CAPITOLO II.

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

4. Esporremo ora alcuni principî generali sulla meccanica dei corpi continui deformabili.

Diremo *continuo* un corpo, il quale occupi un certo volume con continuità, ossia in modo tale che ogni elemento comunque scelto e comunque piccolo del detto volume sia occupato da particelle del corpo considerato.

Inoltre il corpo continuo si dice *deformabile* quando la sua forma, (ossia la reciproca posizione dei vari suoi punti) può venir modificata per l'azione di forze esterne agenti sulla superficie esterna (forze superficiali), ovvero su ogni elemento di massa (forze di massa). Consideriamo per ora solo corpi *a tre dimensioni,* cioè tali che nessuna loro dimensione sia trascurabile rispetto alle altre; quindi per ora non prendiamo in esame le lamine, le verghe sottili, i fili, e simili.

I corpi continui deformabili possono essere corpi solidi (in vario grado elastici), liquidi o gassosi.

Lo studio che qui ora facciamo inizialmente sulle deformazioni dei sistemi continui, vale in generale per qualsiasi corpo, solido, liquido o gassoso; a suo tempo prenderemo poi in considerazione le proprietà dei corpi elastici, ed a questi limiteremo l'applicazione dei risultati generali ottenuti.

5. Deformazione di una particella (elemento di volume) di un corpo continuo.

Prendiamo per ora in esame solo le deformazioni di un corpo continuo, prescindendo da altri cambiamenti dello stato fisico; così pure studiamo dapprima la deformazione dal punto di vista esclusivamente geometrico, non occupandoci per ora delle cause che la possono produrre.

Diremo *stato iniziale* lo stato del corpo non deformato; per ricavare lo stato finale dovremo conoscere gli spostamenti subiti dai singoli punti del corpo continuo.

Nell' interno del corpo non deformato, (od allo stato naturale) consideriamo un punto generico M di coordinate x, y, z, riferiti ad una terna di assi ortogonali fissi. Dopo la deformazione il punto M assumerà un' altra posizione M'; il segmento MM' è lo *spostamento* del punto M, e le sue proiezioni sui tre assi coordinati si dicono le *componenti dello spostamento*; esse verranno qui indicate con u, v, w, e saranno funzioni delle coordinate xyz del punto M. Potremo fare l'ipotesi che tali funzioni siano, nel campo che consideriamo, regolari, continue, e fornite delle derivate prime.

Conforme poi a quanto è stato precisato nel N. 2 (Cap. precedente), supporremo che le u, v, w siano ovunque piccolissime, ed assimilabili ad infinitesimi, nel senso che i loro prodotti o le loro potenze dal secondo ordine inclusivamente in poi siano trascurabili. Alla stessa stregua considereremo tutti gli incrementi dovuti alla deformazione, i quali verranno indicati genericamente col simbolo incrementale δ, che si riguarderà e tratterà come un differenziale.

Consideriamo intorno al punto M una piccola porzione (particella infinitesima) del corpo continuo che studiamo; in detta porzione sia A un punto generico, di coordinate $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$: in altri termini siano ξ, η, ζ le coordinate di A riferite ad una terna di assi ortogonali uscenti dal punto M, parallelamente agli assi fissi xyz sopracitati. Dopo la deformazione il punto A assumerà una nuova posizione A'; l' insieme di tutti i punti come A' costituisce un nuovo « intorno » del punto M', « intorno » che si potrà considerare come il *deformato del dato intorno del punto M.*

Indicheremo con ξ_1, η_1, ζ_1 le coordinate di A' rispetto agli assi uscenti dal punto M; in alcuni problemi poi tornerà più comodo riferire l'intorno deformato, (e perciò il punto A'), ad una terna di assi paralleli a quelli coordinati, ed uscenti dal punto M' spostato; indicheremo con ξ', η', ζ' le coordinate di A' rispetto a questa nuova terna.

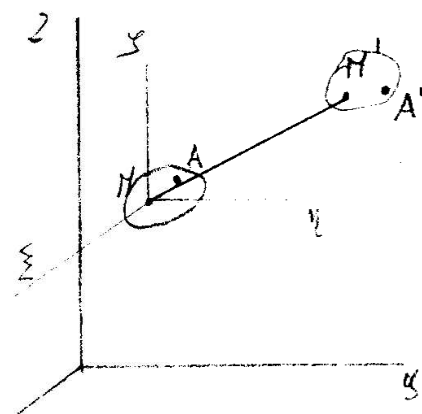
Tra le varie coordinate così definite devono ovviamente sussistere le relazioni:

$$\xi_1 = \xi' + u \quad : \quad \eta_1 = \eta' + v \quad : \quad \zeta_1 = \zeta' + w \tag{1}$$

