si suol chiamare la *travatura principale* corrispondente. La travatura si trovi inizialmente allo stato naturale non deformato, ossia non soggetta a forze, nè esterne nè interne, e sia a temperatura uniforme.

Anzitutto è evidente che nella travatura principale una qualsiasi variazione di temperatura, uniforme o no, produce bensì una variazione nella forma della travatura (deformazione anelastica), ma non provoca nelle aste sforzi di sorta, e perciò, in conseguenza, nessuna deformazione elastica. Avvertiamo però che, ad evitare dei fenomeni secondarî, qui occorre considerare le aste come elementi lineari, ad una sola dimensione, ovvero anche ritenere che la variazione di temperatura sia uniforme su ogni singola sezione trasversale di ogni asta; ed inoltre per gli scopi di questa ricerca è indifferente considerare la distribuzione della temperatura lungo l'asse di un'asta, di modo che ciascuna asta si può ritenere subente una variazione di temperatura (media), costante lungo tutta l'asta, e si può supporre che detta variazione assuma valori diversi solo passando da un'asta ad un'altra.

Ora se consideriamo la travatura completa (iperstatica), ed immaginiamo di variare la temperatura delle aste sovrabbondanti, rispetto a quella della travatura principale; in tal caso dette aste tendono ad assumere una *deformazione anelastica* che risulta incompatibile colla forma della travatura principale, e perciò, (finchè sono escluse delle soluzioni di continuità), nelle aste sovrabbondanti, come pure in tutte quelle della travatura principale, le quali vengono sollecitate da sforzi interni di trazione o di compressione, e quindi si genera uno stato di *coazione elastica.*

Ora immaginiamo di tagliare secondo una sezione trasversale ognuna delle aste sovrabbondanti; in tali condizioni, essendo la travatura ricondotta ad essere principale, saranno di nuovo annullati gli sforzi in tutte quante le aste, ed i due bordi di ciascun taglio subiranno uno spostamento relativo (reso possibile ove occorra, con asportazione di uno straterello di materiale): la deformazione che il sistema subisce per effetto di questi tagli è uguale ed opposta alla *deformazione elastica* dovuta alla descritta coazione elastica; la deformazione che la travatura ora conserva, rispetto alla sua forma primitiva allo stato naturale non deformato a temperatura costante, costituisce la *deformazione anelastica*; ad essa si poteva evidentemente arrivare anche praticando prima nelle aste sovrabbondanti, alla primitiva temperatura, gli stessi tagli sopradetti, e poi facendo avvenire la descritta variazione di temperatura nelle aste tagliate.

Se poi, nella travatura avente subíto solo la detta *deformazione anelastica,* si vuol ripristinare il sopradetto stato di coazione elastica, basta far agire sulle due faccie di ciascun taglio due forze antagoniste, di pressione o di tensione uguali rispettivamente a quelle forze interne S_d, che attraverso agli stessi tagli si trasmettevano nella travatura soggetta alla descritta coazione.

Tali forze nel loro complesso riconducono a combaciare due a due le faccie di ogni taglio, e ripristinano nella travatura gli sforzi della coazione, come pure la corrispondente deformazione elastica (che era scomparsa prima per effetto dei tagli). Le forze S_d ora dette costituiscono le forze distorcenti; la loro azione, colla deformazione elastica prodotta, costituisce la *distorsione equivalente* alla descritta coazione elastica; le sezioni trasversali secondo cui si sono tagliate le aste sovrabbondanti costituiscono col loro insieme la *superficie* Σ *del taglio complessivo* della detta distorsione.

È utile ricordare come la *deformazione elastica* che uno sforzo di trazione produce in un'asta generica è quella descritta, come risultato sperimentale, al N.º 25; se lo sforzo nell'asta invece è di compressione si ha la deformazione uguale ed opposta a quella descritta; su ciò ritorneremo meglio tra poco studiando i prismi tesi o compressi secondo l'asse.

La *deformazione anelastica* poi prodotta dalla variazione di temperatura è quella ben nota dalla fisica, e su essa è inutile soffermarci.

Passiamo ora ad esporre alcuni altri esempî; ci occorrerà per ciò anticipare a titolo di notizia, e quali risultati esposti senza dimostrazione, alcune nozioni, di cui sarà data piena giustificazione più innanzi: ciò è opportuno per fornire fin d'ora, con appropriati e tipici esempî, una visione chiara dei fenomeni di coazione qui studiati.

Esempio 2.º — Consideriamo ora un anello circolare chiuso su se stesso, come quello rappresentato dall'annessa fig. 2; esso sia costituito di materiale elastico isotropo, ed inizialmente si trovi allo stato naturale non deformato, ed a temperatura uniforme.

Vediamo ora come si possa provocare in questo anello qualche stato di coazione elastica simmetrica rispetto all'asse dell'anello, e tale cioè che i suoi elementi caratteristici, (componenti di deformazione, e componenti speciali di tensione), siano funzioni soltanto della distanza del punto generico dall'asse dell'anello. (Per maggior chiarezza notiamo che tale asse nella fig. 2 s'intende normale al piano del disegno). In tale ipotesi la coazione è pure simmetrica rispetto a qualsiasi piano passante per l'asse suddetto; quindi l'azione interna che si trasmette attraverso ad una qualunque sezione *radiale* dell'anello, per ragioni evidenti di simmetria, data pure la mancanza di forze esterne, deve ridursi ad una coppia parallela al piano del disegno in fig. 2, (o normale alla sezione *radiale*). Una coazione di tal natura si può provocare con una distorsione secondo un taglio Σ praticato appunto secondo una sezione radiale, (in fig. 2 secondo il piano radiale di traccia AO), e poi applicando ai due bordi del taglio, quali forze distorcenti, due coppie antagoniste, normali al piano del taglio, come si disse sopra, in modo da provocare tra le faccie del taglio stesso uno spostamento relativo, il quale, per ragioni di evidente simmetria, (e come si vedrà meglio più innanzi, a suo tempo),

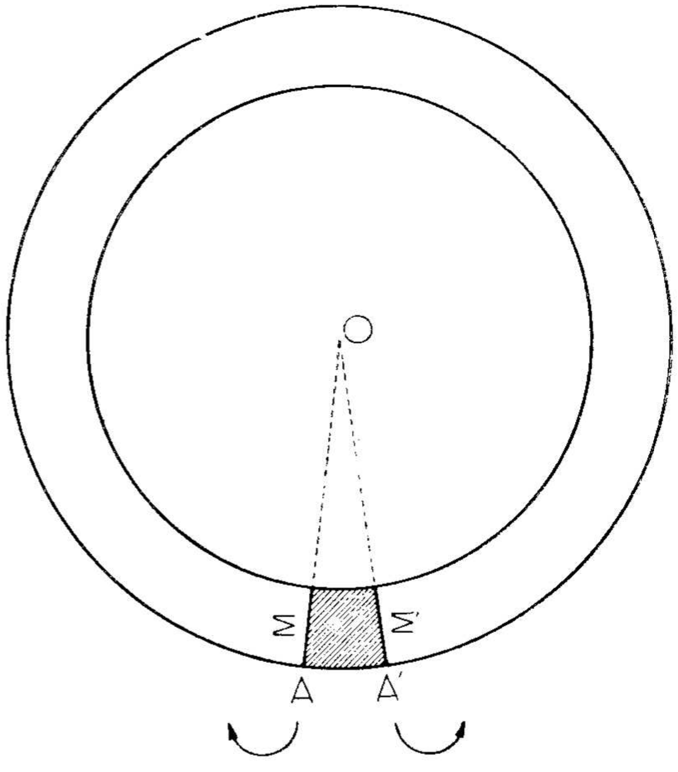

Fig. 2

deve essere una rotazione intorno all'asse dell'anello. Per fissare le idee supponiamo che detta rotazione sia di tale senso da scostare le faccie Σ e Σ' del taglio; e poichè in tal caso tutte le varie sezioni radiali dell'anello si vengono a trovare in identiche condizioni di sollecitazione (essendo tutte soggette alla stessa coppia), la deformazione elastica complessiva sarà tale che i cerchi compresi nello spazio occupato dal materiale dell'anello, e con esso coassiali, si trasformeranno pure in archi di cerchio coassiali e di raggi maggiori dei precedenti, interrotti nel tratto compreso tra i bordi del taglio Σ e Σ'; così per ragioni di evidente simmetria, se le faccie Σ e Σ' si mantengono piane, resteranno pure piane tutte le sezioni trasversali dell'anello.

In tali condizioni è relativamente facile calcolare (come faremo poi più innanzi) la dilatazione lineare unitaria assunta dalle varie fibre dell'anello disposte secondo cerchi coassiali, come è detto poco sopra; ciò si fa trascurando, in via di approssimazione, le dilatazioni trasversali (in senso radiale ed assiale) delle dette fibre circolari; ciò è lecito poichè le dilatazioni (o contrazioni) così calcolate sono piccolissime in confronto di quelle subìte dai raggi dei detti cerchi, o dal raggio medio dell'anello.

Ciò posto, possiamo immaginare di attribuire all'anello stesso una variazione di temperatura, non uniforme, la quale sia così distribuita da produrre in ognuna delle descritte fibre circolari una dilatazione circonferenziale uguale ed opposta a quella calcolata nel modo detto sopra, e dovuta alla deformazione elastica; e, poichè si ritiene lecito di trascurare le dilatazioni trasversali delle fibre stesse, possiamo ritenere che la *deformazione anelastica* così provocata per via termica sia in ogni punto uguale ed opposta alla *deformazione elastica* sopra definita, provocata dalla descritta distorsione; perciò tale deformazione anelastica deve presentare una discontinuità uguale ed opposta a quella della deformazione elastica, e perciò deve riportare le due faccie Σ e Σ' a combaciare nuovamente tra loro. È ovvio che durante la variazione termica distribuita colla suddetta legge, lo stato di tensione del solido *non* deve essersi alterato rispetto a quello preesistente dovuto alla distorsione: infatti la deformazione anelastica così descritta, per le ragioni di simmetria sopra dette, mantiene piane le sezioni trasversali, e quindi per la simmetria e per l'equilibrio delle varie parti dell'anello, le varie sezioni trasversali devono essere tutte quante soggette solo al momento preesistente dovuto alla distorsione.

Le faccie del taglio riportate a combaciare si possono intendere rinsaldate insieme, ed allora le due coppie antagoniste distorcenti si possono considerare come forze interne trasmettentisi attraverso alla superficie del taglio rinsaldato.

Ciò posto, è pure evidente che allo stesso stato di tensione finale si potrebbe pure giungere partendo dall'anello allo stato naturale non deformato a temperatura costante, ed attribuendo ad esso, a partire dalla temperatura iniziale, appunto la variazione di temperatura distribuita nel modo sopra indicato.

La conoscenza *quantitativa* di tale distribuzione di temperatura potrà essere esposta solo più tardi quando si analizzerà la deformazione elastica prodotta dalla data distorsione; ma fin d'ora possiamo farci un'idea *qualitativa* della distribuzione stessa; anzitutto essa deve risultare simmetrica di rotazione rispetto all'asse dell'anello, e perciò deve essere funzione solo della distanza (raggio) da detto asse. Inoltre, poichè le fibre circolari più lontane dall'asse devono subire una dilatazione elastica negativa, (poichè risultano soggette a compressione) e perciò una dilatazione anelastica (termica) positiva, esse devono in conseguenza subire un aumento di temperatura, mentre le fibre circolari più vicine all'asse dell'anello devono subire una diminuzione di temperatura, poichè la loro dilatazione elastica è positiva; la dilatazione elastica di una fibra generica poi deve essere funzione decrescente del raggio (con una legge *quantitativa* che verrà esposta più tardi), e perciò la dilatazione anelastica (termica), e con essa *la temperatura deve essere funzione crescente del raggio* (cioè le fibre circolari più esterne devono essere a temperatura più alta di quelle più interne).

Abbiamo così descritto uno stato di coazione elastica ottenibile mediante un effetto termico, ed abbiamo visto pure qual'è una distorsione ad essa equivalente. Anzi abbiamo constatato come in questa speciale coazione le due deformazioni elastica ed anelastica siano in ogni punto del solido uguali od opposte, almeno per quanto riguarda le dilatazioni circonferenziali, essendo poi lecito trascurare quelle trasversali, che sono piccolissime.

$\Sigma' \; \Sigma''$ ESEMPIO 3.° — Un altro esempio simile al precedente, e del quale esso si può considerare come caso particolare, è costituito da una sbarra od asta prismatica, di cui le due sezioni normali estreme, da vincoli esterni siano mantenute piane ed a distanza invariabile (vedi fig. 3). Immaginiamo

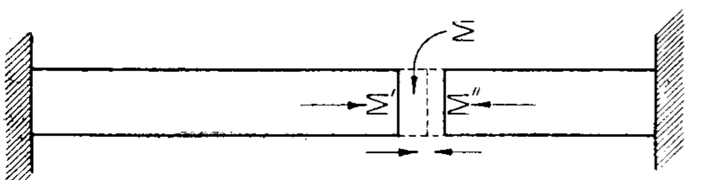

Fig. 3

di praticare nella sbarra un taglio secondo una sezione trasversale intermedia generica Σ, e poi di far subire a tutta l'asta tagliata una diminuzione di temperatura, ovunque uniforme. Allora i due tronchi dell'asta separati dal taglio subiscono ciascuno un accorciamento proporzionale alla sua lunghezza, sicchè le faccie del taglio Σ si scostano passando in Σ' e Σ''; e nella sbarra non si generano tensioni interne di sorta, poichè, come s'è supposto, le due sezioni esterne sono bensì trattenute sui due piani fissi, ma libere in questi piani di deformarsi; perciò esse subiranno liberamente la contrazione per effetto termico, senza che se ne originino tensioni.

Con ciò si è fatto subire all'asta una *deformazione anelastica*, che presenta una discontinuità in Σ. Ora possiamo applicare sulle due faccie del taglio due forze uguali ed opposte, di tensione, (cioè dirette ciascuna verso l'esterno del tronco, su cui essa agisce) distribuite uniformemente sulle faccie stesse, e far crescere la loro intensità finchè le dilatazioni elastiche longitudinali da esse provocate (secondo quanto è noto; cfr. per es. N.° 25) risultino uguali alle contrazioni termiche prima subite, in modo che le due faccie Σ' e Σ'' del taglio, prima scostate, siano ricondotte a combaciare in Σ.

Allora, pure in questo caso, possiamo immaginare di rinsaldare le faccie del taglio, e considerare le forze antagoniste (distorcenti) di trazione distribuite sulle faccie stesse come tensioni interne trasmettentisi attraverso la sezione Σ.

Evidentemente la stessa coazione così ottenuta si può pure provocare attribuendo alla sbarra non tagliata la stessa diminuzione di temperatura sopra detta. Di tale coazione abbiamo poi pure descritta la distorsione equivalente.

Anche qui, come nell'esempio 2°, le dilatazioni longitudinali delle due deformazioni elastica ed anelastica sono uguali ed opposte. Notiamo che sono invece diverse le dilatazioni trasversali dovute alle due distinte deformazioni. Infatti assumendo per asse x l'asse della sbarra, ed essendo α il coefficiente di dilatazione termica lineare e t la diminuzione della temperatura, si avrà:

per la deformazione elastica:

$$\varepsilon_x = +\alpha t \quad ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-\alpha t}{m} \qquad \text{(v. N.° 25)}$$

e per la deformazione anelastica invece:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\alpha t .$$

ESEMPIO 4.° — Consideriamo ora un prisma retto isotropo, a sezione p. es. rettangolare, con una dimensione (lunghezza) prevalente rispetto alle altre due; tali sono le travi od i pilastri, che spesso si incontrano nelle applicazioni. (V. fig. 4, a).

