



CAPITOLO I.

GENERALITÀ SUI SOLIDI ELASTICI

1. Il corpo perfettamente rigido considerato nella statica (analitica o grafica) è una pura astrazione, molto opportuna in taluni casi e sempre legittima, come già si disse, quando le deformazioni del corpo siano trascurabili per la loro piccolezza, o per non avere esse influenza sulle condizioni statiche del corpo.

Tutti i corpi naturali sono deformabili; sotto l'azione di forze esterne anche piccole, subiscono delle deformazioni di grandezza molto variabile, secondo la natura dei corpi stessi; esse possono talora essere così piccole da riuscire inavvertite in un'osservazione non abbastanza accurata; ma esse sono sempre misurabili mediante opportuni strumenti e metodi di appropriata sensibilità.

La statica ci torna utile e ci basta in tutti quei casi in cui le deformazioni molto piccole dei corpi solidi possono essere trascurate nello studio dell'equilibrio delle forze esterne applicate ai solidi stessi.

Ma la stessa statica si dimostra incapace a risolvere alcuni problemi d'equilibrio, i quali appunto perciò si dicono iperstatici; tali problemi, coll'ipotesi della perfetta rigidità, si presentano indeterminati o talora staticamente impossibili, mentre l'osservazione diretta ci rivela come in natura gli stessi casi di equilibrio siano perfettamente possibili e determinati.

In taluni casi lo studio delle deformazioni dei corpi considerati, e più precisamente la conoscenza delle relazioni di interdipendenza quantitativa tra le deformazioni e le forze che le provocano, ci consente di risolvere i problemi iperstatici proposti.

Vogliamo ora indicare alcuni esempi semplicissimi di tali casi indeterminati o impossibili nell'ipotesi della rigidità, e vedere come la considerazione della deformazione possa condurre alla soluzione dei problemi di equilibrio.

Consideriamo due aste rigide riunite fra loro a cerniera in un

estremo comune C , e nei due estremi liberi vincolate, pure a cerniera, a due punti fissi A e B , in modo però che si abbia:

$$AB = AC + CB,$$

ossia che i tre punti A C B siano in linea retta nell'ordine indicato. Le cerniere siano senza attrito e sferiche, oppure anche cilindriche, ma allora con i tre assi paralleli tra loro.

Al punto C sia applicata una forza esterna F , diretta comunque nel caso delle cerniere sferiche, normale invece agli assi paralleli delle cerniere, quando queste siano cilindriche come si è detto.

Si tratta di determinare come l'azione della forza F sollecita le due aste AC e CB , o, in altri termini, come essa si ripartisce, sulle due aste.

La forza F si può scomporre in due componenti: una N normale alla retta ACB , l'altra T agente secondo la retta stessa.

E facile vedere che la ripartizione della componente T sulle due aste è indeterminata, mentre è invece impossibile che sforzi comunque grandi nelle aste AC e BC allineate facciano equilibrio alla componente N normale al loro asse comune; gli sforzi in dette aste dovrebbero essere infiniti, e non esiste in natura materiale che sia atto a sopportare forze infinite.

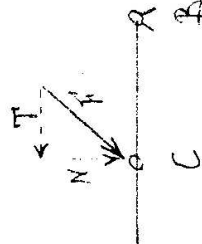
Ma se noi ammettiamo, come l'esperienza ci insegna, che le aste sotto l'azione di sforzi di trazione si allungano, e se possiamo conoscere la legge che lega il valore dello sforzo di trazione con quello del corrispondente allungamento, noi potremo rendere determinato e risolvere il problema relativo all'equilibrio del punto C .

Invero, se le aste AC e BC si allungano, dopo la deformazione si ha:

$$AC + CB > AB$$

ed il punto C si sposta dalla retta AB , gli assi delle aste non sono più allineati, sicchè da un triangolo di equilibrio si possono ricavare valori finiti degli sforzi nelle aste stesse; la posizione di equilibrio di C è determinata dalla condizione che i corrispondenti allungamenti delle aste e gli sforzi nelle aste medesime soddisfacciano alla legge di interdipendenza, accennata poco sopra, e che per ora non precisiamo quantitativamente.

Nel caso speciale in cui la componente normale N sia nulla, e la forza applicata si riduca alla T diretta secondo la AB , la statica stabilisce che la differenza algebrica degli sforzi nelle due aste deve es-



sere uguale alla T , ed un' ulteriore relazione per determinare gli sforzi stessi è fornita dalla condizione (espressa mediante la detta legge di interdipendenza tra sforzi e deformazioni), che gli allungamenti delle aste siano uguali e di segno contrario (ossia che una di esse si allunghi di quanto si accorcia l'altra).