$MM' = u, v, w$

D'altra parte, ricordando che u, v, w sono funzioni continue delle coordinate xyz, avremo pure:

$$\xi_1 = \xi' + u_{(xyz)} = \xi + u_{(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}$$



e due analoghe:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \eta' + v_{(xyz)} = \eta + v_{(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)} \\ \zeta_1 &= \zeta' + w_{(xyz)} = \zeta + w_{(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ora ricordiamo dal calcolo la relazione, (sviluppo in serie):

$$u_{(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)} = u_{(xyz)} + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \dots\right)^2 + \dots$$

Avendo supposto che l'« intorno » considerato presso il punto M sia molto piccolo, e perciò tali pure siano le ξ, η, ζ, si possono trascurare i termini di ordine secondo, terzo, ecc.

Si deve poi notare che in tutti i problemi tecnici che c'interessano, anche le derivate prime delle u, v, w, rispetto alle coordinate xyz sono piccolissime ed assimilabili ad infinitesimi, nel senso precisato poco più sopra a proposito di u, v, w. Ciò verrà chiarito anche meglio tra breve in relazione con il significato fisico che verrà riconosciuto per dette derivate ed in conseguenza di dati risultati sperimentali relativi alla natura dei corpi studiati per le applicazioni.

Ciò posto, dalle (2) si ricava:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta \\ \eta' &= \eta + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \\ \zeta' &= \zeta + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ove resta inteso che le derivate delle u, v, w hanno i valori che ad esse spettano nel punto M.

Ciò che precede si può esprimere sotto altra forma: indichiamo con du, dv, dw i *differenziali di spazio* delle funzioni u, v, w, cioè a dire gli incrementi infinitesimi da esse subìti nel passare dal punto M al punto A; avremo:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi + u + du \\ \eta_1 &= \eta + v + dv \\ \zeta_1 &= \zeta + w + dw \end{aligned}\right\} \quad (1\text{ bis})$$

Dimodochè, combinando queste colle (1) si ha:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi' + u = \xi + u + du \\ \eta_1 &= \eta' + v = \eta + v + dv \\ \zeta_1 &= \zeta' + w = \zeta + w + dw \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{ bis})$$

$\xi' = \xi + du$

Ricordando la ben nota espressione fornita dal calcolo per il differenziale di una funzione di più variabili e tenendo presente che i differenziali di x, y, z nel passare da M ad A sono in questo caso ξ, η, ζ, si ritrovano le (3).

Risulta da ciò che le coordinate di A' *sono funzioni lineari omogenee delle coordinate di* A. Perciò l'*intorno primitivo di* **M** *non deformato, e l'intorno deformato sono riferiti fra loro in una corrispondenza proiettiva, ossia in una omografia*; quindi *nella deformazione i piani si trasformano in piani e le rette in rette.*

Inoltre dalle (3) risulta che a valori infiniti delle $\xi\eta\zeta$ corrispondono valori pure infiniti della $\xi'\eta'\zeta'$, perciò *rette e piani paralleli si trasformano per la deformazione rispettivamente in rette e piani paralleli.*

Ci possiamo fare una rappresentazione assai chiara della deformazione dell'intorno di M (o particella) che consideriamo, coll'investigare come si deforma un parallelepipedo rettangolo piccolissimo con un vertice in M e cogli spigoli diretti secondo i tre assi coordinati; esso, dopo la deformazione, sarà ancora parallelepipedo, (poichè le differenze di lunghezza tra gli spigoli inizialmente paralleli ed uguali, saranno da assimilare ad infinitesimi di ordine superiore), ma non sarà più in generale rettangolo.

Si dovrà perciò conoscere, oltre che la nuova posizione M' del punto M, anche le lunghezze ed orientazioni dei nuovi spigoli.

A tal fine noi dovremo studiare l'alterazione della mutua distanza tra punti vicinissimi, e la variazione dell'angolo compreso tra due rette aventi un estremo in comune.

6. Coefficiente di dilatazione lineare. Scorrimento mutuo di due direzioni.

Indichiamo con a la lunghezza piccolissima dell'elemento lineare MA, e con a' la lunghezza nuova dell'elemento deformato $M'A'$; potremo esprimere a' come segue:

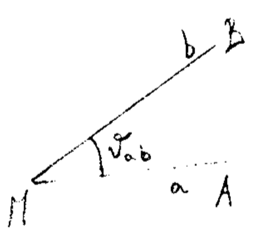
$$\boxed{a' = (1 + \varepsilon_a)\, a} \qquad (4)$$

ponendo:

$$\varepsilon_a = \frac{a'-a}{a} \tag{5}$$

e diremo ε_a *il coefficiente di dilatazione lineare nella direzione* a (od MA); esso è *il quoziente dell'allungamento subìto dall'elemento lineare* $a =$ MA, *diviso per la lunghezza primitiva dell'elemento.*

Esso si suol pure chiamare *la dilatazione lineare unitaria nella direzione a,* poichè rappresenta la variazione di lunghezza, riferita all'unità della lunghezza primitiva.



