CAPITOLO III.

ANALISI DELLE PRESSIONI INTERNE IN UN CORPO CONTINUO

16. Generalità sulle pressioni interne.

Consideriamo un corpo continuo qualunque, soggetto a forze agenti dall'esterno di esso, le quali potranno essere forze sollecitanti ogni elemento di massa del corpo stesso, (e si diranno perciò *forze di massa*), o potranno essere distribuite, con o senza continuità, sulla superficie esterna limitante il corpo considerato, (e si diranno *forze superficiali*).

A proposito della natura di queste forze osserviamo che spesso, come si usa nella statica grafica, dovremo considerare forze esterne concentrate in determinati punti.

Orbene, la forza concentrata è sempre un'astrazione schematica, comoda per semplificare le trattazioni dei problemi, ma in realtà le forze in giuoco nella natura sono sempre ripartite. Spesso però la ripartizione avviene su una superficie piccolissima, di grandezza non ben determinabile, con legge pure per lo più incognita e con intensità unitaria molto elevata; ed allora può essere sufficiente l'approssimazione che si ottiene sostituendo alle forze ripartite su detta piccolissima area, la loro risultante applicata in un punto intermedio dell'area stessa. La sostituzione può essere senza effetto apprezzabile per la valutazione delle altre forze esterne (reazioni), come pure delle forze interne in elementi del solido anche molto vicini alla regione della superficie esterna, su cui detta forza è ripartita: il divario tra l'effetto della forza realmente ripartita e quello della forza concentrata che la sostituisce è apprezzabile solo in una regione del solido molto piccola, prossima al *punto di applicazione* della forza concentrata.

L'esperimento conferma direttamente od indirettamente queste considerazioni; sopratutto sono notevoli a questo scopo gli esperimenti eseguiti sulla doppia rifrazione accidentale dei solidi isotropi trasparenti soggetti a sforzi; di ciò parleremo diffusamente più oltre. Notiamo poi infine che le forze concentrate nella pratica si hanno sempre quando due corpi solidi si trasmettono per contatto una azione mutua, avendo le loro superficie esterne tra loro tangenti geometricamente in un punto, attorno al quale, per la deformazione elastica o plastica del materiale, si stabilisce un'area piccolissima, ma finita, sulla quale si distribuisce quella forza, che, solo per comoda approssimazione, noi riguardiamo come concentrata.

Ciò posto, supponiamo che il corpo considerato, sotto l'azione delle forze di massa e di quelle superficiali, sia in equilibrio.

Nell'interno del corpo si sviluppano altre forze, le quali reagiscono a quelle prima considerate, che tendono a deformare il corpo stesso.

Queste nuove forze si dicono *pressioni interne.*

Per stabilire di queste pressioni alcune proprietà generali, valevoli indipendentemente dalla natura fisica del corpo, noi potremo basarci su un *postulato*, logicamente plausibile, e confermato pienamente dall'esperienza.

Il corpo, dopo deformato, ed in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne si supponga tagliato con una superficie qualunque (p. es.: un piano), la quale lo separi in due parti A e B, e supponiamo rimossa una delle parti, per es.: B. *Ammetteremo che l'equilibrio della parte A nella sua configurazione raggiunta dopo la deformazione, possa essere ristabilito distribuendo sulla superficie di separazione, forze di intensità unitaria univocamente determinata punto per punto.*

Sia M un punto della superficie di separazione, dS un elemento dell'area di questa intorno ad M; la forza elementare da applicare sull'elemento dS sarà dello stesso ordine (2°) dell'area dS stessa, e dipenderà dalle coordinate di M e dall'orientazione dell'elemento dS suddetto.

Tale orientazione può venir definita dalla normale n all'elemento, e su di questa assumeremo positivo il senso diretto verso l'interno della parte del corpo, della quale studiamo l'equilibrio (A).

La detta forza elementare verrà indicata con $F_n dS$, designando quindi con F_n l'intensità unitaria di tale forza ripartita, che si dirà anche la *pressione interna* sull'elemento di normale n; essa si dovrà ritenere finita, avendo ammesso che la forza elementare $F_n dS$ sia infinitesima dello stesso ordine di dS.

La F_n sarà rappresentabile con un vettore avente secondo le tre direzioni degli assi coordinati ortogonali xyz, tre componenti che indicheremo con

$$X_n \quad , \quad Y_n \quad , \quad Z_n \quad ,$$

chiamandole *componenti ortogonali di pressione.*

La proiezione ortogonale della F_n sulla direzione della normale n si chiamerà la *componente normale della pressione*, (o *pressione normale*) e si indicherà con N_n; secondo che essa è positiva, — ossia diretta secondo il senso positivo di n, verso l'interno del corpo A, — negativa o nulla, si dirà che l'elemento considerato dS è soggetto ad una pressione, ad una trazione, o ad una forza tangenziale. E la proiezione di F_n sul piano di dS (tangente in M alla superficie di separazione S) si dice appunto la *componente tangenziale di pressione* (o *pressione tangenziale*).

Con queste premesse, si può dimostrare il teorema seguente:

Le pressioni interne in un corpo continuo soddisfano alla legge della reazione uguale e contraria all'azione.

Ciò significa che la forza elementare da applicare sull'elemento d'area dS quando è supposta rimossa la parte B del corpo, e conservata la parte A, è uguale e contraria a quella che si deve applicare sopra lo stesso elemento quando invece si toglie la parte A, conservando quella B.

Infatti, immaginiamo di isolare nell'interno del corpo un cilindro retto, di cui siano S, S' le basi piane, ed S'' la superficie laterale (cilindrica); siano n, n', n'' le rispettive normali dirette verso l'interno del cilindro.

L'equilibrio di questo sará ristabilito se sui punti di S, S', S'' distribuiremo rispettivamente certe forze F_n, $F_{n'}$, $F_{n''}$. Il cilindro sarà in equilibrio sotto l'azione di queste forze, di quelle di massa, ed *a fortiori* resterà in equilibrio se lo si supporrà irrigidito. (Questo costituisce il *principio dell'irrigidimento*, spesso applicato nella meccanica dei corpi continui; la locuzione: « *a fortiori* » vuole indicare che le condizioni di equilibrio del corpo rigido sono certo *necessarie* per l'equilibrio elastico, se pure non sufficienti).

Siano XYZ le componenti della forza unitaria di massa (riferita all'unità di massa); sia dV un elemento di volume e ρ la densità nel punto generico.

L'equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse x ci dà:

$$\int_S X_n \, dS + \int_{S'} X_{n'} \, dS' + \int_{S''} X_{n''} \, dS'' + \int_V \rho X dV = 0$$

e due relazioni analoghe sussistono per gli altri due assi coordinati.

Ora le aree S ed S' sono uguali; noi possiamo poi passare al limite facendo avvicinare indefinitamente le due superficie stesse, basi del cilindro considerato; in tal caso i due ultimi integrali tendono a zero, e le espressioni ora trovate si riducono a:

$$\int_S (X_n + X_{n'})\, dS = 0$$

e due analoghe per gli altri due assi.

