Dalle espressioni delle componenti di δ_1 esposte a pag. 29 si trova

$$\frac{\delta_1 \xi_*}{\varepsilon_{x*}} = \xi_* \quad ; \quad \frac{\delta_1 \eta_*}{\varepsilon_{y*}} = \eta_* \quad ; \quad \frac{\delta_1 \zeta_*}{\varepsilon_{z*}} = \zeta_* \quad ;$$

dalle quali, quadrando e sommando si ottiene:

$$\frac{(\delta_1 \xi_*)^2}{\varepsilon_{x*}^{\,2}} + \frac{(\delta_1 \eta_*)^2}{\varepsilon_{y*}^{\,2}} + \frac{(\delta_1 \zeta_*)^2}{\varepsilon_{z*}^{\,2}} = \rho^2$$

questa è l'equazione di un *ellissoide* che si può considerare come il *diagramma polare dello spostamento dovuto alla deformazione pura*, nel punto generico A a distanza costante ρ dal centro M.

10. Ricerca degli assi e delle dilatazioni principali. — Invarianti di deformazione.

La determinazione degli assi principali, e delle relative dilatazioni, quando siano comunque date le componenti della deformazione riferite ad assi coordinati generici, coincide, per quanto si vide sopra, con quelle degli assi e dei semiassi di una famiglia di quadriche omotetiche; ma può interessare richiamarne qui le modalità, per quanto già note dalla geometria analitica; ciò è utile per mettere in evidenza speciali proprietà della deformazione.

Un punto A situato nell'intorno del punto M sta su uno degli assi principali di deformazione se il suo spostamento δ_1, dovuto alla deformazione pura, è diretto secondo il raggio vettore MA, ossia se per le coordinate di A si verifica:

$$\delta_1 \xi = \varepsilon_a \xi \quad , \quad \delta_1 \eta = \varepsilon_a \eta \quad , \quad \delta_1 \zeta = \varepsilon_a \zeta \; ,$$

essendo ε_a il coefficiente di dilatazione lineare secondo il raggio MA.

Perciò, secondo le (20) e (23) si ha:

$$\left.\begin{aligned}
(\varepsilon_x - \varepsilon_a)\,\xi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\eta + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\,\zeta = 0 \\
\frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\xi + (\varepsilon_y - \varepsilon_a)\,\eta + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\,\zeta = 0 \\
\frac{1}{2}\gamma_{zx}\,\xi + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\,\eta + (\varepsilon_z - \varepsilon_a)\,\zeta = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \qquad (24)$$

Questo è un sistema di equazioni lineari ed omogenee che deve essere soddisfatto per valori non tutti nulli delle $\xi\ \eta\ \zeta$; perciò deve essere nullo il determinante dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_a & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_a & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_a \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Si ha così un' equazione di terzo grado in ε_a; le sue radici sono (1) sempre tutte e tre reali, come sarebbe facile dimostrare direttamente; ma ciò risulta già da quanto si vide sopra, poichè esse ci determinano gli assi di una quadrica a centro. Le tre radici saranno le dilatazioni principali $\varepsilon_{x*}, \varepsilon_{y*}, \varepsilon_{z*}$. Sostituendo queste, una alla volta, nelle (24) si ottengono i rapporti $\xi : \eta : \zeta$, e quindi i coseni direttori dei singoli assi principali.

Dalla teoria delle equazioni algebriche si hanno poi le note relazioni tra le radici ed i coefficienti dell' equazione (25):

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{x*}+\varepsilon_{y*}+\varepsilon_{z*} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \\ &\varepsilon_{y*}\varepsilon_{z*}+\varepsilon_{z*}\varepsilon_{x*}+\varepsilon_{x*}\varepsilon_{y*} = \varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y-\frac{1}{4}\left(\gamma^2_{yz}+\gamma^2_{zx}+\gamma^2_{xy}\right) \\ &\varepsilon_{x*}\varepsilon_{y*}\varepsilon_{z*} = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+\frac{1}{4}\left(\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}-\varepsilon_x\gamma^2_{yz}-\varepsilon_y\gamma^2_{zx}-\varepsilon_z\gamma^2_{xy}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{26}$$

Ne risulta che i secondi membri di queste uguaglianze hanno valori indipendenti dall' orientazione degli assi coordinati, ossia sono invarianti rispetto ad una qualunque trasformazione di coordinate ortogonali.

Essi appunto si chiamano gli *invarianti fondamentali di deformazione*, e rispettivamente si distinguono in invariante lineare, quadratico e cubico.

Si potrebbe dimostrare che esistono anche altri invarianti di deformazione, i quali sono però funzioni degli invarianti fondamentali ora definiti.

Non ci addentriamo nella ricerca che non presenta un immediato interesse per le applicazioni: solo notiamo uno speciale invariante che ha un particolare significato; esso è:

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

[v. le (18)].

(1)

Secondo le (18) e (22) esso è il quadrato della rotazione complessiva dovuta allo spostamento rigido δ_0; è quindi ovvio che il suo valore non deve dipendere dall'orientazione degli assi coordinati.

Un particolare interesse presenta poi l'invariante lineare, che ora passiamo ad esaminare.

11. La dilatazione cubica.

Consideriamo intorno ad M un parallelepipedo rettangolo elementare cogli spigoli orientati secondo gli assi principali $x_* \; y_* \; z_*$ e siano a, b, c le lunghezze dei suoi spigoli che supponiamo al solito infinitesimi, o a questi assimilabili. Il volume del parallelepipedo sarà: $V = abc$.

Per effetto della deformazione i tre spigoli subiranno tre variazioni date da:

$$\delta a = \varepsilon_{x*}\, a \quad , \quad \delta b = \varepsilon_{y*}\, b \quad , \quad \delta c = \varepsilon_{z*}\, c \, ,$$

ed il volume subirà la variazione δV, per calcolare la quale al solito l'incremento δ dovuto alla deformazione si considera e tratta come un differenziale.

Avremo quindi, differenziando il prodotto,

$$\delta V = \delta\,(a\,b\,c) = bc \cdot \delta a + ca \cdot \delta b + a\,b \,.\, \delta c$$

e quindi, per le relazioni precedenti:

$$\delta V = abc\,(\varepsilon_{x*} + \varepsilon_{y*} + \varepsilon_{z*})$$

ossia ancora,

$$\delta V = V\,(\varepsilon_{x*} + \varepsilon_{y*} + \varepsilon_{z*}) \; .$$

Il rapporto $\frac{\delta V}{V}$ tra l'incremento del volume di un elemento ed il volume primitivo si dice *coefficiente di dilatazione cubica*, (od anche brevemente *dilatazione cubica*) e si suole indicare con Θ.

Si ha quindi, tenendo presente la prima delle (26)

$$\Theta = \varepsilon_{x*} + \varepsilon_{y*} + \varepsilon_{z*} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{27}$$

ossia il *coefficiente di dilatazione cubica è la somma dei coefficienti di dilatazione lineare secondo tre rette ortogonali, la quale somma è* *indipendente dall'orientazione di tali rette, e costituisce l'invariante fondamentale lineare di deformazione.*

Notiamo che il ragionamento fatto testè per ricavare Θ si può applicare tal quale anche ad un parallelepipedo rettangolo cogli spigoli orientati secondo tre assi ortogonali $x\ y\ z$ generici, diversi da quelli principali. Infatti il parallelepidedo in tal caso deformandosi non resta più rettangolo, e ciò per effetto degli scorrimenti mutui delle direzioni degli assi, rappresentati dalle $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$; ma questi, potendosi considerare come infinitesimi, fanno variare solamente di infinitesimi di ordine superiore le distanze tra le faccie opposte del parallelepipedo, sicchè si può rigorosamente ritenere che queste distanze varîno solo per effetto delle $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ rispettivamente.

Perciò, ripetendo il ragionamento fatto più sopra, si trova, anche per una terna generica di assi ortogonali, la dilatazione cubica espressa secondo la (27) dalla somma delle tre ε relative ai detti assi.

Avendo fin da principio supposto di considerare deformazioni continue (tali che le u, v, w siano funzioni continue delle coordinate del punto generico) è ovvio che la dilatazione cubica deve essere una funzione definita e continua delle coordinate, avente in ogni punto del solido un unico valore, indipendente quindi dalla forma dell'elemento di volume considerato per definirla: in particolare, se l'elemento stesso si sceglie parallelepipedo rettangolo la Θ deve essere necessariamente indipendente dall'orientazione degli spigoli di questo. D'altra parte la terna xyz ora considerata, si è supposta affatto generica; e quindi il risultato trovato per essa vale pure per un'altra terna ortogonale comunque orientata. Perciò il fatto che la somma $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ sia invariante per una trasformazione di coordinate ortogonali, si può riconoscere direttamente, basandosi sulle ovvie proprietà di continuità della deformazione, anche indipendentemente dalle proprietà algebriche dell'equazione (25), che ci hanno condotto alle (26).

L'espressione della Θ secondo la (27) si può pure assai elegantemente ricavare applicando una formula di trasformazione dovuta al Gauss; la quale vogliamo qui esporre poichè ci tornerà utile pure per altre ricerche.

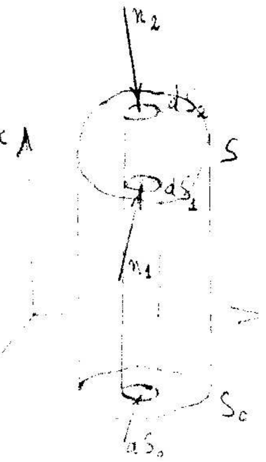
12. Formola di Gauss per la trasformazione di integrali di volume in integrali di superficie e viceversa.

Consideriamo uno spazio V comunque connesso, limitato all'interno di una o più superficie chiuse, finite, che nel loro complesso indicheremo con S.

Nello spazio V ed anche sulla superficie S sia definita una funzione $F(x,y,z)$ delle coordinate del punto generico, finita, continua e regolare, e tale pure sia la sua derivata parziale rispetto alla x, $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Proponiamoci di calcolare l' integrale, esteso a tutto il volume V:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x}\, dV.$$



A questo scopo, riferito lo spazio ad una terna di assi ortogonali xyz, sul piano yz, (cioè $x=0$) la superficie S si projetta in un' area piana, che potremo chiamare S_0, compresa entro uno o più contorni chiusi.

Sia dS_0 un elemento qualunque dell' area S_0 nell' intorno di un punto M_0 di essa; per ogni punto del perimetro di dS_0 conduciamo una retta parallela all' asse x: otteniamo così un cilindro elementare colle generatrici parallele all' asse x, ed avente per sezione retta l' elemento d' area dS_0. Tale cilindro stacca sulla superficie S un numero *pari* di elementi superficiali: (*pari*, perchè la superficie, o le sue parti si sono supposte finite e chiuse).

Tali elementi verranno indicati con dS_1, dS_2, $dS_3, \ldots, dS_{2p}$ (essendo p un numero intero), nell' ordine in cui si incontrano percorrendo la parallela ad x per M_0 nel senso delle x positive crescenti, da $x=-\infty$ ad $x=+\infty$.

Siano M_1, M_2, $M_3, \ldots M_{2p}$ i punti in cui detta retta incontra la superficie S, (punti appartenenti certo ai detti elementi d' area), e siano $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{2p}$ i valori della coordinata x ad essi corrispondenti.

In essi punti potremo considerare le normali alla superficie S, scegliendo su esse le *direzioni positive rivolte verso l' interno dello spazio* V: indichiamole con $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2p}$.

E chiaro che, in ogni intersezione M di posto dispari, ove nel senso delle x positive crescenti il cilindro elementare *entra* nello spazio V, l' angolo formato dalla direzione positiva della normale n, colla direzione positiva dell' asse x è sempre acuto; invece tale angolo risulta sempre ottuso nelle intersezioni di posto pari, ove il cilindro elementare *esce* dallo spazio V.

Ora l' area elementare dS_0 si può considerare come la proiezione sul piano yz delle aree elementari $dS_1, dS_2, dS_3, \ldots, dS_{2p}$, e perciò, tenendo presente l' osservazione testè fatta riguardo agli angoli d' inclinazione delle normali, si deve avere:

$$dS_0 = dS_1 \cos(n_1x) = -dS_2 \cos(n_2x) = dS_3 \cos(n_3x) =$$
$$= -dS_4 \cos(n_4x) = \ldots\ldots\ldots = -dS_{2p} \cos(n_{2p}x).$$

Ora, per calcolare l'integrale sopra proposto $\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial x}\, dV$, possiamo anzitutto esprimere l'elemento generico di volume, mediante l'area elementare dS_0, avendosi:

$$dV = dS_0 \cdot dx \ ,$$

ed inoltre possiamo nell'integrando mettere in evidenza il fattore comune dS_0, facendo così comparire il contributo che all'integrale portano gli elementi di volume racchiusi nel cilindro sopra descritto di sezione dS_0; tale contributo è un integrale (o somma di integrali) eseguito rispetto ad x: esso a sua volta va integrato rispetto a dS_0 ed esteso a tutta l'area S_0 per ottenere l'integrale cercato.