Analoghe constatazioni di indeterminazione statica e di impossibilità dell'equilibrio nell'ipotesi della rigidità si incontrano nel caso di una serie di aste riunite successivamente tra loro a cerniera, disposte coi loro assi allineati su una stessa retta, colle estremità libere ancorate a cerniera a due punti fissi A e B , e soggetta poi a forze esterne oblique rispetto all'asse.

Anche in questo caso la ripartizione sulle varie aste delle componenti delle forze esterne dirette secondo l'asse AB è staticamente indeterminata; mentre le componenti trasversali (o normali) provocherebbero nelle aste sforzi di intensità infinite. Pure qui l'analisi degli allungamenti delle varie aste e degli eventuali cedimenti dei vincoli di estremità A e B permettono di constatare che l'equilibrio è possibile, e di determinarne le condizioni e modalità.

Questo è il caso p. es. di una catena articolata soggetta al suo peso.

Analoghe considerazioni si presentano per un filo flessibile pesante disposto secondo una retta non verticale, ancorato alle due estremità e soggetto al suo peso. Supposto il filo inestensibile, l'equilibrio si rivela impossibile, poichè per mantenerlo rettilineo occorrerebbe una tensione infinita, che nè il filo stesso, nè gli ancoraggi di estremità potrebbero sopportare.

Mentre invece ammettendo che il filo si allunghi per effetto della tensione, (conforme a quanto insegna l'esperienza), l'equilibrio si rivela possibile in quanto il filo resta sempre di lunghezza un po' superiore alla distanza tra gli attacchi di estremità, e quindi si dispone secondo la linea funicolare del suo peso, che è una catenaria, e approssimativamente, per piccole frecce, una parabola, come è già noto dalla statica grafica.

La configurazione di equilibrio può venire determinata quando si conosca la relazione tra la tensione e l'allungamento da essa prodotto nel filo.

Vogliamo ora accennare altri esempi tipici e semplicissimi di sistemi staticamente indeterminati.

Un punto P sia collegato mediante aste complanari, e riunite a cerniera in P , a tre o più punti A, B, C, \dots fissi situati in un piano τ , contenente pure P , ed i vincoli delle aste in tali punti siano pure a cerniera.

Se in P è applicata una forza F situata nel piano π , la ripartizione della F sulle varie aste concorrenti in P è staticamente indeterminata; se n sono le aste, si hanno $n-2$ incognite iperstatiche, poichè $n-2$ sono i vincoli sovrabbondanti, in eccedenza oltre ai due strettamente necessari ad individuare nel piano π la posizione del punto P . Gli sforzi nelle aste si possono determinare esprimendo gli allungamenti delle aste in funzione degli sforzi stessi, con la condizione che detti allungamenti siano tutti tra loro compatibili: infatti, date le lunghezze di due aste, resta determinata la posizione di P ; perciò pure si conoscono le lunghezze e quindi gli allungamenti delle altre $n-2$ aste.

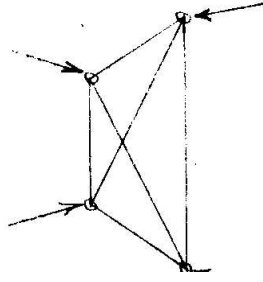
In tal modo si possono stabilire $n-2$ equazioni, che in unione alle condizioni fornite dalla statica, per l'equilibrio di più forze concorrenti servono e bastano a determinare tutti gli sforzi incogniti.

Altro esempio caratteristico: si abbia una travatura reticolare piana costituita da sei aste disposte secondo i lati e le diagonali di un quadrilatero, riunite fra loro a cerniera nei vertici o nodi: e in questi siano applicate delle forze esterne costituenti in complesso un sistema in equilibrio. Tale travatura reticolare ha un'asta sovrabbondante; infatti si può sopprimere un'asta qualunque e la travatura così ottenuta risulta strettamente indeformabile, del tipo triangolare.

La ricerca degli sforzi nelle aste è staticamente indeterminata, ma si può ottenere tra gli sforzi stessi una relazione in più oltre quelle della statica, esprimendo gli allungamenti (in senso algebrico) delle aste in funzione degli sforzi, ed inoltre utilizzando la relazione geometrica ovvia che determina la lunghezza (e quindi l'allungamento) di una qualsiasi delle sei aste, quando si conoscano le lunghezze (e quindi gli allungamenti) delle rimanenti cinque aste.

Infine, sempre a titolo d'esempio, consideriamo una sbarra rettilinea disposta col suo asse orizzontale (trave) appoggiata a tre sostegni fissi, due d'estremità ed uno intermedio, e sollecitata da forze verticali (carichi); un tale sistema si suol designare come trave continua su tre appoggi. Le reazioni degli appoggi sono staticamente indeterminate, ed è sovrabbondante uno dei tre appoggi.