Considerando ora un'altra retta b uscente da M, data dal segmento MB, essendo B un altro punto generico dell'intorno di M, potremo indicare con ϑ_{ab} l'angolo compreso tra le due rette a e b; tale angolo dopo la deformazione assumerà un nuovo valore che esprimeremo con $\vartheta_{ab}-\gamma_{ab}$, indicando con $-\gamma_{ab}$ la variazione dell'angolo stesso; per ragioni di comodità nelle espressioni che successivamente ricaveremo conveniamo di assumere γ_{ab} positivo quando l'angolo ϑ_{ab} diminuisce; e per ovvie ragioni che vedremo in seguito, chiameremo γ_{ab} *lo scorrimento mutuo delle due direzioni* a *e* b.

Indichiamo con α_x, α_y, α_z i coseni di direzione della retta a, e con $\alpha_x+\delta\alpha_x$, $\alpha_y+\delta\alpha_y$, $\alpha_z+\delta\alpha_z$ gli analoghi coseni della retta $M'A'$ dopo la deformazione indicheremo cioè con δ la variazione prodotta, nei coseni stessi, dalla deformazione.

Ciò posto, si ha, come è ben noto:

$$\xi = \alpha_x a \qquad \eta = \alpha_y a \qquad \zeta = \alpha_z a \tag{6}$$

ed anche, tenendo conto della **(4)**

$$\xi' = (\alpha_x+\delta\alpha_x)\, a' = (\alpha_x+\delta\alpha_x)\,(1+\varepsilon_a)\, a\ ;$$

e due analoghe per η' e ζ'.

Trattando al solito come infinitesimi le quantità finite, ma piccolissime $\delta\alpha_x$ ed ε_a, potremo ricavare:

$$\xi' = \alpha_x a + a\delta\alpha_x + a\varepsilon_a\alpha_x$$

ossia, per le (6):

$$\xi' = \xi + a\delta\alpha_x + a\varepsilon_a\alpha_x$$

e due analoghe.

Allo stesso risultato si può pervenire osservando che la differenza $\xi'-\xi$ si può considerare come il differenziale $\delta\xi$ della coordinata ξ del punto A; e così analogamente per le altre due coordinate. Perciò differenziando le (6) secondo δ, si trova:

$$\xi'-\xi = a\delta\alpha_x + \alpha_x\delta a$$

ed essendo:

$$\delta a = a'-a = a\varepsilon_a$$

$$\xi'-\xi = a\delta\alpha_x + a\varepsilon_a\alpha_x$$

e due analoghe.

Ricordando ora le (3), e tenendo presenti le (6), si ottiene:

$\xi'-\xi = a\delta\alpha_x + a\varepsilon_a\alpha_x = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha_x a + \dots$

$$\left.\begin{aligned}
\delta\alpha_x &= -\varepsilon_a\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial u}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial u}{\partial z}\alpha_z \\
\delta\alpha_y &= -\varepsilon_a\alpha_y + \frac{\partial v}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial v}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial v}{\partial z}\alpha_z \\
\delta\alpha_z &= -\varepsilon_a\alpha_z + \frac{\partial w}{\partial x}\alpha_x + \frac{\partial w}{\partial y}\alpha_y + \frac{\partial w}{\partial z}\alpha_z
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ora indichiamo con β_x, β_y, β_z i coseni di direzione della retta b, cioè dell'elemento MB.

Dalla geometria analitica è notissima la relazione:

$$\cos\vartheta_{ab} = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y + \alpha_z\beta_z . \qquad (7')$$

Calcoliamo ora l'incremento δ attribuito dalla deformazione ad ambo i membri di questa uguaglianza, ricordando che abbiamo posto:

$$\delta\vartheta_{ab} = -\gamma_{ab}$$

e trattando al solito l'incremento δ come un differenziale: si ottiene così:

$$\gamma_{ab}\,\text{sen}\,\vartheta_{ab} = \alpha_x\delta\beta_x + \alpha_y\delta\beta_y + \alpha_z\delta\beta_z + \beta_x\delta\alpha_x + \beta_y\delta\alpha_y + \beta_z\delta\alpha_z \qquad (8)$$

Teniamo ora presenti le (7), come pure le analoghe relazioni valevoli per la retta b, lungo la quale si ha il coefficiente di dilatazione lineare ε_b.

Sostituendo nella (8) le espressioni delle $\delta\alpha$ date dalle (7), e le analoghe espressioni delle $\delta\beta$, e raccogliendo i termini simili si trova:

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_{ab} = -(\varepsilon_a+\varepsilon_b)\cos\vartheta_{ab} + 2\,[\varepsilon_x\alpha_x\beta_x+\varepsilon_y\alpha_y\beta_y+\varepsilon_z\alpha_z\beta_z] + \\ +\gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z+\alpha_z\beta_y)+\gamma_{zx}(\alpha_z\beta_x+\alpha_x\beta_z)+\gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y+\alpha_y\beta_x)\end{aligned} \tag{9}$$

avendo posto:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ove ancora è inteso che le derivate delle u, v, w, hanno i valori che loro competono nel punto *M.*

Le sei nuove grandezze delle (10) definite come combinazioni delle derivate parziali delle componenti di spostamento, hanno in tutta la teoria che ora studiamo una importanza capitale, come constateremo in seguito; esse si chiamano *le componenti della deformazione nel punto* M, e vedremo tra breve la ragione di tale denominazione.

Vediamo ora due notevoli specializzazioni della (9). Supponiamo dapprima che le due direzioni a e b coincidano; si avrà allora: $\vartheta_{ab}=0$; $\mathrm{sen}\,\vartheta_{ab}=0$; $\cos\vartheta_{ab}=1$; $\varepsilon_a=\varepsilon_b$ $\alpha_x=\beta_x$, ecc.... e perciò si trova:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x\alpha_x^2+\varepsilon_y\alpha_y^2+\varepsilon_z\alpha_z^2+\gamma_{yz}\alpha_y\alpha_z+\gamma_{zx}\alpha_z\alpha_x+\gamma_{xy}\alpha_x\alpha_y \tag{11}$$

ossia: *il coefficiente di dilatazione lineare di un elemento rettilineo uscente da* M *è una funzione lineare omogenea delle sei componenti di deformazione relative ad* M *ed una funzione quadratica omogenea dei coseni direttori dell'elemento.*

Supponiamo poi che sia $\vartheta_{ab}=\dfrac{\pi}{2}$, cioè che siano perpendicolari le due direzioni a e b; allora la (9) ci dà:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{ab} = 2\,[\varepsilon_x\alpha_x\beta_x+\varepsilon_y\alpha_y\beta_y+\varepsilon_z\alpha_z\beta_z] + \\ +\gamma_{yz}(\alpha_y\beta_z+\alpha_z\beta_y)+\gamma_{zx}(\alpha_z\beta_x+\alpha_x\beta_z)+\gamma_{xy}(\alpha_x\beta_y+\alpha_y\beta_x)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

la quale, tenendo presente la (11) e la sua analoga per la retta b si può pure scrivere:

$$\boxed{\gamma_{ab} = \alpha_x \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \beta_x} + \alpha_y \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \beta_y} + \alpha_z \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \beta_z} = \beta_x \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \alpha_x} + \beta_y \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \alpha_y} + \beta_z \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \alpha_z}} \qquad (12)$$

Dunque *lo scorrimento mutuo di due rette ortogonali è una funzione lineare delle sei componenti di deformazione, e bilineare dei coseni direttori dei due elementi.*

Risulta quindi che la conoscenza delle sei componenti di deformazione nel punto M ci permette di calcolare il coefficiente di dilatazione lineare per qualunque elemento rettilineo uscente da M [colla (11)], e lo scorrimento mutuo di due rette ortogonali qualunque, pure uscenti da M [colla (12)]; con ciò sapremo individuare la deformazione di un parallelepipedo rettangolo elementare, ossia la deformazione dell'intorno di M. Questo fatto giustifica il nome di *componenti di deformazione* attribuito alle sei grandezze $\varepsilon_x \ldots ; \gamma_{yz} \ldots$ definite dalle (10); e ciò verrà ancor meglio precisato da una proprietà che riscontreremo poco più innanzi.

Possiamo ora analizzare singolarmente il significato delle dette sei grandezze $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$. In particolare se la retta generica a si fa successivamente coincidere coi tre assi x, y, z.

per $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$, dalla (11) si deduce: $\varepsilon_a = \varepsilon_x$

per $\alpha_y = 1$, $\alpha_z = \alpha_x = 0$, » » » $\varepsilon_a = \varepsilon_y$

per $\alpha_z = 1$, $\alpha_x = \alpha_y = 0$, » » » $\varepsilon_a = \varepsilon_z$

e perciò le prime tre componenti di deformazione ε_x, ε_y, ε_z sono i coefficienti di dilatazione lineare dei tre elementi di retta distesi secondo i tre assi coordinati.

Analogamente portando le rette a e b a coincidere con due distinti assi della terna xyz, in tutti i modi possibili:

per $\alpha_y = 1$, $\alpha_z = \alpha_x = 0$,
e $\beta_z = 1$, $\beta_x = \beta_y = 0$, dalla (12) si ricava: $\gamma_{ab} = \gamma_{yz}$;

per $\alpha_z = 1$, $\alpha_x = \alpha_y = 0$,
e $\beta_x = 1$, $\beta_y = \beta_z = 0$, » » » $\gamma_{ab} = \gamma_{zx}$;

per $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$,
e $\beta_y = 1$, $\beta_z = \beta_x = 0$, » » » $\gamma_{ab} = \gamma_{xy}$.

Ne consegue che le ultime tre componenti *di deformazione* γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}, *sono gli scorrimenti mutui degli elementi distesi lungo gli assi coordinati presi due a due.*

Queste importantissime interpretazioni delle componenti di deformazione si potrebbero pure verificare direttamente dalle loro definizioni secondo le (10).

A questo punto è opportuno precisare ciò che già si disse al N.° 5, pag. 16.

In tutti i problemi tecnici che noi qui consideriamo in vista delle applicazioni, le componenti di deformazione ora definite sono piccolissime e tali da poter essere assimilate ad infinitesimi nel senso già a suo tempo precisato (pag. 13 e 15); lo stesso si deve quindi ripetere per tutte le derivate prime delle u, v, w rispetto alle coordinate x, y, z. Le misure sperimentali eseguite per tutti i casi che interessano le applicazioni tecniche confermano pienamente l'attendibilità del criterio di approssimazione così definito.

7. Dimostriamo ora due teoremi che chiariscono anche meglio il significato delle componenti di deformazione $\varepsilon \ldots \gamma \ldots$, e ne giustificano la denominazione.

Se in ogni punto del corpo continuo sono nulle tutte le sei componenti di deformazione il corpo subisce uno spostamento rigido (cioè senza variazione di forma).

Anzitutto è chiaro che se un corpo subisce uno spostamento rigido, ossia si sposta nello spazio senza cambiare la sua forma, il coefficiente di dilatazione lineare ε_a deve essere nullo per qualsiasi sua retta comunque orientata, cioè per valori qualunque dei coseni α_x, α_y, α_z i due membri della (11) devono essere sempre identicamente nulli, e perciò devono essere nulli tutti i coefficienti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}\, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$.

Inversamente supponiamo che quest'ultima condizione sia verificata, e cioè che sia:

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

in ogni punto del corpo continuo.

Vogliamo dimostrare che in tal caso u, v, w, hanno la forma caratteristica delle componenti di spostamento di un corpo rigido.

Anzitutto dalle prime tre delle (14) si deduce súbito che la u

deve essere indipendente dalla x, e così la v non deve dipendere dalla y, nè la w dalla z.

Derivando perciò una volta ciascuna delle prime tre rispetto alle coordinate relative agli altri due assi, si devono ottenere derivate miste identicamente nulle; cioè deve essere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = 0$$

Derivando poi le ultime tre delle (14) rispetto alle x, y, z ordinatamente, si trova:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0 \; ;$$

e di qui si conclude ovviamente che tutte le derivate qui scritte sono costantemente nulle.

Abbiamo con ciò dimostrato che tutte le derivate miste di secondo ordine delle u, v, w sono costantemente nulle.

Ora, derivando la seconda delle (14) rispetto ad x e la sesta rispetto ad y si conclude:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e similmente si possono ottenere altre analoghe condizioni, che ci dimostrano come anche le derivate seconde delle u, v, w sono tutte nulle.

Da tutto ciò risulta che le u, v, w devono essere funzioni lineari delle coordinate, e ciascuna di esse dipende solamente dalle coordinate relative agli altri due assi.

Osservando poi che le ultime tre delle (14) impongono ovvie condizioni tra i coefficienti di dette espressioni lineari, risulta che le espressioni delle u, v, w debbono avere la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + qz - ry \\ v &= v_0 + rx - pz \\ w &= w_0 + py - qx \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

essendo u_0, v_0, w_0, p, q, r sei costanti che le condizioni (14) lasciano completamente arbitrarie.

Le espressioni (15), secondo quanto insegna la Meccanica razionale, ci dimostrano il teorema sopra enunciato.

Le costanti $u_0 v_0 w_0$ sono le componenti dello spostamento dell'origine degli assi xyz, e si possono considerare come le componenti di una traslazione: esse sono delle lunghezze: i coefficienti costanti p, q, r sono numeri astratti, e si possono considerare come le componenti di una rotazione intorno ad un asse uscente dall'origine delle coordinate.