Si trova quindi:

$$\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial x}\, dV = \int\limits_{S_0} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \ldots + \int_{x_{2p-1}}^{x_{2p}} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \right) dS_0 \ .$$

Ora, indicando con $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{2p}$ i valori che la funzione data F assume nei punti $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{2p}$ rispettivamente, per le ipotesi fatte sulla continuità della F e della sua derivata, si trova che gli integrali rispetto alla x che compaiono nella parentesi dell'ultima espressione, sono rispettivamente gli incrementi della funzione F tra x_1 ed x_2, tra x_3 ed x_4 ecc.... ossia sono le differenze:

$$F_2 - F_1 \quad , \quad F_4 - F_3, \ldots, F_{2p} - F_{2p-1} \ .$$

Perciò si ha:

$$\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial x}\, dV = -\int\limits_{S_0} (F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_{2p-1} - F_{2p})\, dS_0$$

ove l'integrazione a secondo membro va estesa a tutta l'area S_0.

Ora, eseguendo il prodotto a secondo membro, e sostituendo ordinatamente a dS_0 le sue espressioni mediante i $dS_1, dS_2 \ldots$ ecc. sopra trovate, si ottiene:

$$\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial x}\, dV = -\int F_1 \cos(n_1 x)\, dS_1 - \int F_2 \cos(n_2 x)\, dS_2 - \ldots$$
$$\ldots - \int F_{2p} \cos(n_{2p} x)\, dS_{2p}$$

ove ciascuno degli integrali di superficie a secondo membro va esteso, ordinatamente ad una delle regioni della superficie S, le quali si proiettano ciascuna una ed una sola volta su parte della S_0.

E ovvio che tali regioni nel loro complesso costituiscono tutta e sola la superficie S, e perciò più brevemente si può scrivere:

$$\boxed{\int_V \frac{\partial F}{\partial x}\, dV = -\int_S F \cos(nx)\, dS\,.} \tag{28}$$

Si ottiene così la relazione, che cercavamo, la quale trasforma un integrale esteso ad uno spazio V in un altro esteso alla superficie che limita lo spazio stesso, e viceversa.

E ovvio che la (28) può essere interpretata anche *a due dimensioni*, cioè in un'area piana A limitata da un contorno piano chiuso e finito s; entrambi riferiti a due assi x ed y nel loro piano; in tal caso l'integrale a primo membro s'intende fatto rispetto a dA ed esteso all'area A; quello a secondo membro, fatto rispetto a ds ed esteso alla linea contorno s.

$\int_A \frac{\partial F}{\partial x}\, dA = -\int_s F \cos(nx)$

Essa si denota come la *formola di Gauss* (e si dice pure talvolta il *lemma di Gauss*).

La formola (28) si può generalizzare, quando esistano tre funzioni F_1, F_2, F_3, delle coordinate, le quali siano finite, continue e regolari in tutto lo spazio che consideriamo, ed aventi pure finite, continue e regolari le derivate parziali rispettivamente fatte rispetto ad x, ad y ed a z.

Allora in virtù della (28) si avrà:

$$\int_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV = -\int_S F_1 \cos(nx)\, dS$$

$$\int_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dV = -\int_S F_2 \cos(ny)\, dS$$

$$\int_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV = -\int_S F_3 \cos(nz)\, dS$$

e da queste, sommando membro a membro, si ottiene:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV = \\ &= -\int_S [F_1 \cos(nx) + F_2 \cos(ny) + F_3 \cos(nz)]\, dS\;;\end{aligned}} \tag{29}$$

questa si chiama la *formola di Gauss generalizzata*, ed è feconda di numerose utili applicazioni.

Conseguenze della formola di Gauss.

a. Teorema della divergenza o del flusso.

La stessa formola (29) acquista particolare significato se le tre funzioni F_1, F_2, F_3 sono in particolare i valori scalari delle componenti di un vettore $\overline{F}$, definito in ogni punto dello spazio considerato, e perciò funzione delle coordinate.

In tal caso, secondo l'uso invalso nel calcolo vettoriale, la funzione da integrare a primo membro nella (29) si chiama la *divergenza* del dato vettore F, e si nota ponendo:

$$\boxed{div\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}\ ;$$

questa è ovviamente una grandezza scalare.

Inoltre la funzione da integrare a secondo membro nella (29) è la proiezione del vettore F sulla direzione della normale n alla superficie S presa positiva verso l'interno della superficie stessa: il prodotto di tale proiezione per l'elemento di area di S si dice *il flusso del vettore F attraverso all'elemento dS* (flusso elementare), preso *positivo quando entra in S*, (e perciò *negativo quando esce da S*).

Quindi il secondo membro della (29) (tenuto presente il segno —) è il flusso di F *uscente* dalla superficie chiusa S.