Siano A , B gli appoggi di estremità e C quello intermedio, si può immaginare rimosso l'appoggio C , ed in tale ipotesi, tenendo conto della deformabilità della trave, si potrà determinare l'abbassamento δ_c della trave misurato in corrispondenza della verticale di C ; ed inoltre calcolare una forza, che agendo sulla stessa trave lungo la detta verticale di C , verso l'alto, possa sopprimere l'abbassamento δ_c sopradetto; tale forza sarà la reazione incognita dell'appoggio intermedio C ; determinata questa, le altre due reazioni si ricavano con le leggi della statica.



Analoghi artifici (per quanto più complessi) si possono usare nel caso di una trave continua su più appoggi intermedi, per determinare di questi le reazioni.

Riassumendo notiamo che gli esempi precedenti furono esposti collo scopo precipuo di mettere in evidenza come lo studio delle deformazioni dei solidi possa eliminare le indeterminazioni lasciate dalla statica dei sistemi rigidi.

2. Quando un solido è soggetto all'azione di forze esterne, esso, oltre a deformarsi, subisce spesso delle notevoli modificazioni nelle sue varie proprietà fisiche, come avremo occasione di esporre più innanzi: si tratta spesso di una vera alterazione dello stato fisico del corpo. E tale alterazione è un fenomeno molto complesso, sicchè per gli scopi pratici delle applicazioni è necessario limitarsi a studiarlo per approssimazione e solo in alcuni suoi particolari aspetti.

Inoltre le deformazioni dei solidi che s'incontrano nelle applicazioni sono quasi sempre molto piccole, sicchè nella loro valutazione ad errori relativi sensibili corrispondono errori assoluti trascurabili.

L'esperienza dimostra che quando le intensità delle forze applicate e le deformazioni da esse prodotte non hanno superato certi limiti, (che si preciseranno meglio in seguito), al cessare dell'azione e delle forze esterne, le deformazioni scompaiono pure del tutto o quasi, e così anche le altre accennate alterazioni di proprietà fisiche, sicchè il corpo tende a riprendere in modo più o meno completo lo stato primitivo.

Questa proprietà è posseduta in vario grado da tutti i corpi, e si chiama l'elasticità: i corpi, in quanto la posseggono si dicono elastici.

Orbene, in natura, come non esiste alcun corpo perfettamente rigido, così neppure esiste alcun corpo perfettamente elastico.

L'esperienza rivela che ogni deformazione prodotta da forze applicate su un corpo solido si può considerare divisa in due parti: una parte scompare quando cessa l'azione delle forze esterne, e si chiama deformazione elastica: l'altra parte permane anche dopo cessata l'azione suddetta, e perciò si dice deformazione permanente, (o deformazione plastica).

In alcuni corpi, anche per piccoli valori delle forze applicate, la deformazione permanente è preponderante rispetto a quella elastica, ossia la deformazione complessiva è quasi tutta permanente o plastica; tali corpi si dicono anelastici od anche plastici; e questa proprietà sarebbe da un corpo posseduta in modo perfetto quando la deformazione elastica fosse rigorosamente nulla, e tutta la deformazione risultasse permanente. Ma questo anche è un caso puramente ideale, poichè

in natura non esiste alcun corpo perfettamente anelastico; tale caso si considera per la solita opportunità di schematizzazione complessiva.

L'esperienza dimostra dunque che per molti materiali (tra i quali sono quelli che più interessano per le costruzioni) finchè sforzi e deformazioni restano inferiori a certi limiti, la deformazione permanente è così piccola, che risulta inapprezzabile, ossia inferiore agli inevitabili errori di osservazione e di esperimento, sicchè può essere praticamente ritenuta nulla. Il limite sopra accennato, per quanto riguarda lo sforzo, si dice limite di elasticità, e verrà precisato meglio più innanzi.

È poi del tutto ovvio che per la buona conservazione dei materiali impiegati nelle costruzioni o nelle macchine occorre evitare in modo assoluto le deformazioni permanenti, ossia non superare mai il limite di elasticità; anzi, per ragioni di sicurezza che saranno esaminate più innanzi, si dovrà stare molto al disotto di tale limite.

Ne consegue che, per lo studio dell'equilibrio e della resistenza dei corpi naturali applicati nelle costruzioni, occorre e basta prendere in considerazione le sole deformazioni elastiche, e quindi i solidi naturali, oggetto del nostro studio, debbono essere riguardati come solidi elastici, (sottintendendo perfettamente elastici).

Il nuovo tipo di corpo che così veniamo a studiare, ossia il solido elastico è altrettanto ideale quanto il corpo rigido della statica classica, analitica o grafica; è una pura astrazione comoda ed opportuna per la speditezza e l'eleganza dei procedimenti di ricerca razionale.

Intenderemo dunque per solido elastico un sistema materiale continuo, capace di subire, sotto l'azione di forze esterne su esso in equilibrio, dei cambiamenti piccolissimi di stato fisico (in particolare, di forma), i quali scompaiano al cessare delle forze esterne suddette.

3. Nello studiare le proprietà del solido elastico si usa comunemