[R,(\Sigma)]$ per effetto degli spostamenti effettivi dovuti al sistema $[Q,R,(\Sigma)]$; e già sappiamo che, per l'ipotesi fatta, sono nulli tutti gli spostamenti provocati da questo sistema di forze nei punti di applicazione delle $R', R'',\ldots$ e nulli pure gli spostamenti relativi delle facce del taglio Σ.

Ne consegue che la detta variazione ΔL si riduce al solo lavoro di deformazione dovuto alle forze $\Delta[R, (\Sigma)]$, e perciò è essenzialmente positiva, quindi il lavoro L sopra definito è il minimo dei valori che può assumere il lavoro di deformazione complessivo per valori delle forze $R', R''\ldots, (\Sigma), (-\Sigma)$ diversi da quelli che soddisfano alle sopra descritte condizioni di rigidità dei vincoli, ed alla mancanza di coazioni elastiche.

Si può in conseguenza enunciare il seguente teorema:

In un sistema elastico con vincoli sovrabbondanti rigidi, e privo di sforzi interni indipendenti da forze esterne date (in modo che i vincoli siano compatibili colla forma del sistema allo stato naturale non deformato ed in modo che non esistano coazioni elastiche dovute a cause interne), i valori effettivi delle reazioni iperstatiche, e le distribuzioni delle tensioni interne attraverso ad un qualsiasi taglio ideale Σ, *rendono minimo il lavoro di deformazione del sistema elastico.* In altri termini, *il lavoro di deformazione dovuto ai valori* *delle reazioni R', R'',... ed alla distribuzione di sforzi interni corrispondenti ai vincoli rigidi, ed alla completa assenza di ogni spostamento relativo tra le facce di qualsiasi taglio interno, è il minimo tra i valori dell'analogo lavoro, corrispondente a spostamenti anelastici dei punti vincolati, od a spostamenti relativi delle facce dei detti tagli.* Per quanto si disse al N.° 41, pag. 135, è ovvio che tali spostamenti relativi possono rappresentare il risultato di eventuali deformazioni anelastiche interne.

Questo è il *teorema di Menabrea*, o *del minimo lavoro.*

Esso fu enunciato per la prima volta dal Generale Menabrea, all'Accademia delle Scienze di Torino nel 1857 sotto il nome di *principio di elasticità* o *del minimo lavoro.*

A scopo di maggior chiarezza crediamo utile fare qui un'osservazione di carattere critico.

Come abbiamo visto, la dimostrazione del detto teorema richiede che nel sistema elastico non vi siano coazioni elastiche nè dovute a cause interne, nè a condizioni di vincolo, e ciò notiamo esplicitamente per mettere in evidenza che *questo teorema* **non** *serve a determinare le reazioni iperstatiche o la distribuzione di forze interne provocate da una coazione interna* (o distorsione equivalente), *ovvero da assegnati spostamenti dei punti vincolati.*

Infatti in tal caso, poichè il sistema $[Q, R, (\Sigma)]$ provoca nei punti vincolati, o tra le facce del taglio Σ degli spostamenti non tutti nulli, non si può affermare (come si fece nella precedente dimostrazione) che il lavoro mutuo dei sistemi $[Q, R, (\Sigma)]$ e $\Delta[R, (\Sigma)]$ sia sempre nullo, comunque si scelga la variazione $\Delta[R, (\Sigma)]$.

Può quindi accadere che detto lavoro mutuo risulti negativo, ed in valore assoluto maggiore del lavoro di deformazione proprio del sistema $\Delta[R, (\Sigma)]$, perciò la variazione ΔL del lavoro di deformazione effettivo può anche essere negativa, ed il lavoro L *non* è in condizione di minimo.

D'altra parte, per quanto sopra si disse, risulta che nel caso in cui esista una coazione interna ed una costrizione da parte dei vincoli, il lavoro di deformazione è costituito dalla somma del valore L (minimo), — corrispondente alle date forze Q, ed all'ipotesi in cui manchi la coazione e la costrizione prodotta dai vincoli, — più il lavoro di deformazione (energia vincolata), sempre positivo, dovuto alle dette cause indipendenti dalle forze date Q.