Al teorema ora dimostrato si può pure pervenire più brevemente osservando che se sono nulle ovunque tutte le $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$ allora secondo le (8), (11) e (12) sono pure nulle tutte le dilatazioni ε_a in tutte le direzioni, e sono pure nulle tutte le γ_{ab} per qualsiasi coppia di direzioni ab; restano cioè inalterate tutte le distanze e tutti gli angoli; perciò il corpo non si deforma, e il suo spostamento non può essere che rigido.

Ora si può pure dimostrare che:

due deformazioni aventi ovunque le stesse componenti $\varepsilon \ldots \gamma \ldots$ *non differiscono che per uno spostamento rigido.*

Infatti indichiamo con u', v', w'; u'', v'', w'' le componenti di spostamento relative alle due deformazioni. Se le $\varepsilon \ldots \gamma \ldots$ sono le stesse, secondo l'ipotesi, per le due deformazioni, deve essere:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u''}{\partial x} \ldots \text{ e due analoghe;}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\partial w''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial z} \ldots \text{ e due analoghe.}$$

Quindi, se poniamo:

$$u = u'' - u' \qquad v = v'' - v' \qquad w = w'' - w'$$

risulta immediatamente che le u, v, w soddisfano al sistema (14), e perciò lo spostamento differenza dei due dati è uno spostamento rigido.

8. Relazioni tra le componenti di deformazione

Constatato come le $\varepsilon \ldots \gamma \ldots$ possano individuare in modo completo la deformazione del corpo continuo, dobbiamo ora riconoscere che esse debbono essere legate da certe relazioni, di modo che non è in generale possibile assegnare arbitrariamente sei funzioni delle coordinate quali componenti di una possibile deformazione.

Le relazioni ora dette si possono ottenere dalle (10), eliminando le u, v, w mediante derivazioni successive:

Si ha infatti:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y} \quad ;$$

combinando poi queste, e quindi permutando circolarmente gli indici, si ottengono le tre relazioni:

$$\left. \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned}} \right\} \qquad (16)$$

Inoltre, ancora dalle (10) per derivazione si ricava:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

dalle quali, pure direttamente e poi con permutazioni circolari, si deducono altre tre relazioni:

$$\left. \boxed{\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) \\ 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) \\ 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned}} \right\} \qquad (17)$$

Le (16) e (17) costituiscono condizioni *necessarie* perchè ~~esistano~~ [illegible]

~~delle~~ funzioni continue u, v, w, ~~da cui~~ si ~~possono ricavare~~ le $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$ ~~secondo~~ le relazioni (10).

E facile dimostrare che tali condizioni sono anche *sufficienti*, e noi lo faremo tra breve, quando avremo definito altre combinazioni lineari delle derivate delle u, v, w, analoghe alle γ. p. 45

Le dette sei equazioni esprimono le condizioni che devono essere verificate perchè la deformazione di ogni singolo elemento del corpo, rappresentata dalle $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$, sia compatibile colle deformazioni degli elementi circostanti, in modo che la deformazione complessivamente rappresentata dalle $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$ sia realizzabile senza soluzioni di continuità, nè sovrapposizioni di materia. Esse si sogliono chiamare *condizioni di congruenza*, e si dice poi *congruente* ogni sistema di $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$ che soddisfaccia alle condizioni stesse.

9. Spostamento rigido e deformazione ~~rigida in~~ PURA una particella. Quadriche di deformazione e di dilatazione.

Introduciamo ora tre nuove grandezze, funzioni delle coordinate di M, definite dalle relazioni:

$$2p = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad 2q = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{18}$$

Da queste espressioni si ricava facilmente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \tag{18 bis}$$

Per ragioni che appariranno chiare tra breve, il vettore di componenti p, q, r si chiama la *rotazione* od anche il *vorticale* dello spostamento u, v, w.

Secondo una definizione ben nota nel calcolo vettoriale la (18 bis) esprime che la *divergenza* della *rotazione* è nulla.

Secondo le (10) e le (18) noi possiamo ora esprimere le nove derivate delle componenti di spostamento u, v, w, mediante le $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots p, q, r$.

Ed infatti si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \;,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} - r \;,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} + q \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} + r \;,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \;;\quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} - p \\
&\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} - q \;,\quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} + p \;,\quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Cerchiamo ora gli incrementi attribuiti dalla deformazione alle coordinate $\xi\ \eta\ \zeta$ del punto generico A dell'intorno considerato, immaginando di riferire l'intorno deformato agli assi paralleli a quelli coordinati condotti per il punto M (nella sua posizione non deformata) in altri termini cerchiamo le componenti dello spostamento nel punto A; ossia le proiezioni sui tre assi del segmento AA', spostamento di A; ossia proponiamoci di trovare le quantità definite da:

$$\delta\xi = u+du = \xi_1-\xi \quad ; \quad \delta\eta = v+dv = \eta_1-\eta \quad :$$
$$\delta\zeta = w+dw = \zeta_1-\zeta\ .$$

