

## CAPITOLO IV.

### L' EQUILIBRIO DEI SOLIDI ELASTICI

#### 24. LEGGE SPERIMENTALE DI HOOKE. PROPRIETÀ ELASTICHE DEI SOLIDI NATURALI.

Come già si disse, le nozioni esposte nei Capitoli II.<sup>o</sup> e III.<sup>o</sup> precedenti sono i fondamenti della *meccanica dei corpi continui*, e perciò valgono in generale per qualunque corpo continuo, solido, liquido o gassoso, elastico o no.

Ora dobbiamo, per gli scopi del nostro corso, intraprendere lo studio della *meccanica dei solidi elastici*, e perciò ora passiamo ad esporre le principali nozioni sulle proprietà elastiche dei solidi che s'incontrano in natura, con particolare riguardo ai materiali che più comunemente s'impiegano nelle applicazioni. Già al N.<sup>o</sup> 2, Cap. I.<sup>o</sup>, abbiamo dati brevi cenni generali sulla particolare proprietà dei solidi naturali, la quale prende il nome di elasticità, ed anche sulle deformazioni elastiche.

Dobbiamo ora precisare quei brevi cenni preliminari, introducendo delle considerazioni quantitative, e sviluppare in seguito la teoria dell'equilibrio dei solidi elastici, coll'ausilio delle analisi fatte nei due capitoli precedenti II.<sup>o</sup> e III.<sup>o</sup>, proponendoci di trovare le leggi di mutua interdipendenza tra le forze (o pressioni) e le deformazioni.

Della teoria suddetta esporremo i fondamenti generali, sviluppandone poi le conseguenze più semplici e più direttamente applicabili in questa disciplina, la quale ha fini essenzialmente tecnici e pratici.

A base della teoria matematica dell'elasticità sta un principio essenzialmente sperimentale, che fu enunciato dal fisico inglese Hooke fin dal 1660, e che perciò si chiama appunto *legge di Hooke*.

Essa si può enunciare come segue:

*Se in un solido elastico date forze esterne (in equilibrio) producono una deformazione piccolissima, la grandezza della deformazione stessa è proporzionale alla intensità delle forze che la producono.* Ciò risulta valevole per una qualunque porzione del solido elastico consi-

derato, e perciò, la legge stessa si può enunciare precisamente così:

*In un solido elastico soggetto a forze esterne che su esso si fanno equilibrio, le componenti di deformazione sono funzioni lineari omogenee delle componenti (p. es. speciali) di pressione.*

Salvo casi specialissimi che non hanno diretto interesse nelle applicazioni, (perchè si riferiscono a sistemi *solo parzialmente elastici*, e cioè comportantisi come rigidi rispetto a certi speciali sistemi di forze), il determinante dei coefficienti delle funzioni lineari omogenee sopradette è diverso da zero. Perciò risulta determinato il sistema di equazioni lineari che permette di ricavare le componenti (speciali) di pressione in funzione di date componenti di deformazione.

Quindi è pure vera la relazione inversa di quella sopra enunciata, e cioè:

*... le componenti (speciali) di pressione sono funzioni lineari omogenee delle componenti di deformazione.*

Questa legge è verificata sperimentalmente abbastanza bene finchè le pressioni o tensioni interne non superano certi valori limiti, diversi secondo i vari materiali, i quali si dicono limiti di proporzionalità; e di essi tratteremo più esplicitamente in séguito, quando esporremo le proprietà dei vari materiali impiegati nelle costruzioni.

A proposito della verifica sperimentale di questa legge, dobbiamo richiamare ciò che si disse al N.º 3, Cap. I.º, per avvertire esplicitamente che l'esperimento non può servire a verificare la legge nella sua generalità, ma soltanto a controllare la sua validità in alcuni casi semplici particolarissimi, come pure l'attendibilità dei risultati della teoria basata sulla legge stessa.

Esponendo la trattazione dei vari problemi particolari, avremo occasione di precisare le modalità delle verifiche sperimentali rispettive.

#### 25. CORPI ISOTROPI ED ANISOTROPI. MODULI DI ELASTICITÀ. ALTRE COSTANTI ELASTICHE.

Se un solido continuo presenta in ogni suo punto delle proprietà elastiche indipendenti dalla direzione degli elementi lineari o superficiali che in esso si considerano, si dice isotropo; si dice invece anisotropo in caso diverso.

Si possono riguardare come esattamente isotropi i metalli fusi o forgiati, e che abbiano subito un trattamento termico uniforme in tutta la massa; i vetri colati in analoghe condizioni; alcune rocce elastiche, ovvero vulcaniche non stratificate, ed in generale tutte le rocce compatte non presentanti struttura stratiforme.

Sono invece anisotropi i metalli laminati ovvero trafiletti, i legnami, le pietre stratificate; inoltre, in modo caratteristico, i solidi a struttura cristallina; infatti è noto dalla mineralogia e dalla fisica che i cristalli hanno, nelle varie direzioni dei loro assi, proprietà fisiche diverse, anche per ciò che riguarda il comportamento ottico, elettrico, magnetico ecc.

Però, in via di approssimazione, ben giustificata nei problemi pratici, tutti i vari materiali da costruzione, salvo casi eccezionali, si considerano, nelle applicazioni, come isotropi.

Perciò noi, avendo di mira gli scopi tecnici del libro, svilupperemo in modo completo lo studio dell'equilibrio dei soli corpi isotropi; avremo però occasione di dimostrare delle verità vevole in generale anche per i corpi non isotropi, e ciò sarà esplicitamente dichiarato.

Un esperimento di importanza fondamentale si fa quando una sbarra cilindrica o prismatica di un dato materiale viene assoggettata p. es. a trazione con una forza diretta secondo l'asse, mentre con misure accurate se ne rileva la deformazione.

In tal caso, sperimentalmente si trova che il coefficiente di dilatazione  $\epsilon$  longitudinale, cioè misurato lungo l'asse del cilindro o prisma (v. Cap. II N.º 6) è proporzionale alla tensione unitaria  $\sigma$ , riferita cioè all'unità di area della sezione trasversale, e ciò conferma, nel caso particolare la legge di Hooke; inoltre gli elementi lineari normali all'asse del prisma o cilindro subiscono un accorciamento od una contrazione; il relativo *coefficiente di contrazione lineare* (o *dilatazione negativa*), che si può indicare con  $\eta$ , risulta pure proporzionale a  $\sigma$ , e quindi anche proporzionale ad  $\epsilon$ .

Di modo che, sempre secondo l'esperimento, abbiamo:

$$\sigma = E\epsilon \quad (58)$$

$$\eta = \frac{\epsilon}{m} \quad (59)$$

essendo  $E$  ed  $m$  due coefficienti che restano gli stessi per uno stesso corpo isotropo, per deformazioni a temperatura costante, mentre poi variano da corpo a corpo.

La costante  $E$  si dice *modulo di elasticità*, od anche *modulo di Young*.

L'altra costante  $\frac{1}{m}$  si dice *rapporto di Poisson*.

Questi due coefficienti si dicono anche *costanti isoterme* del dato materiale.

Per alcune qualità di caucciù, e per vari corpi anisotropi si ha

$m < 0$ , ossia la dilatazione longitudinale è accompagnata pure da una dilatazione trasversale.

Dimostreremo più oltre che il rapporto di Poisson deve necessariamente essere compreso tra due limiti, e precisamente si deve avere:

$$-1 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2} \quad (60)$$

Alcuni studiosi, come lo stesso Poisson, ed il Navier ritenevano di aver dimostrato che per i corpi isotropi fosse necessariamente:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{4} \quad \text{ossia} \quad m = 4$$

Ma invece è ormai assodato che la teoria non fornisce per  $m$  altra condizione che la (60). D'altra parte gli esperimenti hanno fornito per  $m$  dei valori sensibilmente diversi da 4, anche per corpi isotropi.

