

Ma per la legge di Hooke le componenti di deformazione $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ sono funzioni lineari omogenee delle componenti speciali di pressione; quindi dalla (95) risulta subito pure che:

d) *Il potenziale elastico è una funzione quadratica omogenea positiva delle componenti speciali di pressione.*

Ciò si può pure riconoscere in base alle note proprietà analitiche delle forme quadratiche. Si noti che le (93) costituiscono un sistema di sei equazioni lineari tra le sei grandezze $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$; il determinante di questo sistema è lo stesso *discriminante* della forma Φ (nelle $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$). Esso è necessariamente diverso da zero; infatti se esso fosse nullo, allora il sistema seguente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} = 0 \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} = 0 \dots$$

potrebbe essere soddisfatto per valori non tutti nulli delle $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ ed allora per gli stessi valori si avrebbe, secondo la (94): $\Phi = 0$, in contraddizione colla proprietà a). Dunque il sistema (93) risulta determinato, e perciò si può risolvere rispetto alle $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$, le quali così risultano espresse da funzioni lineari omogenee delle X_x, \dots, Y_x, \dots , (secondo la legge di Hooke), e perciò, conforme alla (94) ed alla (95) risulta Φ una funzione quadratica omogenea (*forma*) delle componenti speciali di pressione.

La Φ così definita è quella che si dice la *forma reciproca* della primitiva.

Infine dalle ben note proprietà delle *forme*, come pure osservando che secondo la (95) la funzione Φ è costituita in modo simmetrico rispetto alle variabili X_x, \dots, Y_x, \dots ed alle $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ ricordando che le une sono funzioni lineari delle altre, e tenendo presenti le (93), si ricava in modo analogo:

$$\epsilon_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_x}, \dots; \quad \gamma_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y_x}, \dots; \quad (96)$$

quindi possiamo enunciare la proprietà simmetrica della b):

e) *Le componenti di deformazione sono uguali ed opposte alle derivate parziali del potenziale elastico rispetto alle omologhe componenti speciali di pressione.*

Questa proprietà si può pure dimostrare direttamente con trasformazioni analitiche.

Infatti, dalla (95), calcolando il differenziale totale della Φ , e differenziando i prodotti a secondo membro, si trova:

$$2d\Phi = -(X_x d\epsilon_x + \dots + Y_x d\gamma_{yz} + \dots + \epsilon_x dX_x + \dots + \gamma_{yz} dY_x + \dots);$$

ma d'altra parte si ha in generale :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}} d\varepsilon_{\alpha\beta} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{\mu\nu}} d\gamma_{\mu\nu} + \dots ,$$

e per le (93) :

$$d\Phi = -(X_{\alpha} d\varepsilon_{\alpha} + \dots + Y_{\beta} d\gamma_{\beta} + \dots) ;$$

ed infine sottraendo questa dall'espressione precedente di $2d\Phi$ si ottiene :

$$d\Phi = -(\varepsilon_{\alpha} dX_{\alpha} + \dots + \gamma_{\mu\nu} dY_{\mu\nu} + \dots) \quad (90 \text{ bis})$$

e perciò, osservando che in generale si ha pure :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial X_{\alpha}} dX_{\alpha} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial Y_{\beta}} dY_{\beta} + \dots$$

si deducono infine le (96), e la proprietà e) già enunciata.

Si noti che alla (90 bis) si può pervenire pure con un ragionamento sintetico diretto, compiuto considerando il solito parallelepipedo elementare, in modo analogo a quello seguito nelle pag. 98 e 99, per giungere sinteticamente alla (89) e perciò alla (90).

Infatti per computare l'incremento che il lavoro di deformazione elementare subisce per gli incrementi $dX_{\alpha}, \dots, dY_{\beta}, \dots$, si può immaginare di far agire sull'elemento di volume considerato, prima le pressioni $dX_{\alpha}, \dots, dY_{\beta}, \dots$, con le quali si compie un lavoro di deformazione infinitesimo di ordine superiore, e poi fare agire le pressioni $X_{\alpha}, \dots, Y_{\beta}, \dots$, le quali introdurranno di conseguenza le deformazioni $\varepsilon_{\alpha}, \dots, \gamma_{\mu\nu}, \dots$, compiendo un lavoro di deformazione proprio, che per *unità di volume* è appunto Φ , ed inoltre faranno compiere alle pressioni già applicate un lavoro, per unità di volume, dato evidentemente da :

$$-(\varepsilon_{\alpha} dX_{\alpha} + \dots + \gamma_{\mu\nu} dY_{\mu\nu} + \dots) ,$$

il quale d'altra parte appunto rappresenta il $d\Phi$, e così resta confermata la (90 bis).

Dobbiamo notare esplicitamente che tutto quanto è esposto nel presente numero 30, e nel precedente N.º 29 riguardo al potenziale di elasticità, vale in generale per qualsiasi corpo elastico, anche non isotropo.

Poichè il potenziale Φ è una forma quadratica di sei variabili $\epsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ ovvero $X_r \dots Y_\epsilon \dots$ essa ha tanti termini e perciò tanti coefficienti quanti sono le combinazioni con ripetizione di 6 elementi due a due, ossia in numero di:

$$\frac{6(6-1)}{2} + 6 = 21$$

Tali 21 coefficienti sono in generale, per il solido non isotropo, tutti distinti, ed assoggettati alla sola condizione che la forma Φ sia positiva. Il numero di quelli distinti però diminuisce per corpi cristallizzati, ed ancor più per i corpi isotropi. E per quest'ultimo caso, che è quello che specialmente ci interessa per l'applicazione, studieremo ora la particolare espressione del potenziale.