Con questa osservazione riesce chiarita la *vera portata ed applicabilità del teorema di Menabrea,* la quale d'altra parte risultava già direttamente dalla dimostrazione su esposta, in quanto la mancanza di coazioni elastiche è un'*ipotesi necessaria* per la dimostrazione stessa.

Tale applicabilità risulta dunque limitata come sopra s'è precisato, a differenza di quello che accade per gli altri teoremi di elasticità sopra studiati, per i quali anzi si è potuta stabilire la massima generalità, anche per i casi di coazioni elastiche. (V. N.° 41, pag. 139 e N.° 44, in fine).

Nel suo campo di applicabilità il teorema di Menabrea, usato per la determinazione di reazioni iperstatiche concentrate R', R'',... ci conduce alle stesse equazioni già stabilite in virtù del primo teorema di Castigliano; infatti, poichè il lavoro L deve essere un minimo per i cercati valori delle R', R'',... questi devono soddisfare alle ben note condizioni:

$$\frac{\partial L}{\partial R'}=0\ ,\quad \frac{\partial L}{\partial R''}=0,\ldots$$

le quali, d'altra parte, conforme al citato teorema di Castigliano esprimono appunto che son nulli gli spostamenti dei punti di applicazione delle stesse R', R''....

Lo stesso teorema di Menabrea usato invece a calcolare delle reazioni ripartite di vincoli estesi, o la distribuzione di tensioni interne condurrebbe a risultati analoghi a quelli che si possono ottenere coll'estensione del teorema di Castigliano, già accennata al N.° 45, secondo lo studio del Donati colà citato.

A titolo di notizia dobbiamo riferire che l'interpretazione del teorema di Menabrea e la valutazione del suo significato fisico hanno dato luogo a numerose controversie tra i varî studiosi ed autori.

Alcuni vollero attribuirgli un'interpretazione così detta « finalistica », ritenendo cioè che, secondo detto teorema, la natura persegua e raggiunga la finalità di realizzare l'equilibrio elastico col *minimo mezzo.*

Notiamo che analoghe interpretazioni furono proposte per altri fenomeni fisici o meccanici, in cui si trova realizzata una qualche condizione di minimo: — esempî: il principio della *minima azione* nel moto di un sistema materiale; la minima energia potenziale pure in un sistema materiale in equilibrio stabile; il minimo tempo di propagazione di un raggio luminoso in un mezzo trasparente; e simili.

Orbene, le relative interpretazioni *finalistiche* sono prive di significato, poichè in tutti tali e simili casi lo stato di fatto caratterizzato dalla condizione di minimo si presenta come l'unico possibile tra infiniti *non* realizzabili.

I concetti finalistici possono aver significato solo nell'interpretare certi fatti della natura organica, quando nella forma o struttura di certi organi od organismi, ovvero nella realizzazione di certi movimenti, la natura pone in atto una soluzione ottima tra infinite tutte possibili, tra le quali alcune anche attuate in organismi meno perfetti.

Esempî tipici di questi fatti, tra moltissimi che si potrebbero citare, sono: la stessa disposizione delle trabecole ossee, secondo linee isostatiche, già descritte in fine del N.^{0} 23, pag. 71 e 72; la forma esterna del corpo di certi pesci o di certi uccelli, disposta in modo da presentare la minima resistenza all'avanzamento nell'acqua o nell'aria; ed altri simili ben noti.

Esclusa dunque, per le ragioni su esposte, la detta interpretazione finalistica del nostro teorema, alcuni studiosi, quasi per reazione, vollero negargli ogni significato fisico, attribuendogli solo un valore puramente analitico, in quanto, all'*unico stato di equilibrio possibile*, colla conseguente unica distribuzione di reazioni iperstatiche e di tensioni interne corrisponde un unico valore del lavoro di deformazione, che è quello minimo sopra detto; sotto questo punto di vista tutti i valori del lavoro di deformazione diversi dal minimo, si consideravano come valori numerici di quella funzione delle forze Q, R, (Σ), la quale, col suo valore minimo, corrispondente ai valori effettivi delle R e (Σ) compatibili coi vincoli, fornisce il lavoro di deformazione effettivo.

Orbene la dimostrazione sopra esposta, chiarisce e precisa *l'esatto significato ed il vero valore fisico del teorema di Menabrea*, in quanto da essa risulta che *distribuzioni di forze* R *e* (Σ) *diverse da quelle che rendono minimo il lavoro di deformazione sono possibili, realizzabili e corrispondono a spostamenti assoluti dei punti vincolati ed a spostamenti relativi tra le facce del taglio* Σ *diversi da zero, mentre la distribuzione che rende minimo il lavoro di deformazione è precisamente quella che annulla tutti gli spostamenti ora detti.*

Ed in un altro ordine di idee, alcuni autori hanno ritenuto erroneamente di poter identificare il teorema di Menabrea, col *principio della minima energia potenziale per un sistema materiale in posizione di equilibrio stabile*, principio enunciato in tutta la sua generalità dal Lagrange, e ben noto nella meccanica razionale.

Nel caso speciale, che qui c'interessa, di un sistema elastico vincolato, e soggetto a forze esterne date, il detto principio si può esprimere come segue: *se le forze esterne applicate derivano da un potenziale (od in altri termini se sono forze conservative), la configurazione di equilibrio stabile, che il sistema elastico assume per le date condizioni dei vincoli, è quella che rende minima l'energia potenziale complessiva del sistema, pari alla somma dell'energia potenziale* *delle forze applicate, e dell'energia potenziale elastica (o lavoro di deformazione).*

Questa proposizione, conseguenza diretta del noto principio, risulta d'altra parte direttamente intuitiva, osservando che quando il sistema elastico si trovi nella sua configurazione di equilibrio stabile, per spostarlo da questa, facendogli assumere una qualsiasi altra posizione, occorre applicare su di esso altre forze supplementari, le quali devono compiere lavoro positivo, e perciò fanno aumentare necessariamente l'energia potenziale complessiva del sistema.

Notiamo in particolare che forze esterne applicate indipendenti dagli spostamenti dei rispettivi punti di applicazione, — quali sono nella grande maggioranza dei casi quelle che si presentano nelle applicazioni, — sono forze conservative, ossia ammettono un potenziale.

Il suddetto principio può servire a caratterizzare la configurazione di equilibrio, e conseguentemente il relativo stato di tensione, colla distribuzione delle tensioni interne e delle reazioni dei vincoli sovrabbondanti; anzi sarebbe facile dedurre dal principio stesso le equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti, (v. N.° 28), ma noi crediamo superfluo soffermarci ulteriormente su questo punto, avendo già dedotte le dette equazioni per altra via.

Orbene, da quanto sopra si è esposto risulta chiaro, — senza che necessiti una più minuta discussione, — che l'ultimo citato principio, ed il teorema di Menabrea, sono completamente distinti, nè possono in alcun modo essere identificati; sia perchè sono diverse le energie potenziali che secondo essi vengono rese minime, sia perchè sono diverse le variabili, in funzione delle quali nei due casi vengono espresse dette energie potenziali, sia infine per la diversa portata, applicabilità e generalità: infatti il principio di Lagrange, come ben si sa, è generalissimo e può servire a caratterizzare qualsiasi stato di equilibrio stabile, — anche con coazioni elastiche interne e con costrizioni dovute ai vincoli, — mentre il teorema di Menabrea invece ha la portata limitata, come poco più sopra abbiamo precisato.

Con quanto precede, abbiamo esposto della teoria generale dell'elasticità ciò che più direttamente può interessare le questioni tecniche; in altra parte del libro esporremo varie applicazioni concrete dei teoremi generali importantissimi sopra stabiliti.

Dobbiamo ora passare a studiare la ripartizione delle pressioni o tensioni interne nei solidi elastici che più comunemente s'incontrano nella pratica, e dedurne dei calcoli numericamente semplici ed agevoli per la soluzione dei problemi tecnici.