È bene però notare che l'esperimento è in questo caso poco probativo, non tanto per le difficoltà strumentali per la misura della contrazione  $\eta$ , assai piccola, quanto per la difficoltà di avere corpi perfettamente isotropi, ed anche perchè la tensione in un'unica direzione ha per effetto che il corpo caricato cessa di essere isotropo (come dimostrano alcune altre alterazioni del suo stato fisico: p. es. vedremo in seguito che i corpi trasparenti non cristallizzati } amorfi {, come il vetro fuso e simili, mentre sono monorifrangenti, quando non sono soggetti a tensioni interne, diventano invece *birifrangenti* sotto l'azione di sforzi; anzi coll'occasione dobbiamo avvertire che su tale proprietà è basata una misura ottica delle tensioni interne nel solido trasparente, misura che si fa studiando il comportamento del solido stesso rispetto alla luce polarizzata: su ciò avremo occasione di ritornare, parlando poi delle misure e ricerche sperimentali).

Per alcuni metalli il Bach aveva trovato sperimentalmente:

$$m = \frac{10}{3} \approx 3,3333 \dots$$

Per i vari materiali da costruzione più comuni è invalso l'uso di ritenere:

$$m = 4,$$

valore sufficientemente approssimato per gli scopi pratici.



Nei calcoli che seguiranno, riuscirà comodo adoperare altre due costanti, funzioni di  $E$  e di  $m$ ; esse furono introdotte dal Lamé, e si chiamano appunto rispettivamente *la prima e la seconda costante di Lamé*; sono espresse come segue:

$$\lambda = \frac{E}{m \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right)} \quad (61)$$

$$\mu = \frac{E}{2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = G \quad (62)$$

La seconda costante,  $\mu$ , per ragioni che vedremo in séguito, si chiama anche *modulo di elasticità tangenziale o trasversale*, e nelle formule usate nelle applicazioni tecniche si suole indicare pure colla lettera  $G$ . Vedremo poi che essa è nulla nei fluidi perfetti (non viscosi); per questa ragione Lord Kelvin aveva proposto per essa la denominazione di *modulo di rigidità*.

## 26. IL PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

Dall'ipotesi che le deformazioni siano piccolissime, ed insieme dalla legge di Hooke risulta come conseguenza immediata un principio di importanza fondamentale per le applicazioni; il così detto *principio della sovrapposizione degli effetti*, il quale si può enunciare come segue:

*Qualora le deformazioni di un solido elastico si mantengano piccolissime e proporzionali alle forze che le producono, se sul solido agiscono successivamente più sistemi di forze esterne, gli effetti, — sforzi interni, o deformazioni — dovuti ai vari sistemi parziali di forze, si sovrappongono senza mutuamente influenzarsi, di modo che i loro parametri omologhi — componenti speciali di pressione, o componenti di deformazione — si sommano algebricamente.*

Ciò si giustifica osservando che, se le deformazioni sono piccolissime, esse non possono (salvo casi specialissimi) alterare sensibilmente la forma geometrica del solido, e perciò neppure la configurazione delle rette d'azione delle forze di altri sistemi successivamente applicati; sicchè nuove forze agenti su un solido già deformato, provocano in esso degli incrementi di reazioni e di tensioni interne, uguali alle reazioni ed alle tensioni ch'esse provocherebbero nel solido ancora non deformato. D'altra parte le deformazioni piccolissime

*La sovrapposizione delle deformazioni si applica anche al caso di un corpo elastico che viene deformato successivamente da più sistemi di forze esterne (18).*

pure si sovrappongono linearmente, come insegna la cinematica dei piccoli spostamenti. E perciò, finchè è valida la legge di Hooke, si può affermare che sovrapponendo le deformazioni (p. es. sommandone algebricamente le componenti) prodotte da due o più sistemi di forze, si ottiene la stessa deformazione che si otterrebbe facendo agire sul solido elastico il sistema di forze complessivo, risultante dei sistemi parziali.

Il principio sopra enunciato rimane così giustificato ed i concetti che ci hanno servito a dimostrarlo, ci servono pure a stabilire quali siano i casi di eccezione, in cui il principio stesso non è applicabile. Infatti, da quanto precede risulta che l'applicazione del principio suddetto non è più lecita quando le deformazioni non siano piccolissime, ovvero quando esse comunque possano alterare in modo apprezzabile la configurazione delle linee d'azione delle forze esterne applicate al solido elastico, ed anche quando la natura del materiale non consenta di ritenere valida la legge di Hooke, ed in altri termini, quando il modulo di elasticità del materiale non si possa ritenere costante, ma si debba riguardare come una funzione delle tensioni o delle deformazioni,

I casi di eccezione però, per quanto interessa i nostri studi tecnici, sono rarissimi, e noi li indicheremo e studieremo esplicitamente volta a volta.

Nella grande maggioranza dei casi concreti, in cui invece il principio della sovrapposizione degli effetti è applicabile, esso rende segnalati servizi, soprattutto col consentire di utilizzare direttamente i risultati di problemi semplici, per lo studio di problemi più complessi, e col facilitare l'analisi degli sforzi, delle deformazioni e delle relazioni loro di interdipendenza.

## 27. RELAZIONI TRA LE PRESSIONI (O LE TENSIONI) E LE DEFORMAZIONI IN UN SOLIDO ELASTICO ISOTROPO.

Evidenti ragioni di simmetria dimostrano, e l'esperimento conferma che un prisma retto di materiale isotropo soggetto a pressione o tensione normale uniforme sulle due basi subisce delle contrazioni o dilatazioni nella direzione dell'asse e nelle direzioni a questa normali, mentre in esso non si verificano scorrimenti mutui (v. Cap. II, N.º 6) tra la direzione dell'asse stesso, e le direzioni ora dette ad essa perpendicolari; ossia il prisma, dopo deformato, si conserva retto.

Per conseguenza un parallelepipedo rettangolo isotropo soggetto solo a pressioni o tensioni normali uniformi sulle varie faccie, dopo deformato è ancora un parallelepipedo rettangolo, essendo nulli gli scorrimenti mutui delle direzioni degli spigoli.

Si noti invece che se il parallelepipedo non è isotropo gli scor-

rimenti mutui ora detti non sono in generale nulli ed il parallelepipedo deformato cessa di essere rettangolo.

Ora nell'intorno di un punto generico  $M$  in un solido elastico continuo isotropo, soggetto a forze in equilibrio, consideriamo un parallelepipedo rettangolo elementare avente gli spigoli rispettivamente paralleli alle direzioni delle pressioni principali in  $M$ . (v. N.º 21).

Per quanto si disse sopra, il parallelepipedo si deforma restando ancora rettangolo, sicchè, presi come assi  $\xi \eta \zeta$  le tre rette principali delle pressioni in  $M$ , la deformazione elastica risulta determinata dalle tre dilatazioni unitarie  $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$ , diverse da zero, mentre sono nulli i tre scorrimenti mutui  $\gamma_{\eta\xi}, \gamma_{\xi\eta}, \gamma_{\xi\zeta}, \gamma_{\zeta\xi}$ ; ciò dimostra che gli assi  $\xi \eta \zeta$  sono pure assi principali della deformazione (v. N.º 9).

Perciò: *in ogni punto di un solido elastico isotropo le rette principali della deformazione coincidono sempre colle rette principali di pressione.*

Questa proprietà è caratteristica per il solido isotropo e potrebbe servire a definirlo.