31. IL POTENZIALE ELASTICO PER I SOLIDI ISOTROPI.

Nell'espressione di 2Φ data dalla (95) noi possiamo sostituire alle $X_r \dots Y_\epsilon \dots$ le loro espressioni in funzione delle $\epsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ date dalle (73) e (74) — N.° 27 —, valevoli per il solido isotropo. Ciò fatto, con ovvie riduzioni si trova infine:

$$2\Phi = \lambda(\Theta^2 + \mu[2(\epsilon_r^2 + \epsilon_\mu^2 + \epsilon_\nu^2) + \gamma_{\mu\nu}^2 + \gamma_{\nu\mu}^2 + \gamma_{r\mu}^2]) \quad , \quad (97)$$

la quale ci esprime per il corpo isotropo il potenziale elastico come funzione quadratica omogenea delle componenti di deformazione.

E facile verificare qui direttamente che le derivate parziali di Φ rispetto alle $\epsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ ci danno le $X_r \dots Y_\epsilon \dots$ espresse secondo le (73) e (74), conforme alla proprietà b). D'altra parte noi possiamo nella (95) sostituire alle $\epsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ le loro espressioni in funzione delle $X_r \dots Y_\epsilon \dots$ secondo le (71) e (72) — N.° 27 — e si ottiene con facili riduzioni:

$$2\Phi = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{P^2}{m} + \frac{m+1}{m} [X_r^2 + Y_\mu^2 + Z_\epsilon^2 + 2(Y_\epsilon^2 + Z_r^2 + X_\mu^2)] \right\} \quad (98)$$

la quale esprime per il corpo isotropo il potenziale elastico come funzione quadratica omogenea delle componenti speciali di pressione. Ricordiamo che nella (98) P ha il significato espresso dalla (69) — N.° 27 —.

Anche qui si può verificare direttamente che le derivate parziali della Φ secondo la (98) rispetto alle $X_r \dots Y_\epsilon \dots$ sono le $\epsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$,

espresse secondo le (71) e (72); e ciò conforme alla proprietà e) sopra enunciata.

Confrontando la (97) colle (26) del N.° 10³², ed anche la (98) colle (57) del N.° 21, si riscontra facilmente quanto segue:

Il potenziale elastico per un solido è una combinazione lineare del quadrato dell'invariante lineare e dell'invariante quadratico di deformazione (26) ovvero di pressione (57); ne consegue che detto potenziale è pure esso stesso un invariante, ossia non muta valore per una qualunque trasformazione delle coordinate. Quest'ultima proprietà, evidente e necessaria per lo stesso significato fisico del potenziale, vale anche naturalmente per i solidi non isotropi.

Può interessare ora riconoscere come dal fatto, sopra riscontrato, che il potenziale è sempre positivo, si possono dedurre le condizioni (75) e (76) — N.° 27 — a cui deve soddisfare il coefficiente di Poisson.

Invero noi possiamo ridurre la funzione Φ alla così detta « forma canonica » (quella cioè che contiene i soli termini quadratici).

A tale scopo, come risulta dalla (97), basta determinare una quantità a tale che sia:

$$\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{\lambda}{2\mu} \Theta^2 = (\epsilon_x - a\Theta)^2 + (\epsilon_y - a\Theta)^2 + (\epsilon_z - a\Theta)^2.$$

Sviluppando i quadrati e riducendo si trova, per determinare a , la relazione:

$$\frac{\lambda}{2\mu} = 3a^2 - 2a$$

da cui risolvendo si ottiene:

$$a = \frac{1}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3\lambda}{2\mu}} \right)$$

Determinata la a , possiamo esprimere la Φ come segue:

$$\begin{aligned} \Phi = \mu [& (\epsilon_x - a\Theta)^2 + (\epsilon_y - a\Theta)^2 + (\epsilon_z - a\Theta)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)] \end{aligned}$$

questa forma, come è noto, deve essere positiva per qualsiasi gruppo di valori delle $\epsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$; perciò in particolare per:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0,$$

e perciò è necessario che sia: *forma la prima pos.*

$$\mu > 0 ; \quad (99)$$

ed anche per:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0 ,$$

e perciò occorre che si abbia:

$$3\mu(1-3a)^2 = 3\mu \left(1 + \frac{3\lambda}{2\mu}\right) > 0$$

ossia:

$$3\lambda + 2\mu > 0 \quad (100)$$

Le condizioni (99) e (100) sono anche sufficienti, poichè se esse sono verificate, allora la a è reale, e la Φ , sotto l'ultima forma scritta, è il prodotto di un numero positivo per una somma di quadrati di quantità reali, e perciò è essenzialmente positiva.

Ora, ricordando le espressioni (61) e (62) delle due costanti di Lamé — N.° 25¹⁾ —, è facile verificare con semplici trasformazioni, che le (99) e (100) equivalgono alle (75) e (76), le quali vengono così ad essere connesse colla condizione che la Φ sia positiva, come si è detto sopra.