Poniamo poi:

$$\boxed{2\Psi(\xi,\eta,\zeta) = \varepsilon_x\xi^2+\varepsilon_y\eta^2+\varepsilon_z\zeta^2+\gamma_{yz}\eta\zeta+\gamma_{zx}\zeta\xi+\gamma_{xy}\xi\eta} \tag{20}$$

e ricordiamo le (1) e (3): si trova quindi:

$\delta\xi = u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta = u + \varepsilon_x\xi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\ldots$

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi &= u+q\zeta-r\eta+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \\ \delta\eta &= v+r\xi-p\zeta+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \\ \delta\zeta &= w+p\eta-q\xi+\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$= u + q\zeta - r\eta + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$

osserviamo ora che ciascuno degli incrementi $\delta\xi\ldots$ si può ritenere scomposto in due parti, ponendo:

$$\delta\xi = \delta_0\xi+\delta_1\xi \quad , \quad \text{ecc.}\ldots$$

essendo poi:

$$\delta_0\xi = u+q\zeta-r\eta \qquad \text{ecc.} \tag{22}$$

e

$$\delta_1\xi = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \qquad \text{ecc.} \tag{23}$$

In altri termini lo spostamento di componenti $\delta\xi,\ldots$ si può riguardare come scomposto in due spostamenti: δ_0, di componenti $\delta_0\xi\ldots$; e δ_1, di componenti $\delta_1\xi,\ldots$

Il primo spostamento δ_0 *è uno spostamento rigido*, come risulta dalle (22), secondo le ben note relazioni della meccanica razionale: si ricordi che noi supponiamo gli spostamenti piccolissimi, ed assimilabili ad infinitesimi, e che perciò è lecito applicare per questi le relazioni che la meccanica razionale stabilisce per i moti istantanei. Le u, v, w rappresentano le componenti della traslazione; p, q, r sono invece le componenti della rotazione della particella che si sposta come rigida.

Il secondo spostamento δ_1 rappresenta quindi la vera e propria deformazione della particella, o come suol dirsi, la deformazione pura.

Le componenti di questa deformazione pura δ_1 sono, secondo la (23), le derivate parziali della funzione Ψ definita dalla (20); tale funzione si può quindi denominare il *potenziale della deformazione*, secondo il concetto stabilito nella ben nota teoria del potenziale.

L'equazione $\Psi =$ cost. rappresenta *una superficie equipotenziale di deformazione;* attribuendo varî valori alla costante si ottiene tutta una serie o « famiglia » di superficie equipotenziali. Per le proprietà ben note dalla teoria del potenziale risulta che lo spostamento δ_1 (di deformazione pura) di un punto generico A dell' intorno considerato, è normale alla superficie equipotenziale di deformazione che passa per lo stesso punto A.

Ora, poichè la Ψ, secondo la (20) è una *forma quadratica omogenea* nelle ξ, η, ζ, le superficie equipotenziali di deformazione sono quadriche aventi il centro in M, (origine degli assi da cui si contano le ξ, η, ζ); queste quadriche si dicono appunto *quadriche di deformazione.*

Tali quadriche, relative al punto M, hanno tutte lo stesso *cono asintotico* rappresentato dall' equazione:

$$\Psi = 0$$

e gli stessi assi (indefiniti), che sono pure gli assi del detto cono.

Dalle (11) e (20) risulta che secondo ciascuna generatrice di detto cono si ha $\varepsilon = 0$, e perciò tale cono si denomina pure *cono delle dilatazioni nulle.*

Esso può essere reale od immaginario: se è reale esso divide lo spazio in due regioni, in una delle quali le quadriche di deformazione $\Psi =$ cost. sono iperboloidi a due falde, od ellittici, mentre nell' altra regione dette quadriche devono essere iperboloidi ad una falda (od iperbolici), in una delle due regioni le dilatazioni ε_n [v. la (11)] sono positive, nell'altra regione esse sono negative (o contrazioni).

E pure facile verificare che dette quadriche sono tutte omotetiche rispetto al comune centro M.

S'intende che il rapporto di omotetia può anche essere un numero immaginario; in tal caso si passa da un iperboloide con una falda ad uno con due falde e viceversa.