Nei corpi anisotropi invece questa proprietà non sussiste; in generale — esclusi cioè casi eccezionali particolarissimi, — i tre assi principali di deformazione *non* coincidono con gli assi principali di pressione.

Noi, in questo libro dobbiamo limitarci allo studio dei corpi isotropi e perciò non investighiamo più oltre il caso dei solidi non isotropi, rimandando per tale argomento ai trattati speciali di teoria generale dell'elasticità, come pure ai particolari lavori teorici e sperimentali sulle proprietà elastiche dei cristalli ed in genere sulla cristallografia fisica.

La già citata coincidenza — per il corpo isotropo, — degli assi principali di deformazione con quelli principali di tensione, ci permette — per evidenti ragioni di simmetria, in parte già illustrati, — di affermare che le componenti speciali normali di pressione  $X_x, Y_y, Z_z$  nel caso dell'isotropia provocano soltanto dilatazioni secondo i tre assi, cioè  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ . D'altra parte le dilatazioni devono essere funzioni solo delle pressioni normali  $X_x, Y_y, Z_z$  e *non* delle componenti tangenziali  $Y_z, Z_x, X_y$ ; ~~mentre~~ queste ultime producono solo scorrimenti  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ , i quali viceversa possono essere provocati solo dalle pressioni tangenziali sopra dette.

Anzi è facile verificare che ciascuna componente tangenziale provoca solo, ed essa sola, la corrispondente componente di scorrimento. Ciò risulta ovviamente da ragioni di simmetria, che qui vogliamo precisare.

Considerato il solito parallelepipedo trirettangolo con gli spigoli rispettivamente paralleli agli assi coordinati  $x y z$ , supponiamo che tra le componenti speciali di pressione sia diversa da zero solo la  $Y_z$ .

In tale ipotesi poichè la  $Y_z$  risulta simmetrica di se stessa rispetto alla giacitura del piano  $y z$ , per l'isotropia del solido lo scorrimento relativo delle facce del parallelepipedo sollecitate dalla  $Y_z$  deve pure risultare simmetrico di se stesso rispetto al piano  $yz$ , e perciò deve essere parallelo allo stesso piano: ne consegue che la sola componente di deformazione provocata dalla  $Y_z$  deve essere la  $\gamma_{yz}$ ; lo stesso si può ripetere per le altre componenti tangenziali; e ciò dimostra quanto si è poco sopra affermato.

Ciò posto, applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, (N.º 26), sommando i contributi che ad ogni componente di deformazione portano le varie componenti speciali di pressione.

Ricordiamo che le dilatazioni  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  devono essere funzioni soltanto delle componenti speciali normali  $X_x, Y_y, Z_z$ .

Nella direzione dell'asse  $x$ , per effetto della pressione  $X_x$  si ha una dilatazione:

$$-\frac{X_x}{E}$$

e per effetto delle  $Y_y$  e  $Z_z$  rispettivamente le dilatazioni:

$$\frac{Y_y}{mE} \quad \text{e} \quad \frac{Z_z}{mE}$$

Sommando questi contributi si trova complessivamente la dilatazione secondo l'asse  $x$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{m} (Y_y + Z_z) - X_x \right]$$

ed operando analogamente per gli altri assi:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{m} (Z_z + X_x) - Y_y \right] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{m} (X_x + Y_y) - Z_z \right] \end{aligned} \tag{68}$$

Indichiamo ora con  $P$  l'invariante fondamentale lineare di pressione [v. (56) N.° 21], cioè poniamo:

$$P = X_x + Y_y + Z_z \quad (69)$$

D'altra parte ricordiamo l'espressione della dilatazione cubica  $\Theta$  [v. (27) N.° 11], che costituisce l'invariante fondamentale lineare di deformazione [v. (26) N.° 10].  $\lambda$

Ciò posto, sommando membro a membro le (68) si ottiene:

$$\Theta = -\frac{P}{E} \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \quad (70)$$

Tenuta presente la (69), le relazioni (68) si trasformano agevolmente come segue:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \frac{P}{m} - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) X_x \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \frac{P}{m} - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) Y_y \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \frac{P}{m} - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) Z_z \right] \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Cerchiamo ora le espressioni delle componenti di scorrimento  $\gamma$ . Supponiamo che esista solo la componente di pressione tangenziale  $Y_z$ ; per quanto si vide poco sopra, in tal caso l'unica componente di deformazione diversa da zero è la  $\gamma_{yz}$ .

Consideriamo ora due direzioni  $n$  ed  $n'$  tra loro ortogonali, ed entrambe parallele al piano  $yz$ ; i coseni direttori di  $n$  siano rispettivamente  $0$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$ ; quelli di  $n'$  saranno ordinatamente:  $0$ ,  $\alpha_z$ ,  $-\alpha_y$ . Chiamiamo  $N_n$  ed  $N_{n'}$  le componenti normali di pressione sugli elementi superficiali perpendicolari rispettivamente alle due direzioni  $n$  ed  $n'$ .

Se applichiamo la (39) (v. N.° 19), troviamo:

$$N_n = -N_{n'} = 2Y_z \alpha_y \alpha_z$$

Osserviamo ora che, rispetto alla terna ortogonale  $x$ ,  $n$ ,  $n'$ , le

componenti speciali normali sono ordinatamente: 0,  $N_n$ ,  $N_n'$  e perciò applicando a tali assi le ultime due delle (68), si ottiene:

$$\varepsilon_n = -\varepsilon_n' = -\frac{-2Y_z}{E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha_y \alpha_z$$

D'altra parte la  $\varepsilon_n$  si può esprimere in funzione di  $\gamma_{yz}$  mediante la (11) (v. n.º 6), e si trova:

$$\varepsilon_n = -\varepsilon_n' = \gamma_{yz} \alpha_y \alpha_z$$

Uguagliando le due ultime espressioni di  $\varepsilon_n$  e sopprimendo il fattore comune  $\alpha_y \alpha_z$  si ottiene:

$$\gamma_{yz} = -Y_z \cdot \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

e richiamando l'espressione della seconda costante di Lamé (62), (v. N.º 25), si ha infine:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= -\frac{Y_z}{\mu} \\ \gamma_{zx} &= -\frac{Z_x}{\mu} \quad ; \quad \gamma_{xy} = -\frac{X_y}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

In modo analogo per gli altri due assi abbiamo:

$$P_1 = 0 \quad ; \quad P_2 = Y_z \quad ; \quad P_3 = -Y_z$$

[A proposito di questa dimostrazione può essere istruttivo osservare che nel caso in cui la sola componente speciale di pressione non nulla sia la  $Y_z$ , se ricerchiamo le pressioni principali e le rispettive direzioni nel modo indicato al n.º 21, troviamo come radici della equazione cubica (56):

$$P(-\lambda^2 + Y_z) = 0$$

(pressioni principali), e le direzioni corrispondenti ordinatamente risultano: l'asse delle  $x$ , e le due bisettrici della coppia di assi  $yz$ ].

Riassumendo, constatiamo che le (71) e (72) tenuta presente la (69) esprimono le componenti di deformazione come funzioni lineari ed omogenee delle componenti speciali di pressione.

Inversamente, quando siano date le componenti di deformazione  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$  le (71) e (72) costituiscono un sistema di equazioni lineari nelle componenti speciali di pressione, dal quale queste si possono ricavare.

Si deve però notare che le (72) si risolvono separatamente in modo immediato.

Per risolvere invece il sistema formato dalle (71) può essere opportuno un semplicissimo artificio di eliminazione.