32. LAVORO COMPIUTO DA UN DATO SISTEMA DI FORZE PER UN SISTEMA GENERICO DI SPOSTAMENTI.

Occorre spesso esprimere il lavoro che un dato sistema di forze compie per effetto di un dato sistema di spostamenti del solido elastico, spostamenti anche non provocati dal dato sistema di forze. Talvolta gli spostamenti, (ovvero le forze) che si considerano per esprimere il lavoro non sono effettivi, ma fittizi o *virtuali*, introdotti in calcolo per speciale artificio, allo scopo di esprimere facilmente delle relazioni tra forze effettive (o rispettivamente tra gli spostamenti effettivi), con cui si combinano per esprimere il detto lavoro.

In tal caso il lavoro che si calcola non è un lavoro effettivamente compiuto, e si dice *lavoro virtuale*; si può utilizzare la sua espressione per applicare il principio dei lavori virtuali notissimo dalla meccanica razionale, che noi applicheremo più innanzi.

Si noti che quanto qui diciamo vale in generale per qualsiasi solido elastico, anche non isotropo.

Siano $X, Y, Z; X_n, Y_n, Z_n$ le componenti delle forze esterne di massa e superficiali costituenti il dato sistema e siano u', v', w' le componenti di spostamento.

Indicheremo dunque con L' il lavoro che le forze date X, \dots, X_n, \dots compiono per effetto del detto spostamento $u' \dots$ supponendo, ben inteso, che mentre si compie tutto lo spostamento $u' \dots$ le date forze X, \dots, X_n, \dots abbiano raggiunta e conservino costante tutta la loro intensità, esso è espresso da:

$$L' = \int_V \varphi(Xu' + Yv' + Zw')dV + \int_S (X_n u' + Y_n v' + Z_n w') dS \quad (101)$$

Questa espressione si può trasformare mediante la relazione di Cauchy (35), e la formola di Gauss generalizzata (29), nella stessa guisa, in cui si trasformò al N.º 29, l'espressione di δL , giungendo poi alla formola (89), colla sola variante dovuta al fatto che gli spostamenti δu , ecc. che là comparivano, sono qui sostituiti dagli spostamenti u , ecc. si trova così analogamente alla (89):

$$L' = - \int_V (X_n \varepsilon'_{xx} + Y_n \varepsilon'_{yy} + Z_n \varepsilon'_{zz} + Y_n \gamma'_{yz} + Z_n \gamma'_{zw} + X_n \gamma'_{xy}) dV \quad (102)$$

A questa stessa espressione si può pure giungere calcolando il lavoro elementare dovuto alla deformazione di un elemento parallelepipedo rettangolo, cogli spigoli diretti come gli assi coordinati, di volume dx, dy, dz , in modo analogo a quello seguito al citato N.º 29, coll'intento di dare una dimostrazione sintetica della relazione (89).

La (102) ci servirà nel seguito per esprimere il *lavoro virtuale*, secondo quanto si disse sopra.

33. UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO ELASTICO.

Alla fine del N.º 28 abbiamo enunciato che, ammessa l'esistenza di una soluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico, (ossia di un sistema di spostamenti soddisfacente alle dette equazioni) si può dimostrare che una tale soluzione è unica, se sulla superficie esterna sono dati gli spostamenti, oppure le forze.

Possiamo ora esporre la dimostrazione di questo enunciato, valevole in generale anche per solidi non isotropi.

Infatti, supponiamo che esistano due soluzioni, ossia due diversi sistemi di spostamenti soddisfacenti alle equazioni di equilibrio, e siano essi u', v', w' , ed u'', v'', w'' ; siano pure $X, \dots, X_n, \dots; Y', \dots, Y'_n, \dots; \varepsilon', \dots, \varepsilon'_n, \dots; \gamma', \dots, \gamma'_n, \dots$

le componenti speciali di pressione, e le componenti di deformazione corrispondenti al primo sistema di spostamenti e siano $X''_x \dots Y''_z \dots, \epsilon''_x \dots \gamma''_{yz} \dots$ le analoghe grandezze per la seconda soluzione.

Supponiamo dapprima che siano date le forze di massa e le pressioni superficiali; allora in ogni punto interno del solido elastico avremo: $\left. \begin{matrix} 5a. \\ 5b. \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \rho X = \\ X'_x \cos(nx) + X'_y \cos(ny) + X'_z \cos(nz) = \\ X''_x \cos(nx) + X''_y \cos(ny) + X''_z \cos(nz) \end{matrix}$

$$\rho X = \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} = \frac{\partial X''_x}{\partial x} + \frac{\partial X''_y}{\partial y} + \frac{\partial X''_z}{\partial z};$$

.....

ed in ogni punto in superficie sarà:

$$\begin{aligned} X_n &= X'_x \cos(nx) + X'_y \cos(ny) + X'_z \cos(nz) = \\ &= X''_x \cos(nx) + X''_y \cos(ny) + X''_z \cos(nz) \end{aligned}$$

.....

Ora poniamo:

$$u = u' - u'' \dots; \quad \epsilon_x = \epsilon'_x - \epsilon''_x \dots; \quad \gamma_{yz} = \gamma'_{yz} - \gamma''_{yz} \dots$$

$$X_x = X'_x - X''_x \dots$$

Per le relazioni precedenti deve dunque essere in ogni punto interno del solido elastico:

$$\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} = 0 \tag{103}$$

.....

ed in ogni punto della superficie esterna:

$$X'_x \cos(nx) + X'_y \cos(ny) + X'_z \cos(nz) = 0 \tag{104}$$

.....