Ciò posto la (29) esprime *il teorema della divergenza o del flusso* che si enuncia come segue:

L'integrale della divergenza esteso al volume V *è uguale al flusso uscente dalla superficie* S *che racchiude il detto volume.*

Colle notazioni del calcolo vettoriale la proiezione di F sulla normale *entrante* nella superficie S si esprime:

$$\overline{F} \times \overline{n}$$

essendo n un vettore di lunghezza 1, diretto secondo la normale entrante, ed essendo $\times$ il simbolo *del prodotto interno o scalare dei due vettori.*

Con ciò il predetto teorema si può esprimere brevemente come segue:

$$\int_A div\, \overline{F} \cdot dA = -\int_s \overline{F} \times \overline{n}\, ds$$

$$\boxed{\int_V \text{div}\ F d V = -\int_S F \times \overline{n}\, dS} \qquad [29\,a)]$$

Ovviamente questo teorema si può pure interpetrare a sole due dimensioni quando il vettore, parallelo ad un piano xy, sia definito in un' area A di questo piano, limitata da un contorno chiuso e finito s.

b. TEOREMA DEL GRADIENTE.

Ancora dal calcolo vettoriale sappiamo che, data una funzione Φ delle coordinate, un vettore F tale che le sue componenti abbiano per valori scalari rispettivamente:

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad ;$$

si chiama *il gradiente della funzione* Φ e si indica scrivendo:

$$\overline{F} = \text{grad}\ \Phi$$

Così [illegible] potenziale -

In tal caso si dice pure che la Φ è la *funzione potenziale* (o brevemente il *potenziale*) del vettore F.

Applichiamo ora la (28) alla funzione Φ, rispetto ai tre assi, e consideriamo le grandezze relative come vettori diretti rispettivamente secondo gli assi stessi; avremo:

$$\int_V \overline{X} dV = - \int_S \Phi \, \overline{\cos(nx)} \, dS$$

$$\int_V \overline{Y} dV = - \int_S \Phi \, \overline{\cos(ny)} \, dS$$

$$\int_V \overline{Z} dV = - \int_S \Phi \, \overline{\cos(nz)} \, dS$$

intendendo che $\overline{\cos(nx)}$, $\overline{\cos(ny)}$, $\overline{\cos(nz)}$ siano essi pure vettori diretti rispettivamente secondo i tre assi, di modo che risulti, sommando *geometricamente*:

$$\overline{\cos(nx)} + \overline{\cos(ny)} + \overline{\cos(nz)} = \overline{n}$$

essendo, come sopra, n il vettore unitario diretto secondo la normale interna.

Fatta quindi la somma *geometrica* o *vettoriale* delle tre relazioni precedenti:

$$\int_V (\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) \, dV = - \int_S \Phi \cdot \overline{n} dS$$

ed essendo:

$$X+Y+Z=\bar{F}=\text{grad }\Phi$$

si ha infine:

$$\boxed{\int_V \text{grad }\Phi\, dV = -\int_S \Phi \cdot \bar{n} dS} \qquad [29\ b)]$$

Questa relazione esprime il *teorema del gradiente.*

A titolo d'esempio e di notizia vogliamo citare una applicazione.

Consideriamo una massa fluida in riposo, soggetta ad un campo di forza di cui sia F l'intensità riferita all'unità di massa; sia ρ la densità, p la pressione e queste tre grandezze siano funzioni delle coordinate.

Secondo i criterî che esporremo tra breve a proposito dell'equilibrio di una qualsiasi particella di un corpo continuo (equilibrio indefinito), si dimostra facilmente che si ha in ogni punto del fluido:

$$\rho\bar{F}=\text{grad } p$$

(espressione vettoriale della legge fondamentale dell'idrostatica).

Considerato poi in seno alla massa un volume V racchiuso da una superficie S, ed applicando il *teorema del gradiente* espresso dalla [29, b)]. troviamo:

$$\int_V \rho\bar{F} dV = -\int_S p \cdot \bar{n} dS$$

L'equilibrio vale *a fortiori* anche se il volume V si immagina irrigidito.

Perciò l'ultima relazione esprime il *principio di Archimede generalizzato* per ρ ed F variabili da punto a punto.

c. Teorema della circuitazione, o del flusso di rotazione. (Teorema di Stokes).

Dato un vettore F funzione delle coordinate ed una linea s, in un punto di questa indichiamo con F_s la componente di F secondo la tangente alla linea; se t è un vettore unitario diretto secondo la tangente alla linea colle notazioni del calcolo vettoriale si ha:

$$F_s = F \times t$$

Ciò posto, l'integrale:

$$\int_s F_s ds$$

esteso alla linea s si chiama *integrale del vettore lungo la linea* od anche *circuitazione del vettore secondo la linea.*

È noto che per una linea chiusa, se il vettore *è un gradiente* — ossia se *ammette un potenziale* — la *circuitazione è zero*; è pure noto che condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del potenziale è che sia nulla la *rotazione* del dato vettore [v. (18), pag. 26]; in altri termini ciò si enuncia: *la rotazione di un gradiente è sempre nulla.*

Supponiamo ora che il vettore F, *non* ammetta potenziale, cioè che sia diversa da zero la sua *rotazione*; e vogliamo calcolarne la circuitazione lungo una linea chiusa qualunque.

Cominciamo col considerare una linea piana; senza diminuire la generalità potremo scegliere nel suo piano gli assi x ed y; perciò se u, v, w sono le componenti del vettore secondo i tre assi, ed essendo: $\cos(tx)$, $\cos(ty)$, 0, i coseni direttori della tangente alla linea s, avremo:

$$\int_s F_s ds = \int_s [u \cos(tx) + v \cos(ty)]\, ds$$

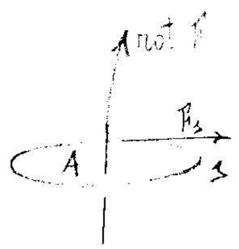
Supponiamo il verso di t tale che il contorno chiuso s venga percorso nel senso rotatorio da $+x$ a $+y$; allora, se n è la normale ad s, diretta verso l'interno dell'area racchiusa, si ha:

$$\cos(tx) = \cos(ny)$$
$$\cos(ty) = -\cos(nx)$$

Sostituendo nell'espressione precedente, si ottiene:

$$\int_s F_s ds = -\int_s [v \cos(nx) - u \cos(ny)]\, ds$$

Applicando ora al secondo membro la *formola di Gauss* (28) interpretata a due dimensioni, si trova infine:



$$\boxed{\int_s F_s ds = \int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA} \qquad [29\ c)]$$

essendo A l'area piana racchiusa nella linea-contorno s.

Secondo le (18), l'integrale a secondo membro della [29 *c*)] rappresenta il *doppio del flusso della rotazione* del vettore dato, attraverso l'area A racchiusa in s: ed infatti delle tre componenti del *vettore rotazione* le prime due p e q, essendo parallele al piano xy in cui è contenuta A, dànno flusso nullo, mentre il flusso di χr è proprio quello espresso dal detto secondo membro.

La [29 *c*)] esprime il *teorema di Stokes* per un contorno piano.

Dall'ultima formola risulta pure che il verso della circuitazione è proprio quello individuato dalla rotazione.

Il teorema si può facilmente estendere al caso di un contorno s comunque sghembo.

In tal caso si può immaginare una superficie aperta S avente per *orlo* il dato contorno s; tale superficie sarà necessariamente curva, poichè il suo *orlo* non è piano. Possiamo immaginarla scomposta in infiniti elementi infinitesimi dS, ciascuno dei quali sarà limitato da un contorno, che avrà tratti in comune con i contorni degli elementi dS circostanti.

Poichè ogni elemento di area ed il relativo contorno si possono — a meno di infinitesimi di ordine superiore — considerare piani, a ciascuno di essi è applicabile il teorema espresso dalla [29 c)]; facendo poi la somma dei flussi elementari di rotazione, si ottiene l'analogo flusso totale di rotazione attraverso a tutta la superficie S; il doppio di esso sarà poi uguale alla somma delle circuitazioni elementari; risulta però che tutti i tratti di contorni elementari comuni a due elementi contigui, nel valutare le rispettive circuitazioni, vengono percorsi in sensi contrarî; perciò i rispettivi contributi alla somma delle circuitazioni sono opposti e si elidono; restano liberi solo i contributi relativi ai tratti appartenenti al contorno esterno s, dei quali la somma costituisce la circuitazione del dato vettore lungo il contorno dato s.

Il teorema resta così dimostrato anche per un contorno sghembo.

Evidentemente la circuitazione lungo il dato contorno s ha un unico valore ben determinato: ne consegue che il flusso di rotazione attraversante la superficie S è indipendente dalla forma di questa, cioè resta lo stesso anche attraverso ad altre superficie S_1, S_2, ecc.... aventi però tutte come *orlo* il dato contorno s.

Questa proprietà viene anche confermata dal fatto — già espresso dalla (18 bis) — che la *divergenza del vettore rotazione è ovunque nulla* e quindi per il teorema della divergenza deve essere nullo il flusso di rotazione attraverso ad una qualunque superficie chiusa.