Supponiamo di praticare in esso un taglio longitudinale con un piano Σ che contenga l'asse del prisma ed una mediana di ogni sezione trasversale; il taglio divide il prisma in due parti uguali, che sono pure prismi retti a sezione rettangolare.

Ora immaginiamo di far agire su una faccia Σ' del taglio delle forze ripartite uniformemente in senso trasversale, e distribuite in senso longitudinale con una legge rappresentabile con un diagramma intrecciato analogo, p. es. a quello della fig. 4, b), simmetrico rispetto all'asse mediano, ed avente area nulla, in modo che il sistema di tali forze ripartite sia complessivamente in equilibrio.

Per fissare le idee, immaginiamo che tali forze siano pressioni in adiacenza delle estremità del prisma, ed invece siano tensioni in corrispondenza della regione mediana. Naturalmente supponiamo poi di far agire sull'altra faccia Σ'' del taglio un sistema di forze distribuite, punto per punto uguali ed opposte a quelle sopra descritte; perciò le nuove forze dovranno essere rappresentate dallo stesso

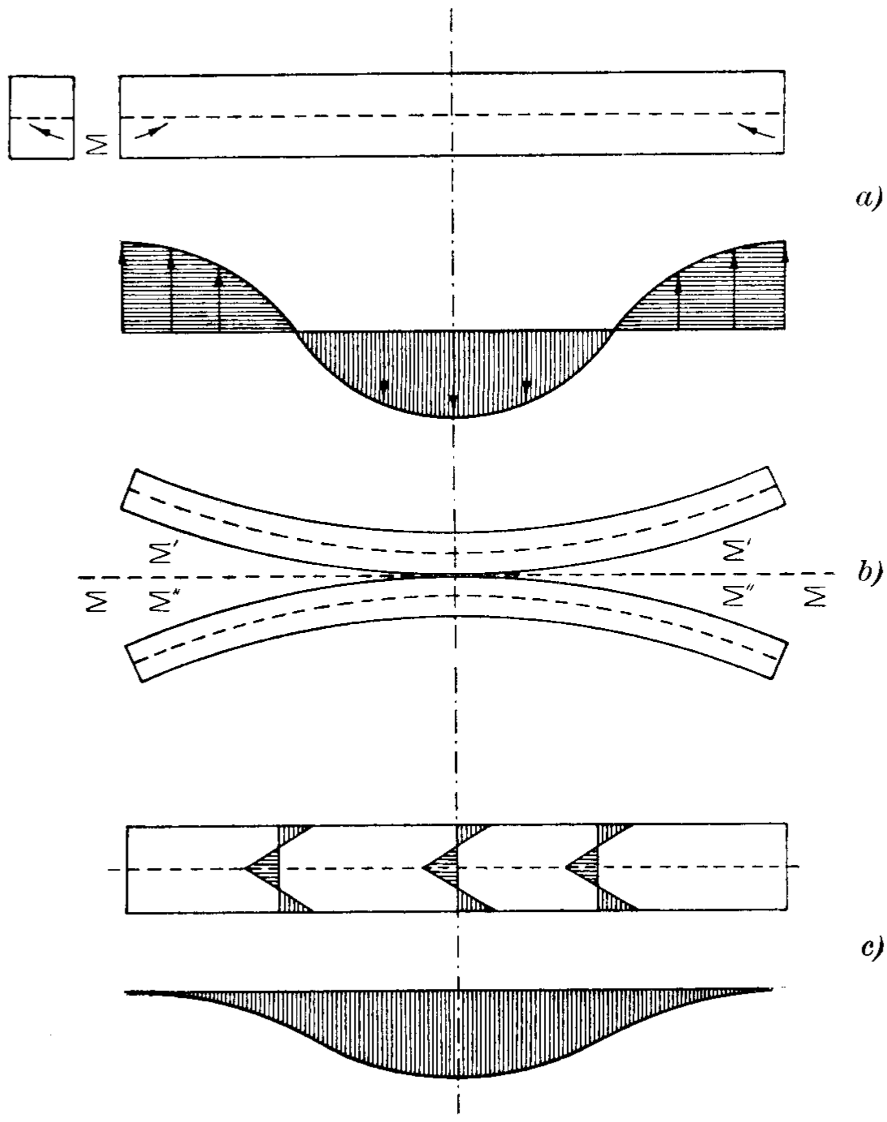

Fig. 4

diagramma, cambiato di segno; è chiaro però che rispetto all'altra metà del prisma tali forze saranno ancora pressioni verso le estremità e tensioni nella regione mediana. Con dette forze, ciascuna metà del prisma resterà in equilibrio, ma verrà deformato incurvandosi nel modo indicato dalla (fig. 4, c) in guisa da rivolgere verso l'altra la sua convessità.

Più innanzi, studiando le *travi inflesse*, impareremo a calcolare per ciascuno dei due mezzi prismi così sollecitati, le tensioni interne, e le corrispondenti componenti di deformazione; potremo così conoscere completamente la deformazione elastica prodotta da questa speciale distorsione qui descritta, nella quale sono forze distorcenti quelle distribuite colla legge sopra indicata.

Immaginiamo poi che, mentre dura l'azione delle forze distorcenti, si attribuisca a tutto il prisma deformato una variazione di temperatura distribuita con tale legge, da provocare in ogni punto una dilatazione termica lineare unitaria uguale ed opposta alla dilatazione elastica unitaria *longitudinale* ε_x che si ha nello stesso punto. In tale ipotesi è facile convincersi che le due faccie del taglio Σ' e Σ'', prima scostate, ritorneranno a sovrapporsi sul piano Σ. Infatti, è bensì vero che la deformazione anelastica termica così introdotta non è esattamente uguale ed opposta a quella elastica prodotta dalla distorsione, poichè le dilatazioni trasversali ε_y ed ε_z sono diverse nei due casi; ma, dato che le dimensioni trasversali del prisma si sono supposte piccole in confronto della lunghezza di esso, le dilatazioni (o contrazioni) totali trasversali delle varie fibre longitudinali sono del tutto trascurabili di fronte ai raggi di curvatura delle fibre stesse deformate, e perciò si può ritenere con grandissima approssimazione che nel fenomeno dell'*incurvamento* dei detti mezzi prismi influiscano esclusivamente le dilatazioni in senso longitudinale ε_x.

Ricondotte dunque per effetto termico le due facce Σ' e Σ'' del taglio a coincidere in Σ, possiamo immaginare di rinsaldare il taglio stesso, ed allora le forze distorcenti sopra descritte si devono considerare come forze interne trasmettentisi attraverso il piano Σ.

Così, colla successiva sovrapposizione di una distorsione e di una variazione di temperatura opportunamente scelte, veniamo a provocare nel dato prisma uno stato di coazione elastica, le cui caratteristiche sì di tensioni interne, come di deformazione potranno venir completamente calcolate quando avremo studiato le travi inflesse (Vol. II.°).

Evidentemente alla stessa coazione elastica si può pervenire attribuendo direttamente al prisma *non* tagliato, a partire dal suo stato naturale non deformato, la variazione di temperatura distribuita colla legge sopra indicata. Con quanto risulterà dalla suddetta teoria dell'inflessione delle travi, sarà facile verificare che colla distribuzione ora detta la temperatura deve restare uniforme, — uguale p. es. a quella iniziale, — sui piani paralleli a Σ e situati ciascuno a metà altezza di uno dei due mezzi prismi; inoltre la variazione della temperatura rispetto al detto valore su ogni sezione trasversale deve variare proporzionalmente alla distanza da detti piani ed in senso inverso nei due mezzi prismi, in modo da essere positiva sulle faccie laterali del prisma, parallele a Σ, e negativa sul piano Σ stesso; e nel senso longitudinale tale variazione deve essere distribuita simmetricamente in modo da decrescere dalla mezzeria del prisma, ove deve avere un massimo, verso le estremità, ove deve essere nulla, e trovarsi in condizione di minimo.

Tali leggi di variazione sono rappresentate dai diagrammi della fig. 4, d).

Ripetiamo che quanto qui diciamo a proposito di tale legge è ora esposto a titolo di semplice notizia illustrativa e potrà venire giustificato pienamente col calcolo più tardi.