Orbene se nelle (101) e (102) noi poniamo $u' = u \dots \epsilon'_x = \epsilon_x \dots \gamma'_{yz} = \gamma_{yz} \dots$ tenendo conto delle (103) e (104), otteniamo:

$$\int_V (X_x \epsilon_x + Y_y \epsilon_y + Z_z \epsilon_z + X_y \gamma_{yz} + Z_x \gamma_{zx} + X_z \gamma_{zy}) dV = 0$$

ossia, ricordando la (95), abbiamo:

$$\int_V \Phi dV = 0; \tag{105}$$

e poichè la funzione Φ , per le convenzioni fatte è sempre essenzialmente positiva, [v. N.° 30 a) e c)], l'ultima condizione potrà essere soddisfatta solo se è $\Phi = 0$ in tutti i punti del solido; e ciò, secondo appunto la proprietà a), vista al N.° 30, richiede che sia, sempre in tutto il solido:

$$\epsilon_p = \dots \gamma_{pq} = \dots = 0$$

Perciò le due deformazioni di componenti $\epsilon'_{p\dots}$, $\gamma'_{pq\dots}$ ed $\epsilon''_{p\dots}$, $\gamma''_{pq\dots}$ sono identiche, ed i corrispondenti spostamenti u' , v' , w' , u'' , v'' , w'' differiscono solo per uno spostamento rigido, come si vide in fine del N.° 7, cap. II.

Supponiamo ora che sulla superficie esterna anzichè le forze siano dati gli spostamenti; allora le due soluzioni più sopra supposte distinte avranno in superficie uguali valori delle componenti omologhe, ossia sarà sulla superficie S esterna:

$$u' = u'' \quad ; \quad v' = v'' \quad ; \quad w' = w'' \quad ;$$

e perciò:

$$u = v = w = 0 \quad ;$$

quindi per le (101) e (102) ove si ponga: $u' = u\dots$; $\epsilon'_{pq} = \epsilon_{pq\dots}$; $\gamma'_{pq\dots} = \gamma_{pq\dots}$, si ritrova, come poco sopra, la (105), ed in conseguenza lo stesso risultato testè visto.

Analogo ragionamento si può applicare nel caso in cui sulla superficie esterna siano dati parte degli spostamenti e parte delle forze.

Perciò riassumendo si può enunciare che *le equazioni di equilibrio indefinite ed in superficie sono necessarie e sufficienti per determinare lo stato di equilibrio di un solido elastico.*

34. AVVERTENZE RELATIVE ALLE FORZE CONCENTRATE.

Finora abbiamo sempre considerate delle *forze esterne superficiali distribuite o ripartite* sulla superficie S , indicando, — (come è noto) — con X_n , Y_n , Z_n le loro componenti riferite all'unità di area.

Nelle applicazioni occorre spesso considerare invece *forze concentrate*, nel senso ben noto nella meccanica razionale e nella statica grafica.

Per precisare tale concetto occorre osservare che la *forza concentrata* è sempre un'astrazione teorica, poichè in natura esistono solo forze ripartite. Per quanto riguarda le forze di massa è chiaro che esse devono intendersi distribuite sulla massa, e perciò sul volume del corpo.

Per le forze superficiali poi si deve notare che se sulla superficie esterna di un corpo agisse in un punto una forza finita concentrata, ossia esercitata su un'area nulla, in quel punto la pressione o tensione unitaria dovrebbe essere infinitamente grande, e nessun materiale della natura sarebbe atto a sopportarla.

In realtà una forza concentrata si potrebbe avere quale spinta mutua tra due solidi, i quali si tocchino geometricamente in un sol punto colle loro superficie esterne; ma sotto l'azione della spinta i solidi stessi in prossimità del punto di contatto si deformano, sicchè dopo la deformazione il contatto, anzichè in un punto, avviene secondo una zona o calotta finita, più o meno estesa, quasi sempre molto piccola, sulla quale si distribuisce la detta spinta.

La legge secondo cui avviene questa ripartizione è per lo più incognita, e la sua determinazione è difficilissima in generale. D'altra parte, poichè l'area della detta regione secondo cui avviene il contatto è sempre piccolissima, si potrà ritenere con molta approssimazione che tutti i punti della regione stessa subiscano lo stesso spostamento, (uguale per es. al valore medio degli spostamenti effettivi dei vari punti dell'area), il quale si potrà considerare come lo spostamento del punto di applicazione della risultante della spinta distribuita sulla regione suddetta. In altri termini, mentre nella meccanica di un corpo rigido sostituire ad un sistema di forze distribuite la relativa risultante è perfettamente rigoroso, nello studio invece dei solidi elastici, detta sostituzione può essere giustificata dalla piccolezza dell'area su cui è distribuito tale sistema di forze. Sicchè nello studio dei solidi elastici una forza superficiale concentrata rappresenta sempre la risultante di un sistema di forze distribuite su un'area piccolissima con legge in generale incognita, e con pressioni unitarie molto grandi.

Come punto di applicazione della forza stessa, si deve considerare il centro dell'area piccolissima, su cui la forza si trova effettivamente distribuita.

E poi ovvio che per calcolare il lavoro effettivo o virtuale di una tale forza concentrata occorre valutare lo spostamento effettivo o virtuale del suo punto di applicazione inteso nel modo ora definito.