Queste devono sussistere qualunque sia l'estensione e la forma del contorno dell'area S, e perciò deve essere, in ogni punto di S stessa:

$$X_n + X_{n'} = 0 \quad ; \quad Y_n + Y_{n'} = 0 \quad ; \quad Z_n + Z_{n'} = 0$$

e poichè si hà: $n' = -n$, possiamo sinteticamente scrivere

$$F_n = -F_{-n}$$

relazione che dimostra il teorema sopra enunciato.

17. Componenti speciali di pressione. Loro relazioni colle componenti ortogonali. Teorema fondamentale di Cauchy.

Intorno al punto generico M si consideri un elemento piano di area dS_x, parallelo al piano yz. Le componenti ortogonali di pressione su questo elemento, la cui normale è l'asse x nel senso positivo, si indicano con

$$X_x \quad , \quad Y_x \quad , \quad Z_x \; .$$

Analogamente indichiamo con

$$X_y \quad , \quad Y_y \quad , \quad Z_y$$

le componenti di pressione relative ad un elemento di area piana dS_y, parallelo al piano zx, la cui normale è l'asse y positivo, ed infine con

$$X_z \quad , \quad Y_z \quad , \quad Z_z$$

le componenti di pressione su un elemento dS_z parallelo al piano xy, la cui normale è l'asse z positivo.

Le nove grandezze ora definite, le quali saranno funzioni delle coordinate di M, si chiamano le *componenti speciali di pressione relative al punto M, e riferite alla data terna xyz.*

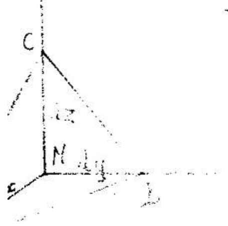
Le componenti di pressione relative ad un elemento dS_n piano, passante per M, e comunque orientato, dipendono in generale dalla posizione di M e dall' orientazione dell' elemento, ossia dai coseni di direzione della sua normale; la legge di loro dipendenza dalle coordinate $x\,y\,z$ non si può assegnare senza conoscere la natura e lo stato fisico del corpo; mentre invece si può stabilire genericamente il modo con cui dette componenti dipendono dai coseni direttori dell'elemento.

Infatti si può dimostrare facilmente il seguente teorema generale dovuto a Cauchy:

Le componenti ~~di pressione~~ su un elemento piano in un corpo continuo in equilibrio sono funzioni lineari ed omogenee dei coseni direttori della normale all' elemento, e delle componenti speciali di pressione.

E precisamente la componente ortogonale di pressione relativa ad uno degli assi coordinati è uguale alla somma dei prodotti delle singole componenti speciali di pressione relative allo stesso asse, rispettivamente per i coseni direttori della normale all' elemento.

Per dimostrarlo, consideriamo il triedro trirettangolo formato da tre semirette $x\,y\,z$ uscenti da M parallele rispettivamente ai tre assi coordinati, nei sensi positivi di questi. Tale triedro si tagli con un piano di orientazione qualunque, intersecante i tre spigoli del triedro xyz in tre punti ABC vicinissimi ad M: tale piano stacca dal triedro un tetraedro elementare, del quale vogliamo studiare l'equilibrio.



Sia:

$$MA = dx \quad ; \quad MB = dy \quad ; \quad MC = dz\ .$$

Ora se indichiamo con dS l' area della faccia triangolare elementare ABC del tetraedro, e se indichiamo con n la direzione della normale al piano stesso, presa positiva diretta verso l'interno del tetraedro, si ha ovviamente, proiettando dS sui tre piani coordinati:

$$dS\,.\cos(nx) = -\frac{1}{2}\,dy\,dz$$

$$dS\,.\cos(ny) = -\frac{1}{2}\,dz\,dx$$

$$dS\,.\cos(nz) = -\frac{1}{2}\,dx\,dy$$

Il tetraedro sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze di massa, e delle forze superficiali applicate sull'area dS e sulle facce laterali $\frac{1}{2}\,dy\,dz$; $\frac{1}{2}\,dz\,dx$; $\frac{1}{2}\,dx\,dy$ del tetraedro.

Se consideriamo gli incrementi dx, dy, dz come infinitesimi di primo ordine, le aree delle facce del tetraedro, e con esse le forze superficiali, sono infinitesimi di secondo ordine, mentre le forze di massa, proporzionali al volume dell'elemento, sono, come questo, infinitesime di terzo ordine, e perciò trascurabili di fronte a quelle di secondo ordine.

Perciò per avere delle relazioni tra le forze superficiali applicate al tetraedro elementare considerato, tra queste sole dovremo esprimere l'equilibrio.

Quindi coi simboli introdotti nel N.° precedente, per l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse x, a meno di infinitesimi di ordine superiore, dovremo avere:

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \qquad (34)$$

e questa relazione esprime appunto il teorema di Cauchy sopra enunciato.

Per brevità possiamo indicare con α_x, α_y, α_z i coseni direttori della normale n; inoltre potremo scrivere due relazioni analoghe alla (34), una per ciascuno degli altri due assi y e z; si trova così:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x\alpha_x + X_y\alpha_y + X_z\alpha_z \\ Y_n &= Y_x\alpha_x + Y_y\alpha_y + Y_z\alpha_z \\ Z_n &= Z_x\alpha_x + Z_y\alpha_y + Z_z\alpha_z \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Ne risulta che se in un punto M sono conosciute le componenti speciali di pressione, data l'orientazione di un elemento di area contiguo ad M, si possono ricavare con le (35) le componenti della pressione sull'elemento stesso; perciò la distribuzione delle pressioni nell'interno di M è caratterizzata da quella delle componenti speciali di pressione.

18. Equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo continuo.

Dal corpo continuo che qui si considera, già deformato sotto l'azione delle forze applicate, isoliamo una porzione qualsiasi mediante una superficie chiusa, finita, che indicheremo con S. La porzione così considerata staccata, è in equilibrio sotto l'azione delle forze F_n superficiali distribuite su S, e delle forze di massa distribuite sul volume racchiuso in S.

Perciò, per l'equilibrio della porzione stessa, supposta irrigidita, è necessaria la condizione:

$$\int_V \rho X \, dV + \int_S X_n \, dS = 0$$

la quale coi simboli già introdotti al N.° 16, esprime l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse x; altre due relazioni analoghe si hanno per gli altri due assi.

Per la (34) esprimente il teorema di Cauchy, e poi per il lemma di Gauss generalizzato espresso dalla (29), si ha:

$$\int_S X_n \, dS = \int_S [X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)] \, dS =$$
$$= -\int_V \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dV .$$

Quindi, sostituendo nella relazione precedente, si trova:

$$\int_V \left(\rho X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dV = 0$$

e poichè questa relazione deve essere soddisfatta qualunque sia il volume V, deve risultare:

ρ densità $= \frac{dm}{dV}$

$$\boxed{\rho X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}}$$

e due analoghe per gli altri due assi:

$$\rho Y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \qquad (36)$$
$$\rho Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

Queste si dicono le *equazioni indefinite per l'equilibrio*, e sono valide per qualunque punto interno del corpo continuo che si considera.

Ma per l'equilibrio della porzione del corpo, racchiusa nella superficie S e supposta irrigidita, sono necessarie anche tre altre equazioni: quelle dei momenti, o, come si dice anche, le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno a ciascuno dei tre assi.