Così abbiamo visto un altro esempio caratteristico di una coazione elastica dovuta ad un effetto termico, analizzando insieme almeno qualitativamente una distorsione ad essa equivalente, e la corrispondente deformazione elastica.

Osservazioni sulle distorsioni e sui relativi tagli.

Nell'ultimo esempio ora esposto abbiamo considerato una distorsione ottenuta con un taglio tale da *sconnettere* il solido dato, separandolo in due parti distinte e staccate; mentre invece quando avevamo incominciato a parlare di distorsione (N.[i] 39 e 40), ci eravamo limitati a considerare solo dei tagli semplici o multipli, i quali non sconnettessero il dato sistema elastico.

Ora possiamo rimuovere questa restrizione, introdotta dapprima per semplicità, ed anche perchè essa è spesso verificata nelle distorsioni che più comunemente si presentano nelle applicazioni.

Effettivamente si può sempre operare su un sistema elastico una distorsione affatto generica, con un taglio semplice o comunque multiplo, il quale anche sconnetta o spezzi il sistema elastico in due o più parti separate.

Occorre però tener presente alcune avvertenze a proposito delle forze distorcenti, o delle forze interne trasmettentisi attraverso le faccie del taglio.

Anzitutto le forze distorcenti saranno sempre forze antagoniste distribuite sulle faccie dei varî tagli, o del taglio multiplo, in modo che siano punto per punto uguali e contrarie quelle applicate alle due faccie adiacenti; ma inoltre dovrà essere verificato l'equilibrio di ognuna delle parti o pezzi in cui il sistema elastico viene suddiviso dal taglio; e perciò *tra le forze distorcenti quelle che agiscono su uno stesso pezzo del sistema elastico devono farsi tra loro equilibrio.*

Analogamente è pure evidente che se si pratica il taglio multiplo nel sistema elastico soggetto a forze esterne (tra le quali s' intendono comprese le reazioni di eventuali vincoli), e se detto sistema ne risulta sconnesso, o suddiviso, *ciascuno dei varî pezzi dovrà essere in equilibrio sotto l' azione delle forze esterne ad esso applicate, e di quelle interne trasmettentisi attraverso le superficie di tagli appartenenti al pezzo stesso.*

Inoltre è chiaro che quando il sistema elastico risulta sconnesso, ai varî pezzi si possono, indipendentemente l' uno dall' altro, imprimere degli spostamenti rigidi; perciò *lo spostamento relativo tra due porzioni delle faccie del taglio inizialmente combacianti, è sempre definito a meno di uno spostamento rigido.*

Ne consegue che complessivamente la deformazione dovuta alla distorsione è definita a meno di più spostamenti rigidi, impressi ognuno ad uno dei pezzi in cui il sistema è stato suddiviso.

Ma *tali spostamenti rigidi non alterano nel complesso la somma dei lavori che per effetto della distorsione compiono le forze esterne S, e le forze* (Σ) *e* $(-\Sigma)$ *trasmettentisi attraverso alle faccie complessive del taglio multiplo,* conforme ai varî enuncianti del secondo principio di reciprocità ai N.[i] 40 e 41; e ciò *avviene in virtù del principio dei lavori virtuali, perchè appunto tra le dette forze quelle che agiscono su uno stesso pezzo del sistema elastico si fanno tra loro equilibrio,* come s' è osservato poco più sopra.

Con queste avvertenze si può dunque sempre applicare il secondo principio di reciprocità, nelle sue varie forme ed interpretazioni esposte nei N.[i] precedenti ora citati; e ciò senza restrizioni sulla forma e natura dei tagli, con cui son praticate le relative distorsioni.

Notiamo poi che evidentemente le forze trasmettentisi attraverso le varie faccie dei tagli, o per effetto di forze esterne, o per uno stato di coazione elastica, dovuta a cause diverse dalla distorsione, devono essere tali da attribuire, insieme colle eventuali forze esterne, ai varî pezzi del sistema tagliato così fatte forme, che i pezzi stessi si possano, con opportuni spostamenti rigidi, disporre adiacenti con completo combaciamento delle due faccie di tutti i tagli.

Con questi nuovi punti di vista il concetto di distorsione acquista la massima possibile generalità, senza restrizione di sorta.

Ciò è necessario in taluni casi, in cui non sarebbe possibile trovare la distorsione equivalente ad una data coazione elastica con tagli non sconnettenti il sistema elastico.

Talora può essere necessario considerare un complesso di tagli sconnettenti il sistema elastico in un numero infinito di parti elementari infinitesime. Ciò può accadere quando la *deformazione anelastica* della data coazione sia distribuita con una legge affatto qualunque, p. es. per una variazione di temperatura avente distribuzione affatto generica.

Se i calcoli relativi a così fatte distorsioni possono presentarsi anche molto complicati, essi sono però sempre, con tutta generalità, regolati dalle legge espressa dal suddetto secondo principio di reciprocità.

Osservazioni sulle deformazioni anelastiche.

È ora opportuno fare qualche rilievo sulla natura delle deformazioni anelastiche.

Anzitutto, dobbiamo osservare che una deformazione anelastica termica in un corpo isotropo deve essere tale che la dilatazione termica lineare unitaria in un dato punto (intesa misurata nell'elemento di solido elastico reso libero dal corpo circostante come si deve ritenere nel considerare la deformazione anelastica, secondo quanto è detto al N.° 41) deve essere la stessa in tutte le direzioni uscenti dal dato punto; perciò, rispetto ad una terna di assi, per la deformazione anelastica termica si deve avere:

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha t$, ed in conseguenza, poichè l'elemento di volume si deforma per omotetia, gli angoli si conservano inalterati, e deve perciò essere:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0.$$

Se invece il corpo che si considera è anisotropo, allora la deformazione anelastica termica può essere affatto qualunque, *con tutte le 6 componenti distinte e diverse da zero, ed avrà per assi principali* gli assi della struttura cristallina del materiale, secondo quanto insegnano la fisica e la mineralogia (cristallografia).

Abbiamo già accennato più sopra, al N.° 39, all'esistenza ancora di altre cause di coazioni elastiche, oltre alle variazioni termiche ora studiate. Non possiamo per ora analizzare le deformazioni anelastiche ed elastiche generate da una non simultanea solidificazione di un corpo inizialmente allo stato plastico o pastoso, e dovute ad una dilatazione positiva o negativa all'atto della solidificazione. Vogliamo solo accennare che tali fenomeni possono avere importanza pratica non solo nei metalli fusi o fucinati, ma anche nelle murature o nei conglomerati per la variazione di volume degli agglomeranti all'atto della presa e della maturazione.

Occorre infine accennare che una deformazione anelastica, atta a provocare coazioni può pure verificarsi quando in un sistema elastico, soggetto a forze esterne, alcune parti vengano eventualmente sottoposte a tensioni di intensità oltrepassanti quel valore che si è chiamato *limite di elasticità* (v. N.° 2, pag. 12); allora in dette parti del sistema elastico si generano delle *deformazioni permanenti*, le quali perdurano al cessare delle forze esterne; si attribuisce così a dette parti del sistema elastico una deformazione anelastica, che manca invece nelle rimanenti parti; perciò complessivamente tale deformazione anelastica risulta discontinua, e quindi atta a provocare una coazione interna, come si vide sopra.

Esempî: Una travatura reticolare ad aste sovrabbondanti, nella quale alcune di tali aste per effetto di forze esterne siano assoggettate a sforzi interni di trazione o compressione superiori al limite elastico; allora le stesse aste, ed esse sole, subiranno una variazione permanente di lunghezza, e perciò, al cessare delle forze esterne, le loro lunghezze non saranno più compatibili colla forma della *travatura principale* scarica, ed esse aste saranno quindi soggette a sforzi di segno contrario a quelli prima sopportati; sarà così prodotta, nella travatura considerata, una coazione elastica.