Se le componenti della detta forza secondo i tre assi sono F_x , F_y , F_z , indicando ancora con u' , v' , w' , le componenti dello spostamento del suo punto di applicazione, il lavoro da essa compiuto sarà:

$$F_x u' + F_y v' + F_z w' ;$$

sicchè in generale l'espressione del lavoro delle forze esterne di

massa, superficiali ripartite e concentrate, agenti in un solido elastico, secondo quanto è esposto al N.° 32, è dato da:

$$L' = \int_V \rho (Xu' + Yv' + Zw') dV + \int_S (X_u u' + Y_u v' + Z_u w') dS + \\ + \Sigma (F_x u' + F_y v' + F_z w') \quad (106)$$

intendendo la sommatoria estesa a tutte le forze concentrate.

Può essere opportuno osservare esplicitamente come la sommatoria stessa si possa considerare quale un contributo all'integrale di superficie; infatti, indicando con ΔS l'area incognita della zona, su cui si ripartisce la forza generica di componenti F_x , F_y , F_z , la sommatoria si può identicamente trasformare come segue:

$$\Sigma \left(\frac{F_x}{\Delta S} u' + \frac{F_y}{\Delta S} v' + \frac{F_z}{\Delta S} w' \right) \Delta S ;$$

e qui i rapporti:

$$\frac{F_x}{\Delta S}, \frac{F_y}{\Delta S}, \frac{F_z}{\Delta S},$$

si possono considerare come i valori medi delle componenti ortogonali di pressione nella zona ΔS , sicchè la forma e la natura del termine generico della sommatoria sono perfettamente analoghe a quelle del termine generico dell'integrale di superficie, come s'era enunciato poco più sopra.

Feciò, quando si trasforma il detto integrale di superficie in un integrale di volume per mezzo delle relazioni di Cauchy e della formula di Gauss generalizzata, la trasformazione stessa dev'essere estesa pure alla detta sommatoria, e l'espressione (102) del lavoro L' , non cessa di essere valida anche quando vi siano pure forze superficiali concentrate.

APPENDICE AL CAPITOLO IV.

35. APPLICABILITÀ DELLE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO ELASTICO, PER RICAVARE LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO E DEL MOTO DEI FLUIDI.

A). EQUILIBRIO STATICO.

Dalla fisica è noto che nell'equilibrio statico di una massa fluida in riposo non esistono pressioni tangenziali: perciò deve essere $\mu = 0$. Questo fatto precisa e conferma ciò che si disse in fine del N.º 25 pag. 77, a proposito della denominazione della costante μ .

È ora opportuno notare che per un fluido in equilibrio statico, essendo $\mu = 0$, *il coefficiente di compressibilità cubica* dato dalla (77), pag. 86, *risulta l'inverso di* λ . Ciò costituisce un interessante significato della costante λ per i fluidi.

Si osservi poi che dalle ben note espressioni di λ e μ , si possono ricavare m ed E in funzione delle stesse λ e μ , ottenendo:

$$m = 2 \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \quad (\text{cfr. pag. 83})$$

$$E = \mu \cdot \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

Da queste, per $\mu = 0$ risulta:

$$m = 2 \quad ; \quad E = 0$$

Questi sono dunque i valori che compétono all'equilibrio statico del fluido.

[Non deve fare meraviglia il valore $E = 0$: l'elasticità del fluido è rappresentata dalla sua compressibilità cubica $1:\lambda$; il modulo E rappresenta per la sua stessa definizione, anche per i solidi, il rapporto tra l'incremento della pressione normale in una data direzione (p. es. x) e la corrispondente contrazione lineare nella stessa direzione (p. es. $- \epsilon_x$), nel caso, in cui le pressioni normali in direzioni laterali normali alla prima *non* subiscano incrementi; è pure noto che in tal caso nelle dette direzioni laterali si presentano dilatazioni pari alla prima contrazione divisa per m :

$$\epsilon_y = \epsilon_z = - \frac{\epsilon_x}{m}$$

Nel caso di un fluido, per il principio di Pascal, se sono nulli gli incrementi di pressioni normali laterali, deve pure essere nullo l'incremento della pressione normale nella data direzione x . Ne risulta perciò $E = 0$.

Inoltre, in tali condizioni, il volume non varia, poichè resta invariata la pressione; deve quindi essere $\Theta = 0$, e per le riconosciute relazioni tra le $\varepsilon \dots$ deve essere $m = 2$].

Da quanto precede si deduce che le (80) ed (83), per $\mu = 0$ e con il significato di λ poco sopra precisato, devono rappresentare le equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti per una massa fluida in riposo.

A proposito delle (83) occorre osservare che per un fluido in riposo le *tensioni* in superficie L , M , N devono essere le componenti cambiate di segno della pressione \mathbf{p} del fluido; ossia deve essere:

$$L = -\mathbf{p} \frac{dx}{dn}; \quad M = -\mathbf{p} \frac{dy}{dn}; \quad N = -\mathbf{p} \frac{dz}{dn}.$$

B). MOTO. EQUILIBRIO DINAMICO. GENERALITÀ.

In virtù del ben noto principio di *D'Alembert*, dalle equazioni di equilibrio statico si può passare alle equazioni del moto, — le quali si possono considerare come *equazioni di equilibrio dinamico*, — sovrapponendo alle forze impresse le *forze supplementari*, (o *reazioni*) provocate dal moto stesso.

In particolare occorre sommare algebricamente alle componenti X , Y , Z delle forze di massa applicate, le rispettive componenti delle *forze d'inerzia*, le quali per unità di massa sono rispettivamente, com'è ben noto:

$$-\frac{du'}{dt}; \quad -\frac{dv'}{dt}; \quad -\frac{dw'}{dt};$$

essendo, beninteso, t il tempo ed u' , v' , w' le componenti della velocità, (funzioni del tempo), del punto generico della massa fluida in moto.

Vediamo ora l'esistenza di *pressioni interne supplementari*.

Secondo i risultati della fisica si sa che i fluidi della natura presentano tutti, in vario grado, una proprietà che si dice *viscosità*, la quale durante il moto del fluido provoca in seno allo stesso delle *pressioni interne supplementari di viscosità*, (o — brevemente — *viscose*), le quali si devono sovrapporre alla *pressione p* propria del fluido nel punto considerato.

È ben noto che questa pressione \mathbf{p} dipende dalla densità e dalla temperatura del fluido, attraverso a quella relazione che si studia nella fisica sotto la denominazione di *equazione di elasticità del fluido*.

Noi calcoleremo ora queste *pressioni supplementari di viscosità* (o *viscose*), e sovrapponderole alla pressione \mathbf{p} , nelle equazioni dell'equilibrio, in pari tempo trasformate con l'introduzione delle forze d'inerzia, conforme al principio di D'Alembert, ne dedurremo le *equazioni dell'equilibrio dinamico*, ossia le *equazioni del moto del fluido*.

C). PRESSIONI SUPPLEMENTARI DI VISCOSITÀ, — O VISCOSE. —

Indichiamo con $\epsilon' \dots, \gamma' \dots, \Theta', p' \dots$ le *velocità* rispettivamente definite nel N.° 15 bis, pag. 47; esse sono le *derivate rispetto al tempo t* ordinatamente delle $\epsilon \dots, \gamma \dots, \Theta, p \dots$

Ancora dalla fisica risulta che nel fluido viscoso le *pressioni supplementari* sviluppate durante il moto sono funzioni lineari omogenee delle $\epsilon' \dots, \gamma' \dots$, e sono *essenzialmente dovute alle velocità di scorrimento* $\gamma' \dots$, di modo che la viscosità resta senza effetto quando le γ'_{ab} sono sempre nulle per coppie di direzioni ortogonali *ab* affatto qualunque: ciò notoriamente si verifica quando le *velocità di dilatazione* $\epsilon' \dots$ sono uguali in tutte direzioni.

Queste leggi hanno basi essenzialmente sperimentali.

Il fluido è per natura sua essenzialmente isotropo; perciò le *pressioni supplementari viscose*, le cui componenti speciali indicheremo con $X_{xy} \dots, Y_{xy} \dots$, devono essere legate alle $\epsilon'_{x\dots}, \gamma'_{yz} \dots$ da relazioni perfettamente analoghe alle (73) e (74):

$$X_{xy} = -\lambda_1 \Theta' - 2\mu_1 \epsilon'_{xy}; \dots \quad (73 \text{ bis})$$

$$Y_{xy} = -\mu_1 \gamma'_{yz}; \dots \quad (74 \text{ bis})$$

ove λ_1 e μ_1 sono due coefficienti dipendenti dalla natura del fluido e dalla sua temperatura.

Il secondo di essi è quello che più direttamente si misura negli esperimenti fisici, e si chiama *coefficiente di viscosità* o brevemente, per antonomasia, *viscosità*.

Nei trattati di idromeccanica esso si indica con μ ; noi qui gli abbiamo apposto l'*indice* 1 per evitare di confonderlo con l'analogo coefficiente relativo ai solidi elastici, il quale è la seconda costante di Lamé.

Per stabilire il rapporto dei due coefficienti λ_1 e μ_1 si può uti-

lizzare la proprietà poco sopra riscontrata, essere $X_{xy} = Y_{yx} = Z_{zx} = 0$ quando $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = \varepsilon'_{zz} = \varepsilon'_a$ per a qualunque.

In tal caso si ha: $\Theta' = 3\varepsilon'_a$, e dalle (73 bis) si deduce:

$$3\lambda_1 + 2\mu_1 = 0$$

ossia:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}\mu_1.$$

Questa relazione ci permette di calcolare λ_1 dopo che gli esperimenti fisici hanno fornito la misura di μ_1 .

Le (73 bis) e (74 bis) ci dimostrano che *il fluido viscoso in moto si comporta rispetto alle ε'_{xx} e γ'_{xy} , come si comporta rispetto alle ε'_{yy} e γ'_{xy} ... un corpo elastico isotropo (fittizio o rappresentativo) avente le costanti di Lamé rispettivamente uguali a λ_1 e μ_1 .*

Dalle espressioni di m ed E in funzione di λ e μ stabilite in *A*), (pag. 111) e dal rapporto $\mu_1 : \lambda_1$ or ora calcolato, risulta che *il corpo elastico isotropo fittizio*, introdotto a rappresentare, — per semplice analogia, — il comportamento del fluido viscoso, deve avere per m il valore $m_1 = -1$, e per E il valore $E_1 = 0$.

[Sull'annullarsi di E si veda la nota in parentesi [] al principio di questo N.º 35 a pag. 111].

Si noti pure che dalle (73 bis) e dal calcolato rapporto $\mu_1 : \lambda_1$ si deduce che è sempre nullo l'*invariante fondamentale lineare delle pressioni supplementari viscoso*: $X_{xy} + Y_{yx} + Z_{zx} = 0$.