L' equazione dei momenti rispetto all' asse x è, com' è ben noto dalla meccanica razionale:

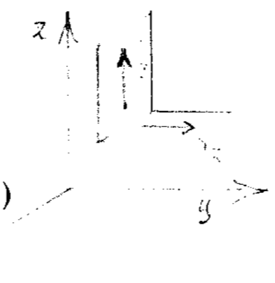
$$\int_V \rho(yZ - zY)\, dV + \int_S (yZ_n - xY_n)\, dS = 0.$$

Di qui, procedendo come sopra, cioè facendo le sostituzioni secondo le (35), e poi applicando la trasformazione di Gauss secondo la (29), si trova, come sopra, un integrale di volume (o di spazio), che deve essere nullo qualunque sia la porzione del corpo, alla quale viene esteso: perciò occorre che sia identicamente nulla in tutti i punti del corpo la funzione da integrare; e così si ottiene:

$$\rho(yZ - zY) = \frac{\partial}{\partial x}(yZ_x - zY_x) + \frac{\partial}{\partial y}(yZ_y - zY_y) + \frac{\partial}{\partial z}(yZ_z - zY_z)\ .$$

Ora, sviluppando le derivate *parziali* a secondo membro, e tenendo presenti le (36), si ha infine:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{Y_z = Z_y} \\ \text{ed operando analogamente per gli altri due assi, abbiamo ancora:} \\ Z_x = X_z \quad ; \quad X_y = Y_x\ . \end{array}\right\} \quad (37)$$



Si noti che, tra le componenti speciali di pressione, le X_x, Y_y, Z_z sono dirette normalmente agli elementi superficiali sui quali si esercitano, e perciò si chiamano anche *componenti speciali normali;* mentre le altre sei componenti speciali agiscono tangenzialmente agli elementi di area sui quali si esercitano, e per questo si chiamano anche *componenti speciali tangenziali.*

Le (37) dimostrano quindi che le *componenti speciali tangenziali si riducono a tre sole distinte,* poichè sono due a due uguali a quelle rappresentate con le stesse lettere maiuscola e minuscola scambiate fra loro.

Anzi, poichè la scelta degli assi coordinati è stata perfettamente generica ed arbitraria, colle (37) resta dimostrato in generale che *se nel corpo continuo consideriamo un diedro rettangolo qualsiasi, sulle due facce del diedro le componenti di pressione tangenziali e perpen-*

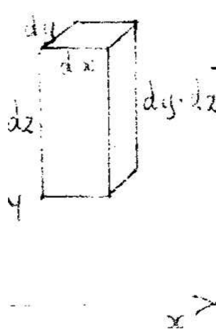
dicolari allo spigolo del diedro sono uguali in intensità e dirette entrambe verso lo spigolo stesso, o in senso opposto.

Si può dunque concludere che le *componenti speciali di pressione si riducono a sole sei distinte.*

Le relazioni (36) e (37) si possono anche dimostrare con un ragionamento sintetico e forse più intuitivo, studiando l' equilibrio di un elemento infinitesimo di volume.

Consideriamo un parallelepipedo rettangolo elementare, con un vertice nel punto generico M, cogli spigoli orientati secondo i tre assi coordinati, nei sensi positivi ed aventi per lunghezze rispettivamente dx, dy, dz.

Esso è in equilibrio sotto l' azione della forza di massa, che si deve ritenere applicata nel baricentro del volume dell' elemento, e sotto l' azione delle pressioni esercitate come azioni del corpo circostante sull' elemento preso in esame.



Le azioni trasmesse attraverso le due facce opposte del parallelepipedo, normali all' asse x, sono di segno contrario e differiscono del loro differenziale parziale preso facendo variare la sola x dell' incremento infinitesimo dx; lo stesso si dica per le coppie di facce rispettivamente normali agli altri due assi; così ad esempio sulle facce normali all' asse x, di area $dy \,.\, dz$ si hanno le forze seguenti:

$$\begin{array}{llll}
\text{dirette secondo l'asse } x & X_x\, dy\, dz & \text{e} & -\left(X_x+\dfrac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dy\, dz \\
\text{» \quad » \quad »} \ y & Y_x\, dy\, dz & \text{e} & -\left(Y_x+\dfrac{\partial Y_x}{\partial x}dx\right)dy\, dz \\
\text{» \quad » \quad »} \ z & Z_x\, dy\, dz & \text{e} & -\left(Z_x+\dfrac{\partial Z_x}{\partial x}dx\right)dy\, dz
\end{array}$$

ed analogamente sulle altre due coppie di facce opposte.

Perciò scrivendo l' equazione di equilibrio alla traslazione secondo l' asse x si ha:

$$\rho X\, dx\, dy\, dz = \frac{\partial X_x}{\partial x}dx \,.\, dy\, dz + \frac{\partial X_y}{\partial y}dy \,.\, dz\, dx + \frac{\partial X_z}{\partial z}dz \,.\, dx\, dy$$

da cui, dividendo per il volume elementare $dx\, dy\, dz$, si ritrova la prima delle (36), ed in modo analogo si possono ritrovare le altre due.

Per quanto poi riguarda l' equilibrio alla rotazione dell'elemento preso in esame, notiamo che tanto la forza di massa, quanto le azioni normali sulle facce, si possono ritenere agenti secondo rette passanti per il baricentro del volume elementare, mentre invece le azioni tangenziali sulle facce dànno luogo a coppie che si devono fare mutuamente equilibrio.

L'equazione dei momenti intorno all'asse x deve esprimere l'equilibrio tra la coppia destrogira costituita da due forze $Y_z\,dx\,dy$ e $-Y_z\,dx\,dy$ con braccio dz e la coppia sinistrogira costituita da due forze $Z_y\,dz\,dx$ e $-Z_y\,dz\,dx$ con braccio dy, notando poi che i differenziali delle componenti speciali di pressione si debbono in questo calcolo trascurare, perchè dànno luogo a momenti infinitesimi di 4.° ordine, mentre i momenti che qui computiamo sono infinitesimi del 3.° ordine.

Perciò detta equazione si riduce a:

$$Y_z\,dx\,dy\,.\,dz - Z_y\,dz\,dx\,.\,dy = 0\ ,$$

dalla quale dividendo per il fattore comune $dx\,dy\,dz$ si ricava la prima delle (37). Analogamente le altre due si deducono esprimendo l'equilibrio alla rotazione intorno agli assi y e z rispettivamente.

Le equazioni (35), (36), (37) sono necessarie per l'equilibrio del corpo continuo, ma esse non sono sufficienti, poichè per determinare in ogni punto le sei componenti speciali occorre, come vedremo meglio più oltre, conoscere oltre alle forze di massa, anche le forze esterne superficiali, applicate cioè sulla superficie limitante esternamente il corpo, nonché le relazioni tra pressioni e deformazioni.

Abbiamo ricavate le relazioni suddette supponendo il corpo in equilibrio, dopo avvenuta la deformazione, e perciò nelle dette equazioni le varie grandezze (densità, coordinate, componenti), si devono intendere come riferentisi alla posizione già deformata del corpo.

Però se la deformazione è così piccola, che si possa riguardare come infinitesima, le dette equazioni si possono riferire pure alla posizione non deformata; ciò si potrebbe rigorosamente riconoscere sviluppando in serie di Mac-Laurin le varie funzioni riferentisi alla posizione deformata, e trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore al primo.

Quando invece la deformazione fosse finita, allora occorrerebbe trasformare le suddette equazioni in altre contenenti le varie grandezze relative al corpo non deformato.

Noi non ci occupiamo qui di tale trasformazione, perchè nelle applicazioni tecniche, oggetto del nostro studio, le deformazioni sono sempre piccolissime e perfettamente assimilabili ad infinitesimi, come già si disse più volte.

19. Componente normale di pressione su un elemento superficiale generico.

Vogliamo ora esprimere la componente normale della pressione su un elemento superficiale dS di normale n; ossia la proiezione ortogonale *su n della pressione totale agente sull'elemento sopradetto.*

Indicandola con N_n, e proiettando sulla n il vettore F_n di componenti ortogonali X_n, Y_n, Z_n, se α_x, α_y, α_z sono al solito i coseni di direzione della normale n, si ottiene subito:

$$N_n = X_n\alpha_x + Y_n\alpha_y + Z_n\alpha_z \tag{38}$$

Ora se in questa sostituiamo i valori dati dalle (35), si trova:

$$N_n = X_x\alpha_x^2 + Y_y\alpha_y^2 + Z_z\alpha_z^2 + 2Y_z\alpha_y\alpha_z + 2Z_x\alpha_z\alpha_x + 2X_y\alpha_x\alpha_y. \tag{39}$$

Dunque *la componente normale di pressione è funzione quadratica omogenea dei coseni direttori della normale all'elemento superficiale, su cui essa si esercita, ed è pure funzione lineare omogenea delle componenti speciali di pressione.*

È opportuno rilevare l'analogia notevole tra la (39) ora trovata e la (11) ricavata nell'analisi della deformazione, a rappresentare il coefficiente di dilatazione lineare secondo una data retta a.

Ora osserviamo che le (38) e (35) costituiscono un sistema di 4 equazioni lineari non omogenee nelle 3 grandezze $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$; dette equazioni devono essere soddisfatte simultaneamente per valori non tutti nulli delle incognite $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$, (che non possono essere simultaneamente tutte nulle); per questo è condizione necessaria e sufficiente che si annulli il determinante ordinatamente formato coi coefficienti e coi termini noti delle suddette 4 equazioni. Quindi si deve avere:

$$\begin{vmatrix} N_n & X_n & Y_n & Z_n \\ X_n & X_x & X_y & X_z \\ Y_n & Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_n & Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = 0$$

notando che questo determinante è *simmetrico* per le relazioni (37).

Questa equazione si può risolvere rispetto alla N_n, e si ottiene:

$$N_n = -\frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 0 & X_n & Y_n & Z_n \\ X_n & X_x & X_y & X_z \\ Y_n & Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_n & Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} \tag{40}$$

ove con Δ si indica il suddeterminante complementare del 1.° elemento del determinante soprascritto. Questo Δ è il determinante formato ordinatamente colle componenti speciali di pressione, od in altre parole il determinante dei coefficienti delle (35), considerate come equazioni nelle $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$.

Esso è per lo più diverso da zero, sicchè l'espressione (40) della N_n risulta determinata e finita. Se in particolare è $\Delta = 0$, è verificata la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema ottenuto dalle (35) ponendo $X_n = 0$, $Y_n = 0$, $Z_n = 0$, sia soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$; in tal caso dalle (35) rese omogenee, e dalla nota relazione $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$ si ricavano tre valori di $\alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z$, che determinano la direzione della normale ad un elemento piano, che diremo dS_0, sul quale si esercita *pressione nulla*, (essendo nulle le tre componenti ortogonali di pressione).

vedi p. 68 f. 1; la dimostrazione è la stessa,

Allora per l'equilibrio di un qualsiasi prisma elementare, avente due basi parallele al detto elemento dS_0, risulta che su qualsiasi elemento di area piano diverso da dS_0 si deve esercitare una pressione parallela a dS_0: perciò nell'intorno considerato la distribuzione delle pressioni interne si *riduce a due dimensioni*, ossia le pressioni sono tutte parallele ad un piano. ~~Infatti~~, preso un piano parallelo all'elemento dS_0 come piano yz (ossia $x = 0$), delle componenti speciali di pressione si annullano tutte quelle il cui simbolo contiene la lettera X o la x, e sono diverse da zero solo le $Y_y\ Z_z$ e $Y_z\ \ Z_y$; così è pure nulla la X_n. Perciò le (35) si riducono a:

$$\left.\begin{aligned} Y_n &= Y_y\,\alpha_y + Y_z\,\alpha_z \\ Z_n &= Z_y\,\alpha_y + Z_z\,\alpha_z \end{aligned}\right\} \qquad (35\text{ bis})$$

la (38) poi diviene:

$$N_n = Y_n\,\alpha_y + Z_n\,\alpha_z \qquad (38\text{ bis})$$

la (39) si trasforma in:

$$N_n = Y_y\,\alpha_y^2 + Z_z\,\alpha_z^2 + 2\,Y_z\,a_y\,\alpha_z \qquad (39\text{ bis})$$

ed infine la (40) diventa:

$$N_n = -\frac{1}{\Delta'}\begin{vmatrix} 0 & Y_n & Z_n \\ Y_n & Y_y & Y_z \\ Z_n & Z_y & Z_z \end{vmatrix} \qquad (40\text{ bis})$$

ove Δ' è il determinante di 2.° ordine formato ordinatamente con le 3 componenti speciali di pressione diverse da zero.

Anche qui possiamo dire che pure nell'ipotesi della *distribuzione a due dimensioni* il determinante Δ' è per lo più diverso da zero e perciò l'espressione di N_n data dalla (39 bis) è determinata e finita.

E se poi in particolare risultasse pure $\Delta' = 0$, allora, in modo analogo a quello sopra seguíto, si può verificare che pur nel piano in cui son distribuite le forze esiste una direzione tale che sull' elemento di area a questa normale la pressione totale è nulla: allora presa detta direzione come asse delle y, risulta diversa da zero la sola componente speciale di pressione Z_z, e le (35 bis), (38 bis), (39 bis) e (40 bis), diventano rispettivamente:

$$Z_n = Z_z \alpha_z \qquad (35\text{ ter})$$
$$N_n = Z_n \alpha_z \qquad (38\text{ ter})$$
$$N_n = Z_z \alpha^2_z \qquad (39\text{ ter})$$
$$N_n = \frac{Z_n^2}{Z_z} \qquad (40\text{ ter})$$

Abbiamo voluto investigare i casi particolari in cui $\Delta = 0$ od ancora $\Delta' = 0$, sia per rendere completa la discussione dell'equazione (40), sia perchè le specializzazioni della distribuzione delle pressioni parallele ad un piano, ovvero ad un'unica direzione, si presentano spesso nelle pratiche applicazioni, sicchè le equazioni specializzate, indicate più sopra con *bis* e *ter* troveranno in séguito dirette applicazioni a casi concreti.

Riassumendo, dalla (40) e dalle sue specializzazioni (40 bis) e (40 ter) risulta che la *componente normale di pressione è una funzione quadratica omogenea delle componenti ortogonali di pressione.*

Se ora deriviamo la (39) rispetto alle variabili α_x, α_y, α_z, otteniamo:

$$\boxed{X_n = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \alpha_x} \quad ; \quad Y_n = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \alpha_y} \quad ; \quad Z_n = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial \alpha_z}} \qquad (41)$$

Inoltre, esprimendo nel modo noto il differenziale totale della N_n secondo la (38), si trova:

$$dN_n = \alpha_x\, dX_n + \alpha_y\, dY_n + \alpha_z\, dZ_n + X_n\, d\alpha_x + Y_n\, d\alpha_y + Z_n\, d\alpha_z$$

e trasformando i tre ultimi termini secondo le (41) si ottiene:

$$dN_n = \alpha_x\, dX_n + \alpha_y\, dY_n + \alpha_z\, dZ_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_n}{\partial \alpha_x} d\alpha_x + \frac{\partial N_n}{\partial \alpha_y} d\alpha_y + \frac{\partial N_n}{\partial \alpha_z} d\alpha_z\right),$$

ossia:

$$dN_n = \alpha_x\, dX_n + \alpha_y\, dY_n + \alpha_z\, dZ_n + \frac{1}{2}\, dN_n$$

ed infine:

$$\frac{1}{2}\, dN_n = \alpha_x\, dX_n + \alpha_y\, dY_n + \alpha_z\, dZ_n$$

da cui si deducono le seguenti:

$$\boxed{\alpha_x = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial X_n} \quad ; \quad \alpha_y = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial Y_n} \quad ; \quad \alpha_z = \frac{1}{2}\frac{\partial N_n}{\partial Z_n}\,.} \tag{42}$$

Possiamo dunque enunciare:

le componenti ortogonali di pressione sono le semiderivate della componente normale, rispetto ai coseni di direzione della normale all'elemento di area considerato;

e viceversa:

i coseni di direzione della normale all'elemento, sono le semiderivate della componente normale della pressione sullo stesso elemento, rispetto alle componenti ortogonali di pressione.

20. Ellissoide di Lamé. Quadriche di pressione o di direzione.

Poniamo ora:

$$N_n = 2\varphi\,(X_n\,, Y_n\,, Z_n) \tag{43}$$

p. 60

essendo 2φ la funzione quadratica omogenea delle componenti ortogonali di pressione, la quale esprime la N_n secondo la (40).

Ciò posto, le (42) divengono:

$$\alpha_x = \frac{\partial\varphi}{\partial X_n} \quad ; \quad \alpha_y = \frac{\partial\varphi}{\partial Y_n} \quad ; \quad \alpha_z = \frac{\partial\varphi}{\partial Z_n} \tag{44}$$

da cui, quadrando e sommando, per la ben nota relazione si trova:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z_n}\right)^2 = 1.} \tag{45}$$

Si noti che le $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_n}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_n}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z_n}$ sono funzioni lineari omogenee delle X_n, Y_n, Z_n (poichè la φ è quadratica omogenea); quindi per quanto è noto dalla geometria analitica, risulta che se X_n, Y_n, Z_n si considerano come coordinate di un punto, l'equazione (45) rappresenta un ellissoide, avente il centro nell'origine. Ora le X_n, Y_n, Z_n sono le coordinate dell'estremo del vettore F_n, sopra definito, condotto a partire dall'origine degli assi, che è il punto M generico del nostro corpo continuo; il luogo di detto estremo del vettore è dunque l'ellissoide (45), il quale costituisce, per così dire, il diagramma polare nello spazio delle pressioni F_n agenti sui varî elementi di area piana di normale n condotti per il punto M considerato.

Esso si chiama *ellissoide di Lamé.*

Se ora, sempre considerando X_n, Y_n, Z_n come coordinate di punto, prendiamo in esame le quadriche di equazione:

$$\boxed{\varphi = \text{costante}} \tag{46}$$

si nota che quella tra esse, la quale passa per il punto X_n, Y_n, Z_n, ha nello stesso punto la normale avente i coseni direttori proporzionali alle $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_n}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_n}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z_n}$, che sono, per le (44) pure i coseni direttori della normale all'elemento su cui si esercita la F_n, di componenti ortogonali X_n, Y_n, Z_n.

Dunque l'elemento piano ora detto è coniugato della direzione di F_n rispetto alle quadriche $\varphi =$ costante.

Perciò esse si dicono *quadriche di pressione*, od anche *quadriche di direzione.*

Ad ogni valore della costante nell'equazione (46) corrisponde una delle dette quadriche, le quali costituiscono un sistema lineare semplicemente infinito (fascio): esse sono, come risulta dalla (46), tutte concentriche ed omotetiche rispetto al centro stesso; *esse hanno tutte gli stessi assi, i quali poi sono anche gli assi dell'ellissoide di Lamé.*

Infatti, se riferiamo dette quadriche ai loro assi, le loro equazioni divengono della forma:

$$2\varphi = AX_n^2 + BY_n^2 + CZ_n^2 = \text{cost.} \tag{46 bis}$$

ed allora evidentemente la (45) diviene:

$$A^2X_n^2 + B^2Y_n^2 + C^2Z_n^2 = 1 \tag{45 bis}$$

il che dimostra che l'ellissoide di Lamé ha gli stessi assi, come s'era enunciato.

Riassumendo, possiamo dire che, *dato un piano passante per M, la pressione che su esso si esercita ha la direzione coniugata del detto piano rispetto alle quadriche di pressione; la grandezza di detta pressione è data dal semidiametro dell' ellissoide di Lamé nella direzione suddetta.*

Inversamente, data la direzione della pressione, si può trovare il piano su cui essa si esercita.

Dall' equazione (46) risulta, com' è ben noto dalla geometria analitica, che il cono asintotico alle quadriche di pressione è rappresentato da:

$$\varphi = 0 \quad ; \tag{47}$$

e dalla (43) risulta pure che su questo cono stanno quelle F_n (di componenti X_n, Y_n, Z_n) per le quali la componente normale N_n è nulla.

Tali pressioni si dicono *pressioni tangenziali,* perchè agiscono tangenzialmente agli elementi piani, sui quali si esercitano.

Il piano su cui si esercita una qualunque di dette pressioni tangenziali deve essere coniugato della direzione di essa rispetto alle quadriche di pressione, in particolare rispetto al cono asintoto (47) e poichè la retta di azione di detta pressione appartiene, come generatrice, al cono asintoto stesso, detto piano risulta tangente a questo cono lungo quella generatrice, perciò il cono (47) è pure l' inviluppo dei piani, sui quali la componente normale di pressione è nulla, ovvero la pressione è soltanto tangenziale. Tale cono si chiama pure *cono di scorrimento,* perchè sulla sua superficie la materia del corpo continuo è sollecitata unicamente a scorrere lungo la superficie stessa.

Le normali per M ai piani tangenti al cono (47) costituiscono un altro cono; esse sono le normali agli elementi, su cui la componente normale è nulla. I coseni di direzione di dette normali soddisfano alla relazione che si ottiene ponendo $N_n = 0$ nella (39), relazione che costituisce l' equazione del cono stesso, espressa in coordinate omogenee nella stella di rette di centro M; volendo l' equazione del cono come luogo di punti, chiamando ξ, η, ζ le coordinate di un punto dell' intorno, rispetto ad una terna di assi uscenti da M, paralleli ordinatamente ad x, y, z, basta sostituire nell' equazione ora detta le coordinate di punto ξ, η, ζ, in luogo delle coordinate di direzione α_x, α_y, α_z; si ottiene così:

$$\boxed{X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2 Y_z \eta\zeta + 2 Z_x \zeta\xi + 2 X_y \xi\eta = 0} \tag{48}$$

o, brevemente indicando con $\psi_{(\xi, \eta, \zeta)}$ il primo membro

$$\psi_{(\xi, \eta, \zeta)} = 0.$$

Esso si chiama il *cono delle componenti normali nulle.*

Detto cono divide la stella di rette di centro M in due regioni, in una delle quali stanno le rette d'azione delle componenti normali positive, (compressioni), e nell'altra stanno invece le direzioni delle componenti normali negative (trazioni).

Esso ha significato ed equazione analoghi a quelli del cono delle dilatazioni nulle, che abbiamo studiato nell'analisi della deformazione [v. N.° 9].

Anche questo cono (48) è asintotico a tutto un fascio di quadriche, rappresentate dall'equazione:

$$\psi_{(\xi\zeta\eta)} = \text{costante} \tag{49}$$

aventi il centro in M, e per assi quelli stessi delle *quadriche di pressione.*

Se il cono (48) è reale, le quadriche (49) sono iperboloidi ad una falda, in una delle due regioni in cui il cono (48) divide lo spazio, ed iperboloidi a due falde nell'altra delle dette regioni. Se il cono (48) invece è immaginario, le quadriche (49) sono ellissoidi.

Esse hanno proprietà analoghe a quelle delle quadriche di deformazione, o di dilatazione, studiate nell'analisi della deformazione, e si possono denominare *quadriche delle componenti normali.*

Se ρ rappresenta il semidiametro di una di queste quadriche, disteso secondo la direzione di coseni $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, le coordinate del suo estremo sono:

$$\xi = \rho\alpha_x \quad ; \quad \eta = \rho\alpha_y \quad ; \quad \zeta = \rho\alpha_z \, ,$$

e sostituendo questi valori nella (49), tenendo presenti la (48) e la (39), si trova:

$$N_n \rho^2 = \text{costante}$$

da cui

$$N_n = \frac{\text{costante}}{\rho^2} \, ;$$

il che vuol dire che una qualunque delle *quadriche delle componenti normali* (49) si può considerare come il *diagramma polare dei reciproci delle radici quadrate delle componenti normali di pressione,* corrispondenti alle singole direzioni uscenti dal punto $M.$

Proprietà analoga a quella riscontrata per le quadriche di deformazione, per ciò che riguarda i valori delle dilatazioni lineari; per quanto si riferisce alla *realtà* dei semidiametri ed al segno delle pressioni, valgono qui osservazioni ed avvertenze conformi a quelle esposte per il caso analogo al N.° 9, pag. 30.

Come già si fece per il cono delle dilatazioni nulle, (N.° 9), anche qui notiamo che i coni $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ possono essere reali od immaginarî, però, essi devono essere *complementari*, poichè i piani tangenti all'uno sono ordinatamente perpendicolari alle generatrici dell'altro, e perciò essi sono entrambi reali od entrambi immaginarî.

Com'è noto, al solito, se essi sono reali le quadriche $\varphi =$ cost. e $\psi =$ cost. sono iperboloidi ad una od a due falde, se invece i coni sono immaginarî, le quadriche sono ellissoidi.

Nel caso speciale della *distribuzione a due dimensioni* [v. N.° 19, (35 bis)...(40 bis)] il cono $\varphi = 0$ si riduce ad una coppia di rette nel piano in cui sono distribuite le pressioni, mentre le quadriche di direzione e l'ellissoide di Lamé si riducono a coniche nello stesso piano; invece il cono $\psi = 0$ si riduce ad una coppia di piani normali al piano della distribuzione e le quadriche delle componenti normali si riducono a cilindri quadrici a generatrici normali al detto piano. Vedremo più particolarmente questa specializzazione nei casi concreti.

21. Elementi e direzioni principali di pressione. Pressioni principali.

Le direzioni degli assi delle quadriche sopra definite si dicono le *direzioni principali di pressione*, gli elementi piani passanti per M e normali ad una qualunque delle direzioni principali si chiamano gli *elementi principali di pressione. Su ciascuno di questi elementi la pressione è tutta normale* (la pressione tangenziale è nulla). Le pressioni sugli elementi principali si dicono *pressioni principali.*

Nel caso speciale in cui le *quadriche* di pressione o di direzione siano sfere, è facile verificare, in base alle formole sopra esposte, che anche l'ellissoide di Lamé e le quadriche delle pressioni normali si riducono a sfere; allora ogni elemento piano si può considerare come elemento principale, su tutti gli elementi piani per M si esercita una pressione normale, che è la stessa per tutti i suddetti elementi, e costituisce la *pressione* nel punto M.

Questo è il caso dei fluidi in riposo, od anche in movimento lento, quando si possa trascurare la viscosità. In tal caso, mancando le pressioni tangenziali, ogni elemento appunto è principale; e se ne deduce che la pressione è indipendente dall'orientazione dell'elemento su cui si esercita; cioè si ricava il *principio di Pascal* ben noto nella fisica e nell'idrostatica.

Se prendiamo come assi coordinati le tre rette principali uscenti da M, indicandole con ξ, η, ζ, le componenti speciali di pressione si riducono alle tre X_ξ, Y_η, Z_ζ, le quali sono precisamente le pressioni principali.

Per conseguenza le relazioni di Cauchy (35) divengono in questo caso:

$$X_n = X_\xi \alpha_\xi \quad ; \quad Y_n = Y_\eta \alpha_\eta \quad ; \quad Z_n = Z_\zeta \alpha_\zeta \,. \tag{49}$$

Inoltre il 2.º membro della (39) si riduce alla somma dei soli termini quadratici nelle α, e cioè:

$$N_n = X_\xi \alpha_\xi^2 + Y_\eta \alpha_\eta^2 + Z_\zeta \alpha_\zeta^2. \tag{50}$$

Combinando le ultime due formole, e ricordando la (43) si trova pure:

$$N_n = 2\varphi(X_n, Y_n, Z_n) = \frac{X_n^2}{X_\xi} + \frac{Y_n^2}{Y_\eta} + \frac{Z_n^2}{Z_\zeta} \,. \tag{51}$$

Perciò, considerando le X_n, Y_n, Z_n come coordinate di punto, l'equazione delle quadriche di pressione è: (46 p. 62)

coordinate del punto

$$\frac{X_n^2}{X_\xi} + \frac{Y_n^2}{Y_\eta} + \frac{Z_n^2}{Z_\zeta} = \text{costante} \tag{52}$$

e l'equazione (45) dell'ellissoide di Lamé diviene:

$$\frac{X_n^2}{X_\xi^2} + \frac{Y_n^2}{Y_\eta^2} + \frac{Z_n^2}{Z_\zeta^2} = 1. \tag{53}$$

Inoltre le *quadriche delle componenti normali*, secondo la (50) hanno l'equazione: ψ = cost. (p. 62)

coordinate del punto

$$X_\xi \xi^2 + Y_\eta \eta^2 + Z_\zeta \zeta^2 = \text{costante}. \tag{54}$$

Quando non siano conosciute le direzioni principali, nè le pressioni principali, se la terna di riferimento xyz è affatto qualunque, la ricerca delle pressioni principali si può fare in modo del tutto analogo a quello seguito nel N.º 10 per ricercare le dilatazioni principali ed i relativi assi.