Perciò il flusso che si considera nel teorema dimostrato dipende solo dal dato contorno s. Com'è ben noto nel calcolo vettoriale, essendo nulla *la divergenza del vettore rotazione*, le *traiettorie* o *linee di flusso* della rotazione stessa devono essere linee chiuse al finito od all' infinito: è pure notoria la denominazione del *tubo di flusso elementare*, che è lo spazio limitato da tutte le linee di flusso che si appoggiano al contorno di un'area elementare dS; [ancora per essere nulla la relativa divergenza, il flusso di rotazione in un tubo qualunque si mantiene invariato lungo il tubo stesso].

Il flusso che secondo il teorema dimostrato è uguale alla metà della circuitazione del dato vettore lungo la linea s è la somma dei flussi di quei tubi di flusso che *si concatenano* col dato contorno chiuso s, in quanto ciascuno di essi è con questo disposto e connesso come un anello di una catena con l'anello successivo. In altri termini ciò si può anche esprimere dicendo che il contorno s rispetto ad un tubo con esso concatenato è così disposto da non potere ridurre a zero le sue dimensioni per una indefinita contrazione, senza aprirsi o senza tagliare la superficie del tubo. Il flusso di rotazione ora definito si chiama anche *flusso di rotazione concatenato col dato contorno chiuso* s.

Per un contorno comunque sghembo e contorto è necessario precisare il senso o segno del flusso concatenato, in relazione col senso o segno della circuitazione.

A tale scopo vale la regola seguente, che è facilissimo verificare: — Si scelga (arbitrariamente) sulla linea s un senso positivo per valutare la circuitazione; in immediata vicinanza di un punto P di s si consideri un vettore rotazione $\overline{\omega}$ che attraversi la superficie S (limitata da s) e che, secondo la convenzione fatta per il verso del vettore rotazione, abbia verso tale da provocare in P uno spostamento (od una velocità) nel senso scelto come positivo su s. Il vettore ω individua sulla superficie due faccie; quella verso cui è diretto, che diremo *faccia positiva* e quella da cui si allontana, che diremo *faccia negativa*. Ciò posto, al fine di calcolare la circuitazione positiva nel senso scelto su s, noi dovremo considerare positivi i flussi di rotazione diretti verso la faccia positiva di S, e negativi quelli invece diretti verso la faccia negativa.

Ciò precisa completamente il segno del flusso totale concatenato col contorno dato s.

Il teorema ora dimostrato vale pure per una linea s chiusa, anche *sconnessa*, cioè costituita di più parti separate, ciascuna delle quali dovrà a sua volta essere chiusa: la circuitazione complessiva sarà la somma delle circuitazioni parziali per le singole parti: lo stesso si dica per i flussi concatenati.

Il teorema qui esposto, dovuto a Stokes, si enuncia come segue:

La circuitazione di un vettore secondo una linea chiusa è uguale al doppio del flusso di rotazione (o vorticale) concatenato colla data linea, (tenendo presenti per i segni le osservazioni fatte poco sopra).

Esso è molto importante per la meccanica dei sistemi continui (elasticità, idrodinamica, aerodinamica), e per varî rami della fisica (elettromagnetismo); noi ne faremo interessanti applicazioni nello studio della *torsione* dei prismi o cilindri.

13. Espressione della dilatazione cubica ricavata dal teorema della divergenza.

È facilissimo verificare che nel corpo continuo che si deforma, il flusso del vettore spostamento (di componenti u, v, w) uscente da una superficie chiusa S, è l'incremento δV che per effetto della deformazione è subìto dal volume V racchiuso nella stessa superficie S. Per il teorema della divergenza dimostrato al N.° 12. *a*), ed espresso dalla [29, *a*)], tale flusso deve essere uguale all'integrale della *divergenza* del vettore spostamento (u, v, w), esteso a tutto il volume V ora definito. Per la nota espressione della divergenza, avremo dunque:

$$\delta V = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV$$

Questa relazione deve valere in generale per qualsiasi volume V, racchiuso in una superficie S di forma e di dimensioni affatto qualunque. Perciò deve essere in ogni punto:

$$d\delta V = \delta dV = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV$$

Ma, per definizione, la dilatazione cubica Θ è:

$$\Theta = \frac{\delta dV}{dV} \quad ;$$

e ricordando le prime tre delle (10), si ha infine:

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad ;$$

si ritrova cioè la (27), ferma restando l'osservazione fatta a suo tempo a pag. 34, N.° 11, sull' *invarianza* della detta espressione rispetto ad un cambiamento della terna ortogonale di riferimento.