Si osservi infine che si può scrivere l'analogia della (77):

$$\frac{-\Theta'}{P_{\xi r}} = \frac{3}{E_1} \left(1 - \frac{2}{m_1} \right) = \frac{3}{3\lambda_1 + 2\mu_1} \quad (77 \text{ bis})$$

Tale rapporto si può definire come *il coefficiente di compressibilità cubica cinetica — o viscosa*. —

Esso risulta infinito, per essere $E_1 = 0$ e $3\lambda_1 + 2\mu_1 = 0$.

Ciò è in armonia con la legge già riscontrata: essere la viscosità priva di effetto quando le γ'_{xy} ... sono tutte nulle e le ε'_{xx} ... sono uguali in tutte le direzioni.

Riepilogando e sovrapponendo gli effetti, possiamo affermare che nel fluido viscoso in moto alla *pressione p* sopra illustrata si sovrappongono le *pressioni supplementari dovute alla viscosità*, sicchè *complessivamente* si hanno le *componenti speciali normali*:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mathbf{p} - \lambda_1 \Theta' - 2\mu_1 \epsilon'_x \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned} \right\} \quad (77 \text{ ter})$$

e le *componenti speciali tangenziali* date dalle (74 bis).

D). EQUAZIONI DEL MOTO.

Da quanto precede si deduce che per trovare le equazioni del moto del fluido viscoso noi dobbiamo applicare le equazioni indefinite dell'equilibrio, sovrapponendo alle forze di massa le accelerazioni cambiate di segno:

$$-\frac{du'}{dt}, \quad -\frac{dv'}{dt}, \quad -\frac{dw'}{dt},$$

e tenendo conto delle pressioni interne totali espresse dalle (73 ter) e (74 bis).

Operando in modo del tutto analogo a quello seguito al N.º 28, pag. 86 e seguenti, per ricavare le (80), dopo facili riduzioni, si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} &= \rho \left(X - \frac{du'}{dt} \right) + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mu_1 \Delta_2 u' \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} &= \rho \left(Y - \frac{dv'}{dt} \right) + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \Theta'}{\partial y} + \mu_1 \Delta_2 v' \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} &= \rho \left(Z - \frac{dw'}{dt} \right) + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \Theta'}{\partial z} + \mu_1 \Delta_2 w' \end{aligned} \right\} \quad (80 \text{ bis})$$

(ove si deve ricordare che $\lambda_1 = -\frac{2}{3}\mu_1$ e quindi $\lambda_1 + \mu_1 = \frac{1}{3}\mu_1$), od anche, con le trasformazioni già operate al N.º 28, a pag. 87 ed 88:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} &= \rho \left(X - \frac{du'}{dt} \right) + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial \Theta'}{\partial x} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial q'}{\partial z} - \frac{\partial r'}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} &= \rho \left(Y - \frac{dv'}{dt} \right) + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial \Theta'}{\partial y} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial r'}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} &= \rho \left(Z - \frac{dw'}{dt} \right) + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial \Theta'}{\partial z} - 2\mu_1 \left(\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial q'}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (81 \text{ bis})$$

(ove $\lambda_1 + 2\mu_1 = \frac{4}{3}\mu_1$).

Si possono ora trovare le equazioni dell'equilibrio dinamico in superficie od ai limiti, con procedimento analogo a quello seguito a pag. 88 ed 89 per ricavare le (83).

Trattandosi di fluido, converrà qui parlare di pressioni sulla superficie limite, anzichè di tensioni, come si faceva per il solido elastico.

Diremo dunque L , M , N le componenti della pressione sulla superficie limite, (pressione che si può anche riguardare quale quella esercitata dal fluido in moto su eventuali pareti rigide, che lo contengano, limitandone la mobilità).

E poichè prendiamo qui come positiva la pressione, anzichè la tensione, come si faceva per il corpo elastico, nel brano citato delle pag. 88 ed 89, conviene pure invertire il senso positivo sulla normale n alla superficie limite: perciò qui assumeremo come positiva la normale n diretta verso l'interno della massa fluida considerata.

Con ciò, e tenute presenti le (73 ter) e (74 bis), mediante facili riduzioni, si ricava agevolmente:

$$\left. \begin{aligned} L - \mathbf{p} \frac{dx}{dn} + \lambda_1 (\ominus)' \frac{dx}{dn} + 2\mu_1 \left(\frac{du'}{dn} + r' \frac{dy}{dn} - q' \frac{dz}{dn} \right) &= 0 \\ M - \mathbf{p} \frac{dy}{dn} + \lambda_1 (\ominus)' \frac{dy}{dn} + 2\mu_1 \left(\frac{dv'}{dn} + p' \frac{dz}{dn} - r' \frac{dx}{dn} \right) &= 0 \\ N - \mathbf{p} \frac{dz}{dn} + \lambda_1 (\ominus)' \frac{dz}{dn} + 2\mu_1 \left(\frac{dw'}{dn} + q' \frac{dx}{dn} - p' \frac{dy}{dn} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (83 \text{ bis})$$

È opportuno osservare che i binomi: $\surd F$

$$L - \mathbf{p} \frac{dx}{dn} \quad ; \quad M - \mathbf{p} \frac{dy}{dn} \quad ; \quad N - \mathbf{p} \frac{dz}{dn} \quad ,$$

rappresentano le componenti della pressione supplementare (viscosa) provocata dalla viscosità sulla superficie limite: come verifica si riconosce dalle (83 bis), che tale pressione supplementare è nulla (come deve essere), quando manca la viscosità, cioè per $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

Si sa che nella idromeccanica si dice *fluido perfetto* un fluido non viscoso, cioè appunto nelle condizioni ora accennate.