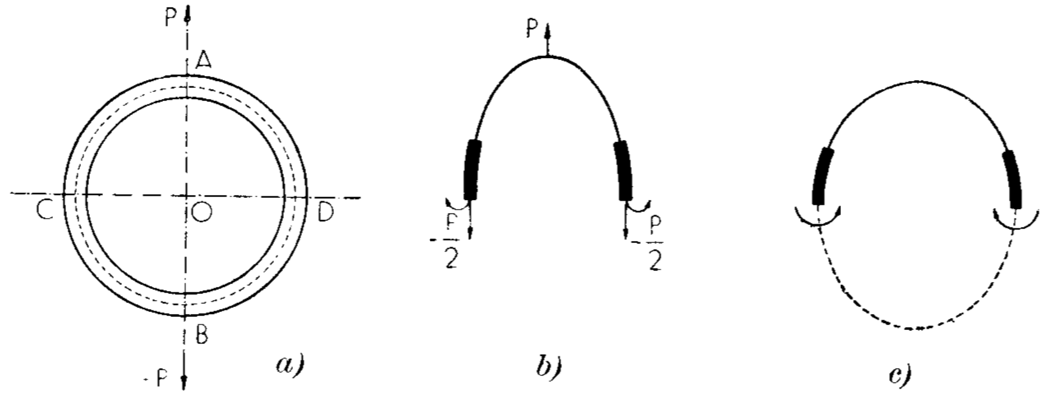

Fig. 5

Altro esempio: un anello circolare come quello già considerato più sopra (in fig. 2), il quale (a partire dallo stato naturale non deformato) venga sollecitato da due forze concentrate uguali ed opposte, P e $-P$, applicate rispettivamente agli estremi A e B di un diametro, e per es. rivolte verso l'esterno, come indica la fig. 5, a).

Dimostreremo più tardi, e del resto è intuitivo che le *regioni pericolose*, ove il materiale è più cimentato, sono in prossimità degli estremi CD del diametro perpendicolare ad AB: per effetto delle forze esterne l'anello circolare si *ovalizza* in modo che il suo cerchio medio, punteggiato in fig. 5 a), si deforma disponendosi come sommariamente è indicato in b) per il semianello CAD: la curvatura diminuisce in C ed in D, mentre aumenta in A ed in B; attraverso a ciascuna delle sezioni radiali in C ed in D il semianello CBD trasmette all'altro uno sforzo di trazione $\frac{P}{2}$ sul centro della sezione ed un momento avente il senso indicato dalle freccie in fig. 5, b), appunto in modo da far diminuire in C ed in D la curvatura della fibra mediana inizialmente circolare. Può accadere che in prossimità delle dette sezioni radiali per un certo tratto, [(marcato in fig. 5, b) e c)], la tensione massima superi il limite di elasticità; orbene, senza addentrarci nell'analisi del fenomeno, — cosa che per ora è prematura, — possiamo affermare che in tal caso il tratto suddetto subisce una deformazione permanente, assumendo colla sua fibra media una curvatura minore di quella che aveva prima dell'azione delle forze esterne. Al cessare di queste poi i tratti suddetti tendono a conservare la curvatura nuova assunta colla deformazione permanente, e perciò esercitano delle azioni interne sulle altre parti dell'anello, le quali non subirono che deformazioni elastiche, sicchè i due mezzi anelli separati dalle sezioni radiali C e D si trasmettono mutuamente attraverso alle sezioni stesse dei momenti di senso opposto a quelli che ivi si avevano per effetto delle forze esterne, cioè aventi il senso delle freccie nella fig. 5 c), la quale poi schematicamente rappresenta pure la nuova forma che assume la fibra media dell'anello scarico; — con molta approssimazione essa si può ritenere disposta secondo una policentrica a quattro centri, simmetrica rispetto a ciascuno dei due diametri sopra citati AB e CD.

Come già si disse, ci riserviamo di ritornare con maggiori mezzi d'indagine sullo studio delle coazioni elastiche: per ora ci basta l'aver chiarito con appositi esempî i relativi concetti, l'averne studiato le proprietà più notevoli, e l'aver stabilito i principî che permettono di applicare al loro studio i teoremi fondamentali della teoria dell'elasticità, i quali così acquistano una più vasta generalità.

Inoltre gli esempî che abbiamo citati, attestano l'importanza teorica e pratica di tali studî.

Notiamo poi incidentalmente che nella pratica può talora riuscire utile provocare artificialmente delle coazioni elastiche in talune costruzioni, od in certi organi di macchine, in modo da diminuire le tensioni interne massime provocate dalle forze esterne, pur avendo ~~per~~ le stesse tensioni valori di segno opposto quando il sistema elastico si trova allo stato naturale, (senza forze esterne applicate).

Dobbiamo ora esporre altri teoremi fondamentali per lo studio statico dei sistemi elastici, analizzando poi se e come essi siano applicabili pure al caso di coazioni elastiche.

43. Teoremi delle derivate del lavoro o di Castigliano.

Consideriamo un qualunque sistema elastico, soggetto a forze esterne, in equilibrio, (tra le quali siano comprese pure eventuali reazioni di vincoli), concentrate o distribuite, superficiali o di massa ed eventualmente soggetto pure a coazioni interne.

In quest'ultimo caso riterremo che con opportuni tagli il sistema elastico si possa liberare dallo stato di coazione, in modo che questo si possa intendere provocato da una distorsione equivalente.

Prenderemo in considerazione gli spostamenti dei varî punti del sistema, dovuti alla sola *deformazione elastica*, provocata dalle forze esterne applicate e dalle forze distorcenti; inoltre sappiamo che il lavoro di deformazione in tal caso è uguale alla somma di quello dovuto alle forze applicate, più l'energia vincolata, più il lavoro mutuo delle forze applicate e della distorsione, il quale si calcola col secondo principio di reciprocità.

Come le reazioni dei vincoli, così anche le forze interne trasmettentisi attraverso alle faccie dei tagli si devono riguardare tutte come forze esterne date, agenti sul sistema tagliato ed inizialmente scarico.

Tra le forze esterne esista una forza concentrata P, ed indichiamo con δ lo spostamento elastico totale, (nel senso specificato testè), del punto d'applicazione della forza P, misurato nella direzione della forza stessa.

Potremo considerare δ come somma di due parti; δ_o spostamento dovuto a tutte le altre forze, all'infuori della P, e δ_p spostamento prodotto dall'azione della P supposta agente da sola sul sistema elastico. Secondo la legge di Hooke si potrà sempre porre:

$$\delta_p = CP$$

essendo C una *costante elastica*.

Esprimiamo ora il lavoro di deformazione L del sistema elastico, dovuto a tutte le forze esterne, o considerate come tali; indichiamo con L_o il lavoro di deformazione dovuto a tutte le forze esclusa la P.

Quindi, il lavoro di deformazione complessivo L, come già sappiamo (v. teor.ª di Betti, N.º 37), per il principio della sovrapposizione degli effetti, sarà uguale alla somma del lavoro L_o, più il lavoro di deformazione prodotto dalla sola forza P, (valutabile col teorema di Clapeyron), più il lavoro mutuo della forza P e del sistema di tutte le rimanenti forze esterne.

Si ha quindi:

$$L = L_o + \frac{1}{2} P \delta_p + P \delta_o \quad ; \qquad (113)$$

e ponendo in luogo di δ_p il valore espresso più sopra, si ottiene:

$$L = L_o + \frac{1}{2} CP^2 + \delta_o P \tag{114}$$

Calcoliamo ora la *derivata parziale del lavoro di deformazione L rispetto a P.*

Nel fare tale calcolo noi consideriamo il lavoro L come funzione di tutte le forze applicate, distribuite o concentrate; tali forze si devono riguardare quali *variabili indipendenti,* quantunque alcune di esse possano eventualmente essere funzioni di altre, (come le reazioni dei vincoli, o certe forze interne provocate da forze esterne); per calcolare la derivata parziale rispetto a P, dobbiamo riguardare tutte le forze esterne come indipendenti da P, e perciò ritenere costanti tutti gli elementi dipendenti da tutte le altre forze, esclusa la P.