Invero se P è una pressione principale, (agente cioè normalmente all' elemento piano sul quale essa si esercita), i coseni di direzione di tale pressione sono quelli stessi della normale n all' elemento suddetto, e perciò deve essere:

$$X_n = P\alpha_x = X_x\alpha_x + X_y\alpha_y + X_z\alpha_z$$

e due analoghe; ossia:

$$\left.\begin{array}{l} (X_x - P)\,\alpha_x + X_y\alpha_y + X_z\alpha_z = 0 \\ Y_x\alpha_x + (Y_y - P)\,\alpha_y + Y_z\alpha_z = 0 \\ Z_x\alpha_x + Z_y\alpha_y + (Z_z - P)\,\alpha_z = 0 \end{array}\right\} \qquad (55)$$

Queste costituiscono pure un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle α, il quale deve essere soddisfatto per valori non tutti nulli delle incognite; perciò occorre e basta che sia nullo il determinante dei coefficienti.

Si ottiene così l' equazione seguente:

$$\begin{vmatrix} X_x - P & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - P & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - P \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (56)$$

Essa è di terzo grado in P, ed è analoga all' equazione (26) trovata al N.° 10.

Anche la (56) ha le tre radici tutte reali, come si potrebbe facilmente verificare in modo diretto, e come del resto risulta dal fatto che tali radici conducono alla determinazione degli assi di una quadrica a centro.

Dette tre radici sono appunto le pressioni principali X_ξ, Y_η, Z_ζ sopra considerate.

Sostituendo queste una alla volta nelle (55) si ottengono i coseni di direzione delle rette (o degli assi) principali, notando che le (55) si riducono a due sole condizioni distinte, poichè per la (56) una qualunque di esse è conseguenza delle altre due; ma i detti tre coseni risultano individuati poichè tra essi sussiste la ben nota relazione:

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1.$$

Anche in questo caso, come già si osservò al n.° 10, dalla teoria delle equazioni algebriche si hanno le note relazioni tra le radici ed i coefficienti dell' equazione cubica (56):

$$\left.\begin{aligned} &X_\xi + Y_\eta + Z_\zeta = X_x + Y_y + Z_z \\ &Y_\eta Z_\zeta + Z_\zeta X_\xi + X_\xi Y_\eta = Y_y Z_z + Z_z X_x + X_x Y_y - (Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2) \\ &X_\xi Y_\eta Z_\zeta = X_x Y_y Z_z + 2 Y_z Z_x X_y - (X_x Y_z^2 + Y_y Z_x^2 + Z_z X_y^2) \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Queste relazioni sono le analoghe delle (26) e da esse consegue che i secondi membri hanno valori indipendenti dall' orientazione degli assi coordinati, ossia sono *invarianti* rispetto ad una qualunque trasformazione di coordinate ortogonali; tali valori sono gli *invarianti fondamentali di pressione,* e si possono distinguere rispettivamente in *invariante lineare, quadratico e cubico.*

22. L' analisi delle pressioni in un punto studiata per via geometrica sintetica.

L' analisi fatta nei tre numeri precedenti per conoscere la distribuzione delle pressioni nell' intorno del punto generico M si può condurre per via prevalentemente geometrica sintetica, dimostrando dapprima, con metodo sintetico le proprietà geometriche esposte al N.° 20; dopo di che, riconosciuta l' esistenza delle tre rette principali, e prese queste come assi coordinati, le relazioni studiate nei N.i 17, 18 e 19 assumono senz' altro le forme semplificate (canoniche) esposte nel N.° 21 precedente.

Consideriamo infatti, in prossimità del punto generico M un elemento piano comunque orientato; su esso si eserciterà una pressione agente secondo una retta d' azione p, in generale obliqua rispetto al piano dell' elemento (v. fig. 1).

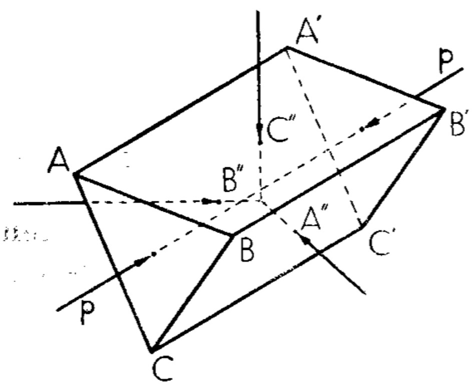


Fig. 1.

Ora nel corpo continuo e nell' intorno di M, immaginiamo separato un prismetto elementare con due basi triangolari ABC ed $A'B'C'$ parallele all' elemento piano sopra considerato, ed avente le facce laterali (romboidali) parallele alla retta p d' azione della pressione esercitantesi sull' area elementare ABC; studiamo poi l' equilibrio di questo prisma elementare, supposto irrigidito.

In tale studio la pressione su ciascuna delle ~~sei~~ 5 facce del prisma si deve ritenere uguale a quella agente sull' elemento piano condotto per M parallelamente alla faccia stessa, e ciò perchè i differenziali delle pressioni introducono dei termini di ordine superiore (3.°), da trascurarsi rispetto alle spinte elementari (di 2.° ordine) che qui dobbiamo computare.

Le spinte elementari sulle basi ABC ed $A'B'C'$ si fanno direttamente equilibrio, perchè agiscono entrambe secondo la retta p, e sono uguali e contrarie, ciò in causa della particolare forma scelta per il prisma, e perchè le dimensioni del prisma sono infinitesime.

Ne consegue che le spinte sulle tre facce laterali romboidali devono essere in equilibrio tra loro, e poichè esse sono tre, esse devono essere complanari e concorrenti in un punto; perciò esse sono contenute nel piano individuato dai tre punti $A''B''C''$, nei quali esse rispettivamente incontrano le facce sulle quali agiscono; ma, essendo infinitesime le dimensioni del prisma, i punti ora detti $A''B''C''$ sono i baricentri dei tre parallelogrammi, facce laterali del prisma considerato, e perciò il piano $A''B''C''$ risulta parallelo alle basi del prisma ABC ed $A'B'C'$; perciò a tali basi sono pure parallele le tre spinte sulle tre facce laterali, spinte contenute nel detto piano $A''B''C''$.