Tale fluido perfetto non esiste in natura, ma costituisce una moda schematizzazione per i casi, in cui l'effetto della viscosità sia trascurabile.

Le (80 bis) o (81 bis) per $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ ci forniscono le equazioni del moto dei fluidi perfetti, le quali sono applicabili in via di approssima-

zione nel caso in cui la viscosità μ_1 sia molto piccola, ed anche nel caso di *moto lento*, cioè per piccoli valori delle velocità $u', \dots, \epsilon', \dots, \gamma', \dots$

Dalle (80 bis) risulta poi che un *moto irrotazionale*, — o *non vorticoso*, — (cioè per $p' = q' = r' = 0$) di un fluido pur viscoso, ma incompressibile, (o riguardabile come tale), per $\Theta' = 0$ (o piccolissimo), non viene influenzato dalla viscosità, e si svolge come se il fluido fosse perfetto. Questo risultato è molto utile per le semplificazioni che conseguente e perchè moltissimi moti, che s'incontrano nelle applicazioni, sono *irrotazionali*, in quanto *la velocità annette in potenziale*, (o — in altri termini — esiste un potenziale di velocità), mentre d'altra parte spesso la Θ' è nulla, o tale si può ritenere con grande approssimazione.

E). ENERGIA DISSIPATA PER LA VISCOSITÀ.

Con ragionamenti analoghi a quelli svolti nei N.º 29 e 31 a proposito del potenziale elastico, si può ora facilmente calcolare *la derivata rispetto al tempo dell'energia dissipata per unità di volume, per effetto della viscosità*.

Essa si può anche indicare come *la potenza dissipata nell'unità di volume per la viscosità*.

È infatti ovvio che il lavoro svolto durante il moto dalle *pressioni supplementari viscosose* (73 bis) e (74 bis) esercitate, contro una data particella di fluido, dalla massa circostante, deve rappresentare *lavoro dissipato*, (trasformato in calore), in quanto le pressioni supplementari viscosose sono funzioni dei valori istantanei delle *velocità* $\epsilon', \dots, \gamma', \dots$, cessano al cessare di queste, e perciò manca del tutto alla particella fluida la capacità di accumulare e successivamente restituire l'energia sviluppata da dette pressioni supplementari. In altri termini, le forze interne supplementari dovute alla viscosità sono *resistenze passive*, e come tali *debbono assorbire lavoro sviluppato da forze esterne* e **non possono mai compiere lavoro contro forze esterne**.

Conviene riferire detta energia all'unità di tempo ed all'unità dissipata per la viscosità; la indicheremo con Π_v .

Conforme ai ben noti concetti ed ai procedimenti già applicati p. es. al N.º 29, si trova ovviamente:

$$-\Pi_v = X_{\alpha\alpha} \epsilon'_{\alpha} + Y_{\beta\beta} \epsilon'_{\beta} + Z_{\gamma\gamma} \epsilon'_{\gamma} + Y_{\alpha\beta} \gamma'_{\alpha\beta} + X_{\beta\gamma} \gamma'_{\beta\gamma}.$$

Sostituendo qui i valori delle pressioni supplementari dati dalle (73 bis) e (74 bis), con facili riduzioni si trova infine:

$$\Pi_v = \lambda_1 \Theta'^2 + \mu_1 [2(\epsilon'^2_{\alpha} + \epsilon'^2_{\beta} + \epsilon'^2_{\gamma}) + \gamma'^2_{\alpha\beta} + \gamma'^2_{\beta\gamma}] \quad (97 \text{ bis})$$

espressione perfettamente analoga a quella (97), che ci dà il doppio del potenziale elastico per il solido elastico isotropo (N.º 31).

Ricordando che $\lambda_1 = -\frac{2}{3}\mu_1$, sostituendo e riducendo, si trova:

$$\Pi_v = \mu_1 \left| \frac{4}{3} (\epsilon'^2_{xx} + \epsilon'^2_{yy} + \epsilon'^2_{zz} - \epsilon'_{xx}\epsilon'_{yy} - \epsilon'_{yy}\epsilon'_{zz} - \epsilon'_{zz}\epsilon'_{xx}) + \gamma'^2_{xy} + \gamma'^2_{yz} + \gamma'^2_{zx} \right|$$

e ne risulta che la Π_v è sempre positiva per valori qualsiasi delle ϵ'_{xx} , ϵ'_{yy} , ϵ'_{zz} , e si annulla solo per $\gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0$ ed $\epsilon'_{xx} = \epsilon'_{yy} = \epsilon'_{zz} = \epsilon'_{xx}$, cioè quando le velocità di dilatazione sono uguali in tutte le direzioni; ciò conferma che in tal caso l'azione della viscosità è nulla, come già si è riconosciuto più sopra.

Dalla definizione stessa di Π_v risulta poi che il lavoro dissipato per la viscosità nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 , in una massa fluida racchiusa in una superficie S , comprendente un volume V , (S e V eventualmente variabili in funzione del tempo) è espressa da:

$$L_v = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \Pi_v dV.$$

Le formole ora ricavate possono essere utilissime per calcolare le *perdite di energia* nei moti di liquidi o di gas, che si devono studiare nei problemi tecnici.

N. B. I capitoli precedenti, con l'estensione allo studio del moto dei fluidi, secondo quanto è esposto nei N.ri 15 bis e 35, contengono al completo l'esposizione sistematica dei fondamentali della *meccanica dei corpi continui*.