Avremo quindi:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial P} = CP + \delta_o = \delta_p + \delta_o = \delta} \tag{115}$$

Ossia: *in un sistema elastico soggetto a forze esterne in equilibrio, la derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto ad una forza esterna concentrata è uguale allo spostamento del punto d'applicazione di detta forza, misurato nella direzione della forza stessa.*

Questa proposizione costituisce un teorema importantissimo per la statica dei sistemi elastici: esso si chiama il *teorema delle derivate del lavoro* o *teorema di Castigliano.* Fu esposto da *Alberto Castigliano* nella classica opera: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications.* (Turin, 1879).

Di esso si può pure dare un'altra dimostrazione, parimenti sintetica ed intuitiva nel modo seguente: immaginiamo di attribuire alla forza P un incremento infinitesimo dP, ritenendo costanti tutte le altre forze applicate esterne o riguardate come tali, e calcoliamo in conseguenza l'incremento corrispondente del lavoro di deformazione L, incremento che, colle notazioni solite nel calcolo differenziale, si indicherà così: $\frac{\partial L}{\partial P} dP$.

Il lavoro di deformazione totale ottenuto dopo tale incremento sarà:

$$L + \frac{\partial L}{\partial P} dP$$

e per il principio della sovrapposizione degli effetti esso si potrà immaginare ottenuto facendo agire dapprima la forza dP, e poi insieme tutte le altre forze esterne, compresa la P.

La forza infinitesima dP, agendo per prima da sola sul sistema elastico, farà subire al suo punto di applicazione uno spostamento infinitesimo dello stesso ordine, e perciò produrrà un lavoro di deformazione infinitesimo di ordine superiore, che si può rigorosamente trascurare; quando poi agiscono simultaneamente tutte le forze date si produce il lavoro di deformazione a queste dovuto, che è lo stesso L di più sopra, ed in più il lavoro prodotto dalla forza dP per effetto dello spostamento δ del suo punto d'applicazione, provocato dalle forze date (e misurato nella direzione di P); questo lavoro evidentemente è $=\delta \cdot dP$.

Perciò si trova che il lavoro di deformazione totale ottenuto dopo il detto incremento si può anche esprimere così:

$$L+\delta \cdot dP \quad ;$$

perciò uguagliando all'espressione esposta più sopra e semplificando, si ottiene:

$$\boxed{\delta=\frac{\partial L}{\partial P}} \; ;$$

ossia si ritrova la (115), che esprime il teorema di Castigliano.

Questo teorema torna utilissimo pure nelle applicazioni, per esprimere spostamenti di punti, ovvero, quando tali spostamenti siano dati, per stabilire, tra sforzi incogniti iperstatici, delle relazioni lineari analoghe (anzi più innanzi potremo riconoscerle identiche) a quelle ricavate dal teorema dei lavori virtuali, (v. N.° 38, applicazione).

Su ciò ritorneremo tra breve studiando le relative applicazioni concrete.

Ora osserviamo che il detto teorema si presta pure per calcolare lo spostamento di un punto del sistema elastico, in una data direzione, anche se a detto punto non è applicata alcuna forza concentrata.

A tale scopo si può sempre immaginare, applicata nel dato punto, ed agente nella data direzione, una forza concentrata F; dopo di che, si potrà esprimere il lavoro di deformazione in funzione di tutte le forze applicate, compresa la F; ed allora, per avere lo spostamento cercato, basterà trovare del detto lavoro di deformazione la derivata parziale rispetto ad F, e poi calcolare il valore che essa assume per $F=0$; si otterrà così lo spostamento cercato.

Al *Castigliano* è pure dovuto un *secondo teorema*, analogo e, per così dire, duale del primo; e qui appresso passiamo ad esporlo.

Consideriamo un sistema elastico comunque generico, soggetto a forze esterne ed interne affatto qualsiasi, e teniamo presenti le avvertenze esposte sopra, per ciò che riguarda il caso, in cui vi siano delle coazioni interne.

Come si vide al Cap. IV.°, a proposito dell'esistenza ed unicità di uno stato di equilibrio elastico, dati gli spostamenti in superficie, ed eventualmente le forze di massa, sono determinate le forze in superficie, perciò risulta determinato il lavoro di deformazione, il quale perciò si può riguardare come funzione di infinite variabili, le quali sono gli spostamenti dei punti in superficie. Tali variabili si possono considerare come indipendenti, quantunque esse possano essere legate da certe condizioni, come p. es. quelle della continuità della superficie esterna, se essa deve essere esente da tagli. In tale senso si potrà pensare di calcolare la *derivata parziale* del lavoro di deformazione rispetto allo spostamento di un punto superficiale, valutando l'incremento subìto dal detto lavoro, per effetto di un incremento infinitesimo del *solo* spostamento del dato punto, immaginando inalterati tutti gli altri spostamenti.

Insieme colle altre forze superficiali o di massa, in un punto A della superficie esterna, sia applicata una forza concentrata P, e sia (come sopra) δ lo spostamento totale assunto dal punto A nel sistema elastico deformato dalle forze esterne.

Immaginiamo di attribuire allo spostamento δ un incremento infinitesimo $d\delta$ (che considereremo infinitesimo di 1.° ordine, riguardando qui quale finito — come veramente è, — lo spostamento δ): per la continuità della superficie e dell'interno del solido elastico tale incremento non potrà essere scompagnato da incrementi pure infinitesimi del 1.° ordine degli spostamenti dei punti in superficie ed interni, contigui al punto A: però noi potremo immaginare di limitare la *deformazione*, che diremo *suppletiva* caratterizzata dallo spostamento $d\delta$, ad un intorno del punto A avente dimensioni lineari infinitesime del primo ordine, tenendo fissa tutta la restante parte del sistema elastico. (Notiamo che, sempre per la continuità, sul *contorno* del detto intorno di A dovranno essere nulli non solo gli incrementi d degli spostamenti, ma pure nulle le derivate lineari di spazio prese nella direzione della normale al contorno). Con tale *deformazione suppletiva* compiono lavoro solo le forze (superficiali o di massa) applicate al detto intorno; ora le forze superficiali distribuite — o ripartite — sono infinitesime del secondo ordine, e perciò dànno lavori infinitesimi del 3.° ordine: le forze di massa sono infinitesime del 3.° ordine, e quindi fanno lavori infinitesimi del 4.° ordine; tali lavori sono tutti trascurabili in confronto del lavoro della forza P, finita, concentrata in A, la quale per lo spostamento $d\delta$ compie un lavoro infinitesimo del 1.° ordine, valutabile col prodotto $P'd\delta$, indicando con P' la proiezione ortogonale di P sulla direzione dello spostamento δ.

Per il rigore, notiamo pure che l'incremento $d\delta$ potrà provocare un incremento dP della forza P, ma il corrispondente lavoro, esprimibile secondo il teorema di Clapeyron con $\frac{1}{2}\,dP'\cdot d\delta$ è infinitesimo del 2.° ordine, e perciò esso pure trascurabile in confronto del lavoro $P'd\delta$:

Perciò il detto incremento del lavoro di deformazione dovuto al *solo* incremento $d\delta$, si può esprimere, secondo le notazioni solite con:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta}\,d\delta = P'd\delta$$

da cui si deduce subito:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \delta} = P'} \tag{116}$$

Questa relazione è analoga ed in certo qual modo duale della (115), ed esprime il *secondo teorema delle derivate del lavoro*, o *di Castigliano*, sopra citato, il quale perciò si enuncia come segue:

in un sistema elastico soggetto a forze esterne in equilibrio, la derivata parziale del lavoro di deformazione, rispetto allo spostamento di un punto della superficie esterna, è uguale alla forza concentrata nel punto stesso proiettata ortogonalmente sulla direzione dello spostamento.

Ne consegue che la ora detta derivata parziale è nulla se nel punto considerato non è applicata alcuna forza concentrata.

Questo secondo teorema ha applicazioni pratiche molto meno frequenti di quelle del primo; e ciò sopratutto per la difficoltà pratica di esprimere il lavoro di deformazione in funzione degli spostamenti in superficie.