14. RELAZIONI TRA LE COMPONENTI DI DEFORMAZIONE: CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI u, v, w.

È opportuno ora riprendere a considerare le relazioni (16) e (17), (v. N.° 8), per riconoscere che esse, oltre che necessarie, sono anche sufficienti per l'esistenza e la continuità delle funzioni u, v, w.

Il differenziale totale di una funzione u delle coordinate, definita e continua, è espresso da:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \quad ;$$

p. 26

ricordando le (10), (18) e (19), questa espressione si può trasformare così:

$$du = \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} - r\right)dy + \left(\frac{1}{2}\gamma_{zx} + q\right)dz$$

ed analoghe espressioni si hanno pure per dv e dw:

$$dv = \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + r\right)dx + \varepsilon_y dy + \left(\frac{1}{2}\gamma_{yz} - p\right)dz$$

$$dw = \left(\frac{1}{2}\gamma_{zx} - q\right)dx + \left(\frac{1}{2}\gamma_{yz} + p\right)dy + \varepsilon_z dz$$

Dal calcolo sono ben note le condizioni a cui devono soddisfare i coefficienti di una *forma differenziale* (del tipo dei secondi membri delle tre precedenti espressioni), perchè essa *forma* sia il differenziale totale di una funzione definita e continua.

Applicando tali condizioni ai coefficienti dei secondi membri delle tre ultime espressioni, si trovano nove relazioni, distinte in tre diversi gruppi.

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \quad ; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} \quad ;\end{gathered}} \qquad \text{(1.° Gruppo)}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial y} \; ;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial z} \; ; \qquad \text{(2.° Gruppo)}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \; ;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \; ; \qquad \text{(3.° Gruppo)}$$

Come è naturale, da ciascun gruppo si possono ricavare gli altri due con permutazioni circolari dei simboli.

Orbene derivando rispetto a z la prima del 2.° gruppo, derivando rispetto ad y la seconda del 3.° e sommando, si ritrova la prima delle (16); in modo analogo, o permutando circolarmente i simboli, si ritrovano le altre due delle stesse.

Inoltre, derivando rispetto a z la prima del 1.° gruppo, derivando rispetto ad y la seconda dello stesso 1.° gruppo, sommando membro a membro e mettendo in evidenza a secondo membro l'*operazione* $\frac{\partial}{\partial x}$, si trova:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

Sottraendo poi membro a membro la terza del 2.° gruppo dalla terza del 3.° gruppo, si trova ovviamente:

$$\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}$$

e sostituendo nel secondo membro della relazione precedente si ritrova la prima delle (17); in modo analogo, o con permutazioni circolari si deducono la seconda e la terza delle stesse.

Sarebbe facile verificare che le (16) e (17) sono le sole relazioni *indipendenti* o *distinte* (cioè non deducibili l'una dalle altre) che si possano ricavare per derivazione dalle condizioni dei tre gruppi sopra scritti.

Ne consegue che le *condizioni di congruenza* (16) e (17) sono necessarie (— ciò che già sapevamo —) e sufficienti perché le u, v, w siano funzioni definite e continue.

15. Formule di trasformazione di coordinate.

Quando eventualmente occorra cambiare la terna di assi coordinati, possono essere utili delle formule che ci esprimano le componenti di deformazione relative ai nuovi assi, in funzione delle analoghe componenti riferite agli assi antichi. A tale scopo servono ovviamente le (11) e (12), applicate opportunamente alle rette della nuova terna ortogonale di riferimento.

15. *bis*. Applicabilità del presente capitolo allo studio del moto dei fluidi.

In questo capitolo abbiamo studiato l'analisi della deformazione infinitesima di un qualunque corpo continuo: i risultati sono valevoli qualunque sia la natura del corpo, solido, liquido o gasoso.

Occorre precisare le modalità dell'applicazione allo studio del moto dei fluidi.

Si abbia una massa fluida in movimento, e siano u v w le componenti della velocità del punto generico del fluido: lo spostamento dello stesso punto nell'intervallo infinitesimo di tempo dt avrà per componenti udt, vdt, wdt; a questo spostamento sono senz'altro applicabili tutti i risultati di questo capitolo: tutte le formule in tale caso conterranno il fattore comune dt, che si potrà sopprimere.

Nelle formule risultanti le ε e le γ assumono così i significati di *velocità di dilatazione* e *velocità di scorrimento*, la Θ rappresenta la *velocità di dilatazione cubica* e le p q r sono le componenti della *velocità angolare della rotazione rigida di una particella elementare.*

Così interpretati, i risultati di questo capitolo costituiscono base fondamentale della *cinematica dei fluidi*, e rendono segnalati servizî nei campi dell'*idrodinamica* e dell'*aerodinamica.*