I punti situati sugli assi delle dette quadriche, dovendo spostarsi normalmente alle quadriche stesse, si spostano lungo gli stessi assi rispettivamente; perciò *detti assi restano ortogonali dopo la deformazione:* ossia gli *scorrimenti mutui secondo detti assi presi due a due sono tutti nulli.*

Tali assi si dicono gli *assi principali della deformazione relativi al punto M.*

Se li assumiamo come assi coordinati, indicando con ξ_*, η_*, ζ_* le nuove coordinate del punto generico A, le equazioni delle quadriche di deformazione si riducono alla così detta *forma canonica,* e le loro equazioni divengono:

$$\boxed{2\Psi = \varepsilon_{x*}\,\xi_*^2 + \varepsilon_{y*}\,\eta_*^2 + \varepsilon_{z*}\,\zeta_*^2 = \text{cost.}}$$

e quindi, secondo le (23), si ha;

$$\delta_1\,\xi_* = \varepsilon_{x*}\,\xi_* \quad ; \quad \delta_1\,\eta_* = \varepsilon_{y*}\,\eta_* \quad ; \quad \delta_1\,\zeta_* = \varepsilon_{z*}\,\zeta_* \,;$$

perciò un punto qualunque si sposta parallellamente agli assi principali di quantità rispettivamente proporzionali alle sue coordinate contate dagli stessi assi; i coefficienti di proporzionalità $\varepsilon_{x*}, \varepsilon_{y*}, \varepsilon_{z*}$ rappresentano i coefficienti di dilatazione secondo i tre assi principali, e perciò essi si chiamano i *coefficienti di dilatazione principali;* od anche brevemente le *dilatazioni unitarie principali.*

Ne consegue che la *deformazione pura consta di tre dilatazioni semplici parallelamente a tre assi ortogonali.* Un parallelepipedo elementare rettangolo cogli spigoli orientati secondo gli assi principali, dopo la deformazione si conserva ancora rettangolo.

Se le tre dilatazioni principali sono tutte dello stesso segno, allora le quadriche di deformazione sono ellissoidi, ed il cono delle dilatazioni nulle è immaginario, come già si accennò più sopra; se invece una delle dilatazioni principali è di segno contrario a quello delle altre due, le quadriche sono iperboloidi, con uno stesso cono asintotico reale.

Confrontando poi la (11) e la (20) si riconosce che il semidiametro di una quadrica di deformazione, parallelo ad una qualunque direzione data è proporzionale — (secondo un coefficiente o una scala da determinarsi una volta per tutte le direzioni) — all'inverso della radice quadrata del coefficiente di dilatazione lineare unitaria ε_u corrispondente alla data direzione.

Infatti, indicando con ρ tale semidiametro si ha: $\xi = \rho\alpha_n$ ecc.; e sostituendo nella (20), tenuto conto della (11), si trova: $\rho^2\,\varepsilon_n = \text{cost.}$ da cui $\rho =$

Perciò le quadriche di deformazione, con opportuna scelta della costante che compare nella loro equazione, si possono pure considerare come i diagrammi polari delle grandezze $1 : \sqrt{\pm\,\varepsilon_n}$ intendendo di prendere quel segno che rende positivo il radicando e quindi reale la radice, e così pure per fare la rappresentazione geometrica sempre con semidiametri reali, quando le quadriche sono iperboloidi, si può assumere come diagramma una coppia di esse, con valori uguali e contrari della costante dell'equazione, le quali risultano situate da parti opposte rispetto al comune cono asintotico reale.

Per questa ragione dette superficie si denominano anche *quadriche di dilatazione* per ricordare questa speciale proprietà.

I semiassi delle dette quadriche sono proporzionali a $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{x*}}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{y*}}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{z*}}}$, e possono essere reali od immaginarî; passando da una quadrica all'altra essi si modificano secondo il rapporto di omotetia, che pure può essere reale od immaginario, come si disse sopra, pag. 42.

Per maggior chiarezza notiamo esplicitamente come da quanto precede risulta che gli assi principali di deformazione uscenti da M si trasformano in se stessi per *effetto della deformazione pura* δ_1 e perciò, *a meno dello spostamento rigido* δ_0.

Questo poi li trasporta rigidamente coll'origine in M', imprimendo inoltre alla terna la rotazione di componenti p, q, r, intorno ad M' stesso.

Risulta pure ovviamente che una sfera di centro M e di raggio piccolissimo r, dopo la deformazione si trasforma in un ellissoide avente per assi, quelli principali trasportati collo spostamento δ_0 e per semiassi $r(1+\varepsilon_{x*})$, $r(1+\varepsilon_{y*})$ ed $r(1+\varepsilon_{z*})$ rispettivamente; inoltre una sfera di centro M' e di raggio piccolissimo r, situata nell'intorno già deformato, ha per corrispondente nell'intorno ancora da deformare un ellissoide di semiassi,

$$\frac{r}{1+\varepsilon_{x*}}\,,\quad \frac{r}{1+\varepsilon_{y*}}\,,\quad \frac{r}{1+\varepsilon_{z*}}$$

distesi anch'essi sugli assi principali.

Questa proprietà costituisce un notevole e caratteristico significato degli assi principali di deformazione.