Vedremo poi tra breve un analogo teorema che si presterà meglio nella pratica per ottenere una forza incognita iperstatica mediante derivate di lavori, rispetto al corrispondente spostamento.

È poi ovvio che se lo spostamento di un punto in una data direzione è nullo, per effetto di un vincolo rigido, la corrispondente componente di una forza concentrata in detto punto, la quale può essere la reazione del vincolo, si può ottenere esprimendo la derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto allo spostamento δ nella data direzione, e poi calcolando il valore di tale derivata per $\delta = 0$.

Le dimostrazioni che qui abbiamo esposte per i due teoremi di Castigliano valgono, come già si è detto, nel caso generale in cui vi siano, oltre a forze esterne concentrate, anche forze superficiali ripartite, forze di massa, e coazioni elastiche.

Nel caso speciale in cui esistano *solo* forze esterne concentrate, agenti sul sistema a partire dallo stato naturale non deformato, i due teoremi risultano immediatamente dal fatto che il lavoro di deformazione si può esprimere come funzione quadratica omogenea sia delle forze concentrate, sia degli spostamenti dei punti d'applicazione di esse misurati nelle rispettive direzioni; mentre per la legge di Hooke e per il principio della sovrapposizione degli effetti gli spostamenti sono funzioni lineari omogenee delle forze, e d'altra parte colla trasformazione inversa, le forze stesse si possono esprimere come funzioni lineari omogenee dei detti spostamenti.

Ed infatti, indicando con P le forze e con δ gli spostamenti dei rispettivi punti d'applicazione misurati nelle direzioni delle forze, che supporremo in numero di n, potremo per le leggi testè ricordate, porre:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = \eta_{11} P_1 + \eta_{12} P_2 + \ldots + \eta_{1n} P_n \\ \delta_2 = \eta_{21} P_1 + \eta_{22} P_2 + \ldots + \eta_{2n} P_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n = \eta_{n1} P_1 + \eta_{n2} P_2 + \ldots + \eta_{nn} P_n \end{array}\right\} \qquad (117)$$

o in compendio:

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik} P_k \qquad (117)$$

essendo:

$$i, k = 1, 2 \ldots\ldots n$$

È facile riconoscere il significato dei coefficienti η; infatti è chiaro che η_{ik} rappresenta lo spostamento del punto i^{mo} in direzione di P_i, per effetto di una forza $P_k = 1$ agente nel punto k^{mo} nella data direzione: le η si sogliono chiamare i *coefficienti d'influenza,* e si deve notare che per il teorema di reciprocità di Maxwell deve essere:

$$\eta_{ik} = \eta_{ki}.$$

Ora applicando il noto teorema di Clapeyron si può calcolare il lavoro di deformazione complessivo, come segue:

$$L = \frac{1}{2}(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \ldots + P_n\delta_n)$$

o simbolicamente:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i\delta_i \tag{118}$$

e sostituendo in questa i valori delle δ dati dalle (117) si ottiene:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\ [&P_1(\eta_{11}P_1 + \eta_{12}P_2 + \ldots + \eta_{1n}P_n) + \\ &+ P_2(\eta_{21}P_1 + \eta_{22}P_2 + \ldots + \eta_{2n}P_n) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ P_n(\eta_{n1}P_1 + \eta_{n2}P_2 + \ldots + \eta_{nn}P_n)] \end{aligned}$$

od anche, compendiosamente:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}P_k \tag{119}$$

Sviluppando i prodotti, la (119) diviene:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \eta_{ik}P_iP_k \tag{120}$$

ove si vede appunto che il lavoro L è una funzione quadratica omogenea (*forma quadratica*) delle n forze date P.

Orbene è noto dall'analisi, e del resto è facile da verificare direttamente, che la sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}P_k$$

che compare nella (119) è la *semiderivata* della *forma quadratica*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \eta_{ik} P_i P_k ,$$

fatta rispetto alla variabile P_i, e perciò si ottiene, secondo le (117) e (120):

$$\delta_i = \frac{\partial L}{\partial P_i} ,$$

ossia si ritrova appunto la (115), esprimente il *primo teorema di Castigliano.*

Il secondo poi dei detti teoremi si può ricavare con una trasformazione del tutto simile a quella già usata al Cap. IV.° nello stabilire analoghe proprietà per le derivate parziali del potenziale elastico: e precisamente, esprimendo il differenziale totale dL del lavoro di deformazione, riguardando questo come funzione, sia delle forze P, sia degli spostamenti δ, abbiamo per una notissima relazione di calcolo differenziale:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial P_i} dP_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} d\delta_k ,$$

notando che le due sommatorie devono essere identicamente uguali.

Ora la prima sommatoria si può trasformare in base al 1.° Teorema sopra dimostrato [secondo la (115)], e la seconda sommatoria si può pure trasformare esprimendo il $d\delta_k$ secondo le (117), e così si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot dP_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \sum_{i=1}^{n} \eta_{ki} \, dP_i ;$$

inoltre trasformando ancora il 1.° membro conforme alle (117), e nel secondo invertendo com'è lecito l' ordine delle due sommatorie rispetto a k e rispetto ad i, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} dP_i \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik} P_k = \sum_{i=1}^{n} dP_i \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \eta_{ik} ;$$

e per l'identità delle due espressioni deve essere necessariamente

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \qquad (121)$$

si ritrova così per altra via una relazione analoga alla (116), come s'è detto sopra, ricordando ben inteso che qui i δ sono gli spostamenti misurati nelle direzioni date delle forze P che li provocano.

Ma poichè può occorrere di dover assegnare come variabili indipendenti le quantità δ, è opportuno, — almeno a titolo di maggior chiarezza —, ricavare direttamente per questo caso la relazione (121), ora dimostrata in via indiretta.

Assegnare per il punto i^{esimo} la δ_i, ossia la componente in una data direzione, dello spostamento del punto stesso, equivale a vincolare il punto i^{mo} in modo che esso sia trattenuto senza attrito su un elemento piano (rigido) normale alla data direzione (che è quella della forza P_i sopra considerata), e poi attribuire al detto elemento piano vincolante uno spostamento δ_i normale al piano stesso; in tal caso è poi chiaro che la reazione sviluppata da questo vincolo senza attrito dovrà essere normale all'elemento piano stesso, e perciò agente secondo la data direzione; tale reazione, funzione di tutti gli spostamenti come δ_i, sarà la stessa P_i sopra detta.

Dovremo perciò considerare le P_i come funzioni lineari omogenee delle δ_i, e la trasformazione analitica che ci permette di passare dalle δ_i alle P_i è la *trasformazione inversa della* (117): essa si può esprimere come segue:

$$\begin{aligned} P_1 &= H_{11}\delta_1 + H_{12}\delta_2 + \ldots + H_{1n}\delta_n \\ P_2 &= H_{21}\delta_1 + H_{22}\delta_2 + \ldots + H_{2n}\delta_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_n &= H_{n1}\delta_1 + H_{n2}\delta_2 + \ldots + H_{nn}\delta_n \end{aligned}$$

o brevemente: (122)

$$P_i = \sum_{k=1}^{n} H_{ik}\,\delta_k$$

essendo: $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

N. B. H deve leggersi η maiuscola.

È noto dalla teoria algebrica delle trasformazioni lineari, e d'altra parte si può verificare direttamente in modo facilissimo, che la H_{ik} altro non è che il rapporto tra il suddeterminante complementare di

η_{ik} nel determinante dei coefficienti delle (117), e il determinante stesso; ciò risulta immediatamente applicando la regola di Cramer a risolvere le (117) rispetto alle P.

Poichè il determinante delle η_{ik} è simmetrico, deve quindi risultare pure simmetrico quello delle H_{ik}, ossia deve essere $H_{ik} = H_{ki}$. Inoltre è chiaro che la H_{ik} rappresenta la reazione del vincolo il quale nel modo descritto trattiene il punto i^{mo} per effetto di uno spostamento $\delta_k = 1$ attribuito nella data direzione (normale all'elemento piano che vincola il punto k^{mo}); anche queste H_{ik} si sogliono chiamare *coefficienti d'influenza*, e la riconosciuta simmetria del determinante sopradetto si può ricavare pure direttamente dal Teorema di reciprocità.

Il lavoro di deformazione L è ancora espresso dalla stessa (118): sostituendo in questa i valori dati dalle (122), si trova:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sum_{k=1}^{n} H_{ik}\, \delta_k \tag{123}$$

e sviluppando i prodotti, si trova:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} H_{ik}\, \delta_i\, \delta_k \quad ; \tag{124}$$

e come più sopra dalla (120) si ritrova la (115), ora dalla (124) si ritrova la (121),

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \delta_k} \tag{121}$$

questa relazione esprime il secondo teorema di Castigliano sotto la forma seguente:

quando degli spostamenti di alcuni punti di un sistema elastico si assegnano le componenti in date direzioni (nel modo detto sopra) allora la derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto alla componente dello spostamento di un dato punto presa nella data direzione è uguale alla forza che per effetto degli spostamenti assegnati si sviluppa nello stesso punto, agente nella stessa direzione.

In quanto precede abbiamo immaginato di raggiungere lo stesso stato di tensione nel nostro sistema elastico assegnando le forze concentrate in determinati punti, ovvero anche assegnando degli spostamenti subìti dagli stessi punti le componenti (ortogonali) nelle direzioni delle forze stesse.

Per completare con maggiore generalità l'esposizione dei varî modi di ottenere il lavoro di deformazione come funzione di forze concentrate o di spostamenti assegnati di dati punti ed anche per dimostrare in via diretta pure per questo caso il secondo teorema di Castigliano, è opportuno indicare qui un punto di vista analogo, ed in certo modo *duale* del precedente.

Come prima si era immaginato di assegnare le forze *totali* concentrate in dati punti, possiamo ora supporre di assegnare gli spostamenti *totali* (o *completi* — e non solo una componente per ciascuno di essi —) di n dati punti del sistema elastico.

Allora potremo indicare con δ_i lo spostamento totale del punto generico i^{esimo}; per effetto di questi spostamenti assegnati nei dati punti nasceranno delle forze concentrate (le quali si potranno riguardare come reazioni degli eventuali vincoli esterni che costringono i dati punti ad assumere gli spostamenti assegnati); indicheremo con P_i la componente (ortogonale) nella direzione di δ_i, della forza che si sviluppa nel punto generico i^{esimo}.

In tal caso, colla solita applicazione della legge di Hooke e del principio della sovrapposizione degli effetti, le P_i si possono esprimere in funzione delle δ_k mediante le stesse (122), nelle quali però i simboli hanno un significato diverso da quello prima inteso, come risulta da quello che si disse or ora. Dalle (122) così interpretate, si ritrova necessariamente, nel modo sopra esposto, la (121), la quale però ora va intesa col nuovo significato dei simboli; ed essa esprime il secondo teorema di Castigliano nella forma primitivamente enunciata in base alla (116).

Inversamente si può immaginare di assegnare nel punto i^{esimo} generico la P_i intesa nel modo ora detto, ossia come la componente (ortogonale) della forza concentrata applicata in quel dato punto, misurata in una data direzione, essendo δ_i lo spostamento totale dello stesso punto, compiuto necessariamente nella stessa direzione.

Ciò si può materialmente realizzare costringendo con vincoli esterni il punto i^{esimo} a muoversi lungo un elemento rettilineo (rigido) nella direzione assegnata di δ_i, in modo che tale retta *trattenga* il punto *senza attrito*, e poi applicando allo stesso punto, nella stessa direzione una forza P_i; tale forza sarà pure accompagnata dalla reazione del vincolo lineare che trattiene il punto i^{esimo}, la qual reazione è normale alla data direzione, mancando per ipotesi l'attrito; allora P_i è la componente (ortogonale), nella data direzione di δ_i, della forza totale agente sul punto i^{esimo}. Si può quindi anche qui ritenere di raggiungere lo stesso stato di tensione prima ottenuto, assegnando le P_i, mentre prima si assegnavano le δ_i.

Ora le δ_i si devono considerare come funzioni delle variabili indipendenti P_i e la trasformazione che ci dà le prime in funzione delle seconde è la stessa (117), coll'avvertenza del diverso significato ora attribuito ai simboli. Come sopra, si ricava la (115) che qui trascriviamo:

$$\delta_i = \frac{\partial L}{\partial P_i} \quad ;$$

la quale però qui ora ci fornisce il primo teorema di Castigliano in una nuova forma tenendo conto del nuovo significato dei simboli: tale forma è la seguente:

quando delle forze concentrate applicate in alcuni punti di un sistema elastico si assegnano le componenti in date direzioni (nel modo detto poco sopra), allora la derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto alla componente secondo la data direzione della forza applicata in un dato punto, è uguale allo spostamento totale, che per effetto delle forze date il punto stesso subisce nella data direzione.

Queste nuove forme dei due teoremi di Castigliano, ottenuti immaginando di assegnare come variabili indipendenti una componente dello spostamento di un punto, ovvero una componente della forza concentrata applicata in un punto, furono dunque qui dimostrate nel caso in cui sul sistema elastico agiscano solo forze esterne concentrate: sarebbe però facilissimo estendere tali teoremi anche al caso in cui esistano pure forze distribuite, modificando opportunamente le dimostrazioni esposte più sopra pure per il caso generale, nell'ipotesi che siano variabili indipendenti le forze, ovvero gli spostamenti in tutta la loro grandezza.

Non ci soffermiamo su questa estensione, sia perchè il procedimento è assai ovvio e piano, dopo quanto s'è detto sopra, sia per amore di brevità, dovendo noi ora passare a trattare altri argomenti attinenti direttamente con le applicazioni.

Può essere utile un'osservazione relativa al caso in cui tra le forze esterne date P vi siano due forze uguali e direttamente opposte applicate in due punti A e B, le quali possono essere le reazioni di un vincolo o legame *interno* tra i due punti AB, (quale una catena od un'asta che riunisca i due punti). La forza applicata in A sia $P' = P$; quella in B sia $P'' = -P$; siano poi δ_a e δ_b gli spostamenti di A e B nella direzione di AB e nei versi delle rispettive forze:

Per il primo teorema di Castigliano si ha:

$$\delta_a = \frac{\partial L}{\partial P'} \quad ; \quad \delta_b = \frac{\partial L}{\partial P''} .$$

Ora, invece di considerare le forze P' e P'' come due distinte variabili indipendenti, teniamo conto della relazione tra esse imposta: esse sono opposte, ed uguali in valore assoluto a P; si può così assumere P come variabile indipendente. Ciò posto, l'incremento subìto dal lavoro di deformazione L, quando P subisce l'incremento dP sarà:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial P} dP = \frac{\partial L}{\partial P'} dP' + \frac{\partial L}{\partial P''} dP''$$

intendendo che le forze P' e P'' si computano nei loro rispettivi versi opposti, e perciò nelle funzioni ora scritte i loro valori devono ritenersi entrambi uguali a P; essendo quindi:

$$dP' = dP'' = dP \; ,$$

si ricava:

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \frac{\partial L}{\partial P'} + \frac{\partial L}{\partial P''} ;$$

e per le relazioni precedenti risulta:

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \delta_a + \delta_b$$

Ora, poichè le δ_a e δ_b sono valutate in senso opposto, la loro somma $\delta_a + \delta_b = \delta_r$ è *lo spostamento relativo dei due punti AB nella direzione della retta AB, e nel senso della forza su essi esercitata dal mutuo legame che li unisce.*

Si ha dunque:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial P} = \delta_r \, .}$$

Inversamente, considerando come variabili indipendenti gli spostamenti, se tra questi si assegna lo spostamento relativo δ_r di due punti A e B collegati da un legame mutuo nella direzione della loro congiungente AB, e se δ_a e δ_b sono gli spostamenti assoluti di A e di B in direzione AB, ma in versi opposti, avremo sempre $\delta_r = \delta_a + \delta_b$.