Dalle (61) e (62) (v. N.º 25) che definiscono le due costanti di Lamé, si riconosce facilmente che:

$$1 + \frac{2\mu}{\lambda} = m - 1$$

Ciò posto, moltiplichiamo il primo membro della prima delle (71) per  $1 + \frac{2\mu}{\lambda}$  ed il secondo membro della stessa per la quantità uguale  $m-1$ ; poi sommiamo membro a membro questa equazione così trasformata, colle altre due delle (71) inalterate; tenendo presente le (26) e (61) si trova in tal modo:

$$\boxed{X_x = -\lambda\Theta - 2\mu\epsilon_x}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_y &= -\lambda\Theta - 2\mu\epsilon_y \\ Z_z &= -\lambda\Theta - 2\mu\epsilon_z \end{aligned} \right\} (73)$$

ed operando analogamente per gli altri assi, ovvero permutando gli indici, si ha pure:

$$\begin{aligned} Y_y &= -\lambda\Theta - 2\mu\epsilon_y \\ Z_z &= -\lambda\Theta - 2\mu\epsilon_z \end{aligned}$$

È opportuno rilevare come le (73) si possano ricavare in altro modo, calcolando le pressioni capaci di introdurre *una alla volta separatamente* le dilatazioni  $\epsilon$  e poi sommando algebricamente le componenti speciali relative ad ogni singolo asse, dovute alle varie  $\epsilon$ , sovrapponendo così gli effetti.

Se deve esistere la sola  $\epsilon_x$ , dovendo essere  $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$ , dalle ultime due delle (68) si ricava:  $\left. \begin{aligned} \dots \\ \dots \end{aligned} \right\} \epsilon_x$

$$Y_y = Z_z = \frac{X_x}{m-1} ;$$

sostituendo poi nella prima delle stesse (68), dopo facili riduzioni, tenuto delle (61) e (62), nonché della espressione di  $m-1$  in funzione

di  $\lambda$  e  $\mu$  poco sopra riportata, e ricavando i valori delle pressioni, si ottiene :

$$X_x = -(\lambda + 2\mu) \varepsilon_x \qquad Y_y = Z_z = -\lambda \varepsilon_x.$$

Indi permutando circolarmente, si trova :

se  $\varepsilon_y \neq 0$  e  $\varepsilon_z = \varepsilon_x = 0$ , deve essere :

$$Y_y = -(\lambda + 2\mu) \varepsilon_y \qquad Z_z = X_x = -\lambda \varepsilon_y \quad ;$$

se  $\varepsilon_x \neq 0$  e  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ , deve essere :

$$Z_z = -(\lambda + 2\mu) \varepsilon_z \qquad X_x = Y_y = -\lambda \varepsilon_z \quad .$$

Sommando poi i contributi di pressione (componenti speciali) relativi ad ogni singolo asse, si ottengono le (73).

Inoltre le (72), risolte separatamente ci danno :

$$Y_z = -\mu \gamma_{yz} \quad ; \quad Z_x = -\mu \gamma_{zx} \quad ; \quad X_y = -\mu \gamma_{xy} \quad (74)$$

*Queste relazioni (73) e (74) ci esprimono le componenti speciali di pressione come funzioni lineari omogenee delle componenti di deformazione.*

Si noti l'analoga e simmetria della forma di queste espressioni con quella delle (71) e (72).

Si suole poi dire brevemente che le (71) e (72) servono per passare dagli sforzi alle deformazioni, mentre inversamente le (73) e (74) servono per passare dalle deformazioni agli sforzi.

Le (73) e (74) forniscono poi delle ovvie ed evidenti interpretazioni del significato fisico e meccanico delle due costanti di Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ .

Dalle (73) la prima costante  $\lambda$  si rivela come il rapporto tra la pressione normale in una direzione e la contrazione cubica, quando la dilatazione lineare nella stessa direzione è nulla.

Le (74) ci spiegano la ragione che ha indotto ad attribuire alla seconda costante  $\mu$  la denominazione di *modulo di elasticità tangenziale o trasversale*, introdotta in fine del n.º 75. Infatti la  $\mu$  risulta appunto il rapporto tra la pressione tangenziale su un elemento e lo scorrimento da essa provocato.

I segni negativi a secondo membro delle (73) indicano che, se



le  $X_x, Y_y, Z_z$ , le quali sono componenti di *pressione*, sono positive, le  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  risultano negative, ed in conseguenza pure negativa riesce la dilatazione cubica, come deve essere.

Infine il segno negativo a secondo membro delle (74) si può giustificare verificando direttamente sul parallelepipedo elementare sopra descritto che se per es. la *pressione*  $Y_z$  è positiva, essa produce un aumento positivo dell'angolo compreso tra le direzioni positive  $yz$  (facendo diventare ottuso tale angolo); e d'altra parte dobbiamo ricordare che nel N.º 6, Cap. II, a pag. 19 abbiamo convenuto di assumere positivo lo scorrimento mutuo di due direzioni  $yz$ , quando esso costituisce una *diminuzione* dell'angolo compreso tra le stesse due direzioni positive.

Per maggiore chiarezza è opportuno rilevare qui come il segno delle pressioni normali e delle dilatazioni e non dipende dai versi positivi assunti sugli assi coordinati, mentre invece il segno delle pressioni tangenziali e degli scorrimenti  $\gamma$  dipende dai detti versi positivi; i segni di due componenti omologhe di pressione tangenziale e di scorrimento cambiano entrambi se s'inverte il verso assunto come positivo su uno degli assi corrispondenti.

Riprendiamo ora a considerare la (70), ed osserviamo che l'esperimento dimostra come, se le tre pressioni principali  $P_x, P_y, P_z$  sono tutte positive, (ossia se il parallelepipedo elementare sopradescritto è compresso in tutte e tre le direzioni principali), la dilatazione cubica  $\Theta$  deve risultare negativa. Perciò dalla (70) si deduce:

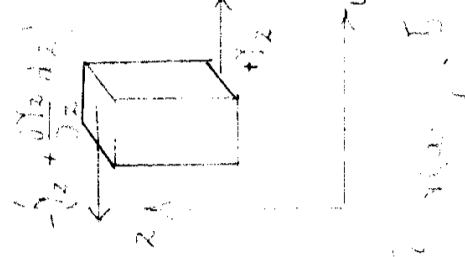
$$1 - \frac{2}{m} > 0;$$

ossia:

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{2} \quad (75)$$

Inoltre abbiamo poco più sopra riconosciuto che se una delle pressioni tangenziali, per es.  $Y_x$ , è negativa, il corrispondente scorrimento, nell'esempio  $\gamma_{yx}$ , è positivo: perciò dalle (72) o (74) si ricava che  $\mu$  deve essere essenzialmente positivo, e quindi, considerando anche la (62), se ne conclude:

$$1 + \frac{1}{m} > 0$$



ossia:

$$\frac{1}{m} > -1 \quad (76)$$

Le (75) e (76) giustificano la doppia disuguaglianza (60), che le compendia, e che era stata semplicemente enunciata al N.º 25.

Se in particolare le pressioni principali sono tutte e tre uguali,  $P_x = P_y = P_z$ , sappiamo già dal N.º 21 che allora su qualunque elemento piano la pressione assume lo stesso valore  $P_x = \dots$ ; il quale si chiama perciò la pressione uniforme nel punto  $M$  considerato. In tal caso il rapporto tra la contrazione cubica  $-\Theta$ , e la pressione uniforme, che la produce, viene espresso da:

$$\frac{-\Theta}{P_x} = \frac{3}{E} \left( 1 - \frac{2}{m} \right) = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \quad (77)$$

tale rapporto si chiama coefficiente di compressibilità cubica. X

## 28. LE EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO DEI SOLIDI ELASTICI ISOTROPI.

Le equazioni che ora vogliamo ricavare sono relazioni che legano le forze esterne superficiali e di massa, colle componenti di deformazione ed anche cogli spostamenti provocati nel solido elastico che si studia; esse possono servire ad individuare la deformazione, quando siano date le forze suddette, e pure dati gli spostamenti dei punti della superficie esterna del solido. Qualora si siano ricavate le componenti di deformazione, mediante le (73) e (74) si possono dedurre le componenti speciali di pressione in ogni punto del corpo.

Possiamo partire dalle equazioni indefinite per l'equilibrio (36), p. 54, ricavate al N.º 18, Cap. IIIº, per un corpo continuo qualunque.

In esse dobbiamo esprimere le  $X_x \dots Y_z \dots$  in funzione delle  $\epsilon_x \dots \gamma_y \dots$ , secondo le (73) e (74). Con tale sostituzione si ricava dapprima:

$$\rho X + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \left( 2 \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (78)$$

e due analoghe.

Ora le componenti di deformazione si possono esprimere in funzione delle componenti di spostamento  $u, v, w$ , secondo le (10) stabilite al N.º 6, Cap. II.

Sostituendo i valori dati dalle (10) si trova:

$$\rho X + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (79)$$

e due analoghe.

Ricordiamo ora che nell'analisi, quando è data una funzione  $F$  delle  $xyz$ , si suole porre:

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

ossia brevemente, indicando i soli simboli operatori:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ciò posto, eseguendo le derivate indicate nelle (79), dopo ovvie riduzioni si trova:

$$\left. \begin{aligned} \rho X + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u &= 0 \\ \rho Y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta_2 v &= 0 \\ \rho Z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta_2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Queste costituiscono una prima forma delle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico, e sono equazioni differenziali di secondo ordine, lineari, nelle componenti di spostamento  $u, v, w$ .

(Si tenga presente l'espressione nota di  $\Theta$  mediante le stesse  $u, v, w$ ).

Tali equazioni si possono pure mettere sotto un'altra forma.

Riprendiamo a considerare le componenti  $p, q, r$  della rotazione rigida della particella elementare generica deformata; esse sono definite dalle (18), al N.º 9, Cap. II. §. 46

Appunto dalle (18) si ricava immediatamente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0;$$

ed inoltre, tenendo presenti le (10) e la (27), si trova:

$$2 \left( \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \Delta_x u$$

e due analoghe.

Con queste relazioni, per sostituzione, e dopo ovvie riduzioni le (80) si trasformano agevolmente come segue:

$$\left. \begin{aligned} \rho X + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \left( \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} \right) &= 0 \\ \rho Y + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + 2\mu \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 0 \\ \rho Z + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + 2\mu \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Queste sono equazioni differenziali lineari di primo ordine nelle componenti della rotazione e nella dilatazione cubica.

Ora le relazioni (35) esprimenti il Teorema di Cauchy, dimostrato al N.º 17, Cap. III ci forniscono le equazioni dell'equilibrio elastico in superficie, dette anche brevemente equazioni ai limiti.

A mezzo di esse si mettono in relazione le forze esterne superficiali con gli spostamenti elastici pure in superficie, ossia con i valori che sulla superficie esterna devono assumere le  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , funzioni delle coordinate  $xyz$ , definite nell'interno del solido, ed ivi assoggettate alle condizioni (80) od (81).

Indichiamo con  $L$ ,  $M$ ,  $N$  le componenti della tensione, (riferita all'unità di area) su un elemento generico della superficie esterna del solido. (Diciamo tensione, e perciò l'assumiamo positiva se diretta verso l'esterno del solido). Sia  $n$  la normale allo stesso elemento superficiale generico, positiva verso l'esterno; i coseni di direzione di questa normale, si potranno — colle notazioni in uso nella geometria differenziale — indicare con:

$$\frac{dx}{dn} \quad ; \quad \frac{dy}{dn} \quad ; \quad \frac{dz}{dn} \quad .$$

Ciò posto, le citate equazioni di Cauchy (35) diventano :

$$\left. \begin{aligned} L &= X_x \frac{dx}{dn} + X_y \frac{dy}{dn} + X_z \frac{dz}{dn} \\ M &= Y_x \frac{dx}{dn} + Y_y \frac{dy}{dn} + Y_z \frac{dz}{dn} \\ N &= Z_x \frac{dx}{dn} + Z_y \frac{dy}{dn} + Z_z \frac{dz}{dn} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Esprimendo pure qui le componenti speciali di pressione in funzione delle componenti di deformazione, mediante le (73) e (74), e tenendo presenti le (10) si ottiene :

$$\begin{aligned} 0 &= L + \lambda \Theta \frac{dx}{dn} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{dy}{dn} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{dz}{dn} \end{aligned}$$

e due analoghe.

La relazione precedente, con ovvi artifici può essere trasformata come segue :

$$\begin{aligned} 0 &= L + \lambda \Theta \frac{dx}{dn} + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn} \right) + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{dy}{dn} + \mu \left( -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{dz}{dn} \end{aligned}$$

e due analoghe.

Di qui, ricordando le (18), del N.º 9, e poi trasformando per analogia, con le solite permutazioni circolari dei simboli relativi ai tre assi si ottiene :

$$\left. \begin{aligned} L + \lambda \Theta \frac{dx}{dn} + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + r \frac{dy}{dn} - q \frac{dz}{dn} \right) &= 0 \\ M + \lambda \Theta \frac{dy}{dn} + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{dz}{dn} - r \frac{dx}{dn} \right) &= 0 \\ N + \lambda \Theta \frac{dz}{dn} + 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + q \frac{dx}{dn} - p \frac{dy}{dn} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Queste sono, sotto una prima forma, le equazioni di equilibrio elastico in superficie, od ai limiti, e s'intende che i vari parametri in esse indicati, devono assumere nelle stesse equazioni i loro valori nei punti della superficie esterna del solido.

Esse si possono mettere pure sotto un'altra forma. La relazione precedente le (83) si può pure scrivere come segue :

$$L + \lambda \Theta \frac{dx}{dn} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dn} \right) + \\ + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dz}{dn} \right) = 0$$

(e sussistono pure le due analoghe).

Ora a primo membro si può aggiungere e togliere il termine :  $\mu \Theta \frac{dx}{dn}$ , ricordando l'espressione ben nota della  $\Theta$ ; allora riducendo, e quindi trasformando colle sòlite permutazioni circolari, si ottiene infine :

$$\left. \begin{aligned} & L + (\lambda + \mu) \Theta \frac{dx}{dn} + \mu \frac{du}{dn} + \\ & + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dx}{dn} \right) + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dz}{dn} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dx}{dn} \right) = 0 \\ & M + (\lambda + \mu) \Theta \frac{dy}{dn} + \mu \frac{dv}{dn} + \\ & + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dz}{dn} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dy}{dn} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{dn} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{dn} \right) = 0 \\ & N + (\lambda + \mu) \Theta \frac{dz}{dn} + \mu \frac{dw}{dn} + \\ & + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dz}{dn} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dz}{dn} \right) + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dz}{dn} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Queste sono dunque le equazioni ai limiti sotto una seconda forma: anche qui osserviamo che in esse si devono intendere sostituiti i valori, che i vari parametri assumono in superficie.

Le equazioni da (80) a (84) erano state ricavate da Navier, Lamé, Poisson, che le avevano dedotte dalla così detta *ipotesi molecolare*,

spiegando cioè le tensioni interne come forze attrattive o repulsive delle molecole del solido, funzioni delle mutue distanze.

Però le dimostrazioni qui sopra esposte, indipendenti da qualsiasi teoria molecolare, sono dovute a Cauchy.

Deriviamo ora le (80) ordinatamente rispetto ad  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e sommiamo poi membro a membro; così si ottiene:

$$\rho \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \Delta_2 \Theta = 0 \quad (85)$$

Se invece deriviamo la terza delle (80) rispetto ad  $y$ , la seconda rispetto a  $z$ , poi sottraendo otteniamo:

$$\rho \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + 2\mu \Delta_2 p = 0 \quad (86)$$

ed in simil modo se ne ricavano due analoghe.

Per le applicazioni è particolarmente interessante, — come vedremo tra breve, — il caso in cui *siano nulle tutte le forze di massa*; allora dalle (85) ed (86) si ricava:

$$\Delta_2 \Theta = \Delta_2 p = \Delta_2 q = \Delta_2 r = 0 ; \quad (87)$$

e ciò esprime che le funzioni  $\Theta$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , sono armoniche.

(Ricordiamo che nell'analisi si dice che una funzione  $F$  di  $x y z$  è armonica quando essa soddisfa all'equazione differenziale  $\Delta_2 F = 0$ , la quale si chiama l'equazione di Laplace).

Ma dalle (80) risulta:

$$(\lambda + \mu) \Delta_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta_4 u = 0$$

e due analoghe.

(Ricordando che nell'analisi si pone  $\Delta_4 u = \Delta_2(\Delta_2 u)$ , e che si chiama *biarmonica* una funzione  $F$  delle  $x y z$  la quale soddisfa all'equazione differenziale  $\Delta_4 F = 0$ ).

Dalle ultime e dalla (87) si ricava, (sempre per forze di massa nulle):

$$\Delta_4 u = \Delta_4 v = \Delta_4 w = 0 \quad (88)$$

e ciò dimostra che le componenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , di spostamento sono funzioni biarmoniche.

Abbiamo dunque trovato nelle equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti, trasformate col passare, per i punti interni del solido, dagli sforzi alle deformazioni, delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine, che devono essere soddisfatte dalle componenti di spostamento, o da quelle di deformazione, o da altri parametri della deformazione (come  $\Theta$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ), in tutti i punti del solido.

La risoluzione di tali equazioni differenziali può servire a determinare completamente la deformazione quando siano date le forze di massa, ed in superficie si conoscano le forze, o gli spostamenti, o parte delle forze e parte degli spostamenti. Tale risoluzione presenta in generale difficoltà analitiche notevolissime, finora superate solo in alcuni casi particolari assai semplici. Tuttavia si può dimostrare che una soluzione del problema esiste sempre.

Senza riprodurre qui tale dimostrazione, per la quale rimandiamo ai trattati speciali sulla teoria matematica dell'elasticità, possiamo osservare che l'esistenza di una tale soluzione costituisce una realtà fisica intuitiva sulla quale può essere superfluo soffermarsi, poichè essa è assai evidente, ed è pienamente confermata dall'esperimento.

Infatti si consideri un solido elastico, la cui superficie esterna sia assoggettata ad un determinato spostamento  $u$   $v$   $w$  piccolissimo e continuo, e nel quale agiscano forze superficiali e di massa di intensità non eccessive, in modo che il materiale non sia snervato e non assuma deformazioni permanenti, nè cessi di essere elastico, allora è ovvio ammettere conformemente ai dati dell'esperimento, che il solido assuma una deformazione compatibile colle condizioni geometriche imposte alla superficie esterna, ed inoltre tale che le tensioni o pressioni interne ad essa corrispondenti facciano equilibrio alle forze esterne, di massa o superficiali.

Anzi l'intuizione ci fa ritenere, e l'esperimento conferma, che la soluzione deve essere unica, ossia che esiste un'unica e determinata deformazione che il solido elastico può assumere per restare in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne e con spostamenti in superficie pure dati. Ma ammessa, (in base a quanto si disse sopra), l'esistenza della soluzione, la sua *unicità* si può dimostrare facilmente nel modo che esporremo poco più innanzi.

#### 29. POTENZIALE DI ELASTICITÀ. LAVORO DI DEFORMAZIONE.

Vogliamo ora esporre i fondamenti di una teoria assai elegante, del tutto confermata dall'esperimento, con la quale si deducono alcune importanti leggi dell'elasticità mediante il concetto di *potenziale*, ri-



connettendo le leggi stesse coi principii fondamentali della termodinamica.

È noto dalla meccanica razionale, e da vari rami della fisica il significato del concetto di *potenziale*, cioè di energia accumulata in forma potenziale, costituente una *capacità di compiere lavoro*.

Il primo che introdusse il concetto di *potenziale di elasticità* o *potenziale elastico* fu il Green, il quale fin dal 1837 ammise, senza dimostrazione di sorta, l'esistenza del detto potenziale e ne dedusse molte notevoli conseguenze.

Più tardi, nel 1855 Lord Kelvin dimostrò per il primo l'esistenza del potenziale elastico, nel caso in cui il solido elastico venga deformato a temperatura costante, oppure in cui alla fine della deformazione non vi sia da parte di esso, nè acquisto, nè perdita di calore.

Supponiamo che il solido elastico si trovi inizialmente nel suo stato naturale, senza deformazioni nè tensioni interne indipendenti da forze esterne, e partendo da tale stato iniziale, immaginiamo che esso venga deformato da forze esterne, la cui intensità cresce gradualmente e così lentamente da evitare nelle varie parti del solido delle accelerazioni e velocità sensibili, e perciò in modo da escludere la produzione di vibrazioni od oscillazioni: ciò si può enunciare dicendo che le forze esterne devono avere puramente un'*azione statica*, escludendo quindi le forze d'inerzia e le sollecitazioni dinamiche. Inoltre supponiamo che per tutta la durata del fenomeno la temperatura del corpo resti costante.

Immaginiamo ora che il corpo dopo deformato ed equilibrato si faccia ritornare pure gradatamente, colle stesse cautele, allo stato primitivo, passando successivamente per stati e posizioni di equilibrio anche eventualmente diversi da quelli, per cui il corpo stesso era passato nella fase precedente.

Non essendosi verificato nè acquisto nè perdita di energia, deve essere necessariamente nullo il lavoro complessivo svolto durante tutta la trasformazione, ossia il lavoro svolto dalle forze esterne nella prima fase, che si può considerare di « andata » deve essere uguale e contrario a quello svolto nella seconda fase di « ritorno ». Tali trasformazioni si dicono *isotermiche invertibili*.

Indichiamo con  $\delta L_e$  e  $\delta L_i$  rispettivamente i lavori sviluppati dalle forze esterne e dalle forze interne in una di tali fasi di deformazione, per una variazione infinitesima delle forze applicate. Poichè, per le ipotesi fatte sul modo di agire delle forze stesse, nella fase considerata non si ha sviluppo nè perdita di lavoro, deve essere sempre:

$$\delta L_e + \delta L_i = 0$$

e quindi, in totale, per una trasformazione dovuta ed una variazione finita delle forze applicate, dovrà essere :

$$L_e + L_i = 0 \quad ;$$

*cioè il lavoro delle forze interne è uguale ed opposto a quello delle forze esterne.*

Supponiamo poi di far passare il corpo elastico da uno stato iniziale, che diremo  $A_1$  ad un altro stato finale che indicheremo con  $A_2$ , il passaggio si può fare con due trasformazioni diverse  $T$  e  $T'$  e siano  $L_e$ ,  $L_i$  ed  $L'_e$ ,  $L'_i$  i lavori corrispondenti.

Si è riconosciuto sopra che se il corpo ritorna allo stato primitivo  $A_1$  dopo la trasformazione  $T$  e l'inversa della  $T'$  il lavoro complessivamente sviluppato dalle forze esterne deve essere nullo: perciò si dovrà avere :

$$L_e = L'_e$$

ed anche, per l'ultima relazione precedente :

$$L_i = L'_i$$

*Ciò vuol dire che il lavoro svolto dalle forze esterne (o quello, uguale e contrario, delle forze interne), nel passaggio tra due stati di equilibrio, effettuato con trasformazioni isoterliche invertibili è invariante rispetto alle trasformazioni stesse, in quanto non dipende dagli stati intermedi con esse attraversati, ma solo dai due stati estremi.*

Ora consideriamo una funzione dello stato di equilibrio del corpo elastico, (la quale si può pure considerare come funzione dei parametri che individuano la deformazione, ovvero di quelli che caratterizzano le forze applicate), definita in modo che in un dato stato del corpo, per es.  $A$ , assuma un dato valore arbitrario, che in un altro stato qualunque generico  $A'$  abbia un valore uguale a quello assunto in  $A$ , aumentato del lavoro svolto dalle forze interne nel passaggio dallo stato  $A$  allo stato  $A'$ .

Una tale funzione è ad un sol valore, a meno dell'arbitrarietà della scelta del valore nello stato iniziale  $A$  (costante arbitraria): infatti per quanto si disse sopra, l'incremento di tale funzione tra due stati, dipende solo dagli stati stessi e non dagli stati intermedi raggiunti dal corpo nella trasformazione.

Tale funzione si chiama *funzione potenziale elastica interna totale* del corpo considerato, e dalla sua stessa definizione risulta che

*il lavoro isotermico invertibile delle forze interne, compiuto nel passaggio tra due stati di equilibrio del corpo elastico è uguale alla differenza tra i valori che la funzione potenziale elastica assume per gli stati iniziale e finale.*

Cerchiamo ora l'espressione della detta funzione potenziale.

Per una variazione infinitesima dello stato di equilibrio del corpo elastico, caratterizzata dalle variazioni  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  delle componenti di spostamento, il lavoro delle forze esterne (di massa o superficiali), è:

$$dL_e = \int_V \rho(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \int_S (X_n\delta u + Y_n\delta v + Z_n\delta w) dS$$

53

Per le relazioni di Cauchy (35) e per la formula di Gauss generalizzata (29) si ha:

$$\begin{aligned} & \int_S (X_n\delta u + Y_n\delta v + Z_n\delta w) dS = \\ & = \int_V \left[ (X_x\delta u + Y_x\delta v + Z_x\delta w) \cos(nx) + \dots \right] dS = \\ & = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (X_x\delta u + Y_x\delta v + Z_x\delta w) + \dots \right] dV \end{aligned}$$

Fatte le derivazioni parziali, il coefficiente di  $\delta u$ , secondo le equazioni indefinite per l'equilibrio (36), risulta uguale a  $\rho X$ , ed analogamente per gli altri due assi; il coefficiente di  $X_x$  è:

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \epsilon_{xx},$$

il coefficiente di  $Y_z$  è:

$$\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z} = \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \delta \gamma_{yz}$$

ed analogamente per gli altri due assi.

Perciò risulta :

$$\delta L_i = -\delta L_e = \int_V (X_x \delta \epsilon_x + Y_y \delta \epsilon_y + Z_z \delta \epsilon_z + Y_z \delta \gamma_{yz} + Z_y \delta \gamma_{zy} + X_y \delta \gamma_{xy}) dV \quad (89)$$

essendo l'integrale esteso al volume del solido elastico.

Ora, poichè in una trasformazione si modificano successivamente le componenti di deformazione  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$  noi possiamo riguardare queste come funzioni di un certo parametro  $t$ , in modo che corrispondano ad uno stesso valore di  $t$  quei valori delle  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$  che sono simultaneamente raggiunti, e caratterizzano così uno stato intermedio del corpo.

Ciò posto, dall'ultima relazione, integrando il  $\delta L_i$  per tutta la trasformazione considerata, cioè rispetto a  $t$ , tra i valori 0 e  $t_1$ , corrispondenti allo stato iniziale ed a quello finale, si avrà:

$$L_i = \int_V dV \int_0^{t_1} (X_x \delta \epsilon_x + \dots + Y_z \delta \gamma_{yz} + \dots)$$

ove le  $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_{yz}, \dots$  si devono intendere espresse in funzione di  $\delta t$  colle ben note relazioni:

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} \delta t \dots \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} \delta t \dots$$

ossia :

$$L_i = \int_V dV \int_0^{t_1} \left( X_x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} + \dots + Y_z \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} + \dots \right) \delta t \quad .$$

Per quanto si disse più sopra questo lavoro  $L_i$  deve dipendere solo dagli stati estremi, iniziale e finale del solido elastico, e non dagli stati intermedi attraversati nella trasformazione; e ciò evidentemente si deve verificare pure per qualunque porzione del solido stesso, comunque estesa, cioè qualunque sia lo spazio  $V$ , compreso nel solido, a cui l'integrazione rispetto a  $dV$  viene estesa.

Perciò anche l'integrale :

$$I = \int_0^{t_1} (X_{\nu} \delta \varepsilon_{\nu} + \dots + Y_{\mu} \delta \gamma_{\mu} + \dots) = \int_0^{t_1} \left( X_{\nu} \frac{\partial \varepsilon_{\nu}}{\partial t} + \dots + Y_{\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu}}{\partial t} + \dots \right) \delta t$$

per ogni punto (o particella) del solido elastico, deve risultare dipendente solo dai valori iniziali e finali delle componenti di deformazione  $\varepsilon_{\nu} \dots \gamma_{\mu} \dots$ , e non dai gruppi di valori intermedi assunti nella trasformazione; in altri termini l'integrale  $I$  deve essere indipendente dalla « forma » delle funzioni che esprimono le  $\varepsilon_{\nu} \dots \gamma_{\mu} \dots$  mediante il parametro  $t$ , sempre quando i valori estremi per  $t = 0$  e  $t = t_1$ , siano quelli che competono ai due stati estremi del corpo, tra i quali si compie la trasformazione suddetta. L'integrale  $I$  si può considerare per la sua definizione, come il lavoro delle forze interne riferito all'unità di volume, nel punto considerato.

Allora, per quanto è noto dalla meccanica e dall'analisi, esiste una funzione ad un sol valore delle sei componenti di deformazione  $\varepsilon_{\nu} \dots \gamma_{\mu} \dots$  nella particella considerata, ossia funzione degli stati della particella, tale che la differenza tra i suoi valori corrispondenti a due diversi stati sia il valore dell'integrale  $I$  tra i due stati stessi. In conseguenza l'integrando nell'espressione di  $I$  deve essere il differenziale totale di detta funzione; e chiamando questa  $\Phi$ , potremo porre :

$$X_{\nu} \delta \varepsilon_{\nu} + Y_{\mu} \delta \gamma_{\mu} + Z_{\xi} \delta \varepsilon_{\xi} + Y_{\eta} \delta \gamma_{\eta} + Z_{\zeta} \delta \gamma_{\zeta} + X_{\beta} \delta \gamma_{\beta} = -\delta \Phi \quad (90)$$

Tale funzione risulta definita a meno di una costante arbitraria; ed anche il segno è in nostro arbitrio, e noi lo scegliamo, come indica la (90), in modo che un valore positivo dell'integrale  $I$ , quale lavoro compiuto dalle forze interne, sia un decremento della funzione  $\Phi$ : la funzione stessa viene quindi a rappresentare e misurare la capacità, acquistata dal solido deformato, di compiere lavoro contro le forze esterne.

Si ha dunque:

$$\delta L_i = - \int_V \delta \Phi dV = - \delta \int_V \Phi dV \quad ; \quad (91)$$

ossia esiste una funzione  $\int_V \Phi dV$ , determinata dallo stato di deformazione del solido elastico, il cui decremento è uguale al lavoro compiuto dalle forze interne, ed il cui incremento è perciò uguale al lavoro compiuto dalle forze esterne, (sempre quando, ben inteso, le trasformazioni sono isoterme invertibili).

La funzione  $\Phi$  è pure il limite a cui tende il rapporto  $\int_V \Phi dV : V$ , quando lo spazio o volume  $V$ , a cui si estende l'integrazione, si impiccolisce indefinitamente tendendo a zero.

Essa si chiama *potenziale elastico isotermico unitario* (o *specifico*), o più brevemente *potenziale elastico*. Da quanto si disse sopra risulta che questo potenziale è definito in ogni punto del solido elastico che si considera; e poichè la  $\Phi$  risulta definita a meno di una costante arbitraria, noi potremo scegliere questa in modo che la  $\Phi$  risulti sempre positiva.

Di solito si assume talè costante in modo che la  $\Phi$  risulti nulla quando son nulle tutte le componenti di deformazione  $\epsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ ; cioè si pone uguale a zero il valore di  $\Phi$  che corrisponde allo stato *naturale non deformato del solido elastico*.

Definito così il potenziale elastico, prima di passare a studiarne le proprietà caratteristiche, può essere utile ed istruttivo verificare come alla relazione (89), che ci esprime il lavoro elementare delle forze interne od esterne, si possa pure giungere calcolando direttamente il lavoro che le forze in equilibrio su un parallelepipedo retangolo elementare, con gli spigoli orientati come gli assi, compiono per effetto di un incremento  $\delta$  della deformazione dello stesso parallelepipedo.

Infatti se  $dx dy dz$  sono gli spigoli del parallelepipedo, le due facce normali all'asse  $x$ , di area  $dy dz$ , sopportano, per azione del corpo circostante, due spinte dirette verso l'interno del parallelepipedo, date da  $X_x dy dz$  e  $-\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) dy dz$ : tali spinte generano lavoro per effetto degli spostamenti delle dette facce in direzione dell'asse  $x$ , spostamenti la cui differenza è  $-\delta \epsilon_x dx$ , e quindi a meno di infinitesimi di ordine superiore il lavoro dovuto a tali spinte è complessivamente:

$$-X_x \delta \epsilon_x dx dy dz$$

Le stesse facce risentono le forze tangenziali  $Y_x dy dz$  e

$$-\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx\right) dy dz,$$
 le quali lavorano per effetto degli spostamenti delle faccie stesse in direzione dell'asse  $y$  e la differenza di tali spostamenti è  $-\delta \frac{\partial v}{\partial x} dx$ , sicchè, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore, il lavoro di dette azioni tangenziali è:

$$-Y_x \delta \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dxdydz :$$

allo stesso modo si dimostra che le azioni tangenziali nelle stesse faccie agenti secondo l'asse  $z$ , generano un lavoro:

$$-Z_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} dxdydz .$$

Analoghe espressioni si ricavano per i lavori sviluppati dalle azioni normali e tangenziali esercitate sulle altre due coppie di faccie opposte del detto parallelepipedo elementare; sommando le così fatte espressioni, ricordando che è  $dxdydz = dV$ , e tenendo presente che i lavori qui calcolati sono quelli di forze esterne all'elemento  $dV$  del solido preso in esame, ed esercitate contro esso, tendenti a deformato, si trova in modo ovvio:

$$d\delta L_e = -(X_x \delta \epsilon_x + Y_y \delta \epsilon_y + Z_z \delta \epsilon_z + Y_z \delta \gamma_{yz} + Z_y \delta \gamma_{zy} + X_y \delta \gamma_{xy}) dV$$

che equivale alla (89).

Con questa dimostrazione è messo anche meglio in evidenza il significato dell'integrando della (89), il quale è il lavoro compiuto per imprimere all'elemento  $dV$  l'incremento di deformazione di componenti  $\delta \epsilon_x \dots \delta \gamma_{yz} \dots$ .

Osserviamo ora che dalle (89) e (91) risulta:

$$\delta L_e = -\delta L_i = \delta \int_V \Phi dV$$

e di qui, per la particolare scelta della costante arbitraria della  $\Phi$  ( $\Phi = 0$  per  $\epsilon_x = \dots = \gamma_{yz} = \dots = 0$ ; v. sopra), integrando a tutta la deformazione di componenti  $\epsilon_x \dots \gamma_{yz} \dots$ , si ha

$$L_e = -L_i = \int_V \Phi dV \quad (92)$$

Il lavoro  $L_e$  compiuto dalle forze esterne contro le forze interne, lavoro necessario a deformare il solido elastico, si dice anche *lavoro di deformazione*. Esso è un'energia accumulata nel solido elastico sotto forma potenziale, e può venir restituito quando il solido, con trasformazione inversa possa tornare allo stato naturale non deformato, compiendo così lavoro contro le forze esterne.

### 30. PROPRIETÀ DEL POTENZIALE ELASTICO.

Per la particolare scelta fatta per la costante arbitraria risulta la proprietà già enunciata, che ripetiamo per tenerla presente insieme colle altre:

a) *Il potenziale elastico si annulla quando, e solo quando sono nulle tutte le componenti di deformazione* (solido allo stato naturale, non deformato).

Inoltre dalla (90) risulta immediatamente:

$$X_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_r} \dots; \quad Y_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \dots \quad (93)$$

ossia:

b) *Le componenti speciali di pressione sono uguali ed opposte alle derivate parziali del potenziale elastico rispetto alle omologhe componenti di deformazione.*

Ricordiamo ora che per la legge di Hooke (n.° 24) le componenti speciali di pressione  $X_r \dots Y_{\mu\nu} \dots$ , sono funzioni lineari omogenee delle componenti di deformazione  $\varepsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ , e perciò conforme alle (93) il potenziale elastico  $\Phi$  dovrà essere funzione quadratica delle stesse  $\varepsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ , senza termini lineari (essendo le  $X_r \dots Y_{\mu\nu} \dots$  funzioni omogenee): nè esso può contenere un termine costante, in virtù della proprietà a); perciò:

c) *Il potenziale elastico è una funzione quadratica omogenea positiva delle componenti di deformazione  $\varepsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$*

Nell'analisi algebrica le funzioni quadratiche omogenee di più variabili si dicono anche *forme quadratiche* e sono note le loro proprietà più significative, che qui utilizzeremo.

Tra l'altro è noto, e si può verificare direttamente, che, essendo  $\Phi$  una forma quadratica nelle  $\varepsilon_r \dots \gamma_{\mu\nu} \dots$ , si ha:

$$2\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_r} \varepsilon_r + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_\mu} \varepsilon_\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_\nu} \varepsilon_\nu + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{\nu\mu}} \gamma_{\nu\mu} \quad (94)$$

ed anche, per le (93):

$$2\Phi = -(X_r \varepsilon_r + Y_{\rho\sigma} \varepsilon_\rho + Z_\nu \varepsilon_\nu + Y_{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} + Z_\nu \gamma_{\nu\mu} + X_\mu \gamma_{\nu\mu}) \quad (95)$$