Quindi: *se per M si conduce un elemento piano ABC qualunque, e su questo si ha una pressione agente secondo una retta p (per M) allora sugli elementi piani per M contenenti la p si esercitano pressioni agenti secondo rette contenute nel piano ABC.*

Ciò basta per poter affermare che tra gli elementi piani per M e le rette di azione (pure per M) delle pressioni su essi esercitate, intercede *una corrispondenza biunivoca lineare e reciproca*, ossia una polarità nella stella di rette e piani di centro M.

Come si sa dalla geometria proiettiva, una tale polarità ammette un cono quadrico fondamentale, avente il vertice in M, rispetto al quale cono risultano coniugati il piano di un elemento e la retta di azione della corrispondente pressione.

Tale cono, luogo delle rette che appartengono ciascuna al corrispondente piano polare, ed inviluppo dei piani che contengono ognuno la retta coniugata, non è altro che il *cono degli scorrimenti*, considerato per altra via nel N.° 20, a cui rimandiamo per confronto.

Le quadriche aventi questo come cono asintotico sono le *quadriche di pressione o di direzione* studiate pure al N.° 20, come risulta dal loro evidente comportamento rispetto alla corrispondenza polare or ora definita.

Gli assi del detto cono, (comuni alle quadriche di pressione), sono, per ragioni ovvie, le *rette principali*, secondo le quali agiscono le *pressioni principali*, ossiano quelle che sono normali agli elementi su cui vengono esercitate.

Le rette per M normali ai piani tangenti al cono degli scorrimenti, costituiscono un altro cono quadrico di vertice M, coassiale col precedente; il secondo cono è pure l' inviluppo dei piani per M normali alle generatrici del primo cono; esso è il *cono delle pressioni normali nulle*, già visto pure al N.° 20; le quadriche aventi questo come cono asintotico sono le *quadriche delle componenti normali*, pure studiate sopra, al N.° citato.

Prese come assi coordinati $\xi \eta \zeta$ le rette principali, e dette X_ξ, Y_η, Z_ζ le pressioni principali, studiando l'equilibrio di un tetraedro elementare, nel modo seguito al N.° 17 per dimostrare le (35), si ottengono le relazioni di Cauchy sotto la forma semplificata, già vista al n.° 20.

$$X_n = X_\xi \alpha_\xi \quad ; \quad Y_n = Y_\eta \alpha_\eta \quad ; \quad Z_n = Z_\zeta \alpha_\zeta ,$$

ed in conseguenza si ricavano le relazioni (50), (51), (52), (53) già esposte, e si ritrova perciò pure l' ellissoide di Lamé. (*)

Si ottengono così, come dev' essere, tutti i risultati esposti nei N.i 19, 20, 21, ma si ricavano e dimostrano per via puramente sintetica, la quale può anche riuscire più semplice ed intuitiva.

23. Interpretazione delle direzioni principali. Linee isostatiche.

In ogni punto M del corpo continuo che consideriamo son definite le tre rette principali e le tre pressioni principali. Ciascuna di queste si può riguardare come un vettore, funzione del punto generico M; si ha così una triplice distribuzione di vettori funzioni del punto, ossia si presentano tre campi vettoriali, tali che in ogni punto i relativi tre vettori sono mutuamente ortogonali.

Si è così condotti a considerare le *linee di forza* di questi campi vettoriali, ossia le *traiettorie delle pressioni principali*, nel senso che a queste locuzioni si attribuisce nel calcolo vettoriale e nelle sue applicazioni allo studio dei campi di forza magnetica, elettrica, gravitazionale, dei campi di velocità ecc.

Esse sono linee in ciascun punto tangenti ad una delle pressioni principali, ciascuna di esse è l' inviluppo di una delle tre rette principali nei punti che si susseguono lungo la linea stessa.

Queste linee costituiscono tre congruenze (o sistemi doppiamente infiniti) mutuamente ortogonali, e si dicono *linee isostatiche*. Poichè secondo queste linee, si trasmettono unicamente pressioni normali, il corpo continuo che studiamo si potrebbe sostituire con un corpo avente struttura filamentosa, con elementi a guisa di fili o bastoncini (fibre), disposti secondo le dette linee, essendo collegato ogni elemento con numerosissimi altri vicinissimi tra loro, disposti secondo linee delle altre due congruenze, senza invece che si abbia alcun diretto legame tra gli elementi contigui disposti secondo linee di una stessa congruenza; con tale sostituzione si otterrebbe un sistema, che, per le date forze esterne, presenterebbe la stessa distribuzione di sforzi interni, la quale si ha nel corpo continuo. Invero, con questa sostituzione si suppone che le varie fibre adiacenti, aventi andamento quasi parallelo (appartenenti alla stessa congruenza), manchino della capacità di trasmettersi mutuamente azioni tangenziali attraverso alle superficie laterali di separazione delle varie fibre; capacità che invece si ha nel corpo continuo dato. Ma per la data distribuzione di forze attraverso alle superficie laterali delle dette fibre non si trasmettono azioni tangenziali, e perciò il comportamento del sistema filamentoso o fibroso sopra descritto è identico a quello del corpo continuo, a cui esso viene sostituito.

Questa proprietà giustifica la denominazione delle *linee isostatiche*.

Nelle pratiche applicazioni la considerazione delle linee isostatiche può tornare utile per realizzare una struttura reticolare o cellulare con elementi esclusivamente compressi o tesi, di resistenza equivalente ad una data struttura continua.

Nello studio dei varî casi particolari (travi, archi, ecc.) che faremo in séguito, avremo occasione di imparare a tracciare dette linee isostatiche.

Per ora è opportuno citare un esempio di struttura continua reticolare realizzata in natura; si tratta del tessuto spugnoso che occupa la parte interna delle epifisi di certe ossa umane, (notando che si dicono epifisi quegli ingrossamenti, che si trovano alle estremità delle ossa lunghe, in corrispondenza delle articolazioni). È noto che le grandi ossa sono costituite da una guaina calcarea compatta esterna, racchiudente la cavità midollare, e che le epifisi sono occupate dal tessuto spugnoso ora citato, il quale è costituito di tante laminette, chiamate *trabecole*; orbene queste sono precisamente disposte secondo le linee isostatiche corrispondenti alle forze esterne, alle quali l' osso risulta soggetto.

Il fenomeno è particolarmente spiccato nell' estremità superiore del femore; un notevole studio comparativo fu fatto dal Culmann nella sua « *Statica grafica* » egli, schematizzando, per semplicità, la forma del femore e la ripartizione delle forze esterne applicate, tracciò le linee isostatiche, le quali mostrano un andamento perfettamente con*cordante con quello delle trabecole ossee, quali si possono vedere in* una sezione longitudinale di un femore.

Anzi fu notato che le dette trabecole ossee si possono trasformare anche nell' uomo già adulto; poichè, se per una qualsiasi causa (frattura, lussazione e simili), qualche osso viene ad assumere stabilmente una posizione anormale, che modifichi sostanzialmente il modo, con cui esso viene sollecitato dalle forze esterne, allora le trabecole si modificano, ed assumono l'andamento delle linee isostatiche corrispondenti al nuovo sistema di forze applicate.

Con tale struttura, mirabilmente appropriata alle sollecitazioni esterne, le ossa raggiungono una resistenza molto elevata, in relazione col peso molto piccolo di materiale resistente in esse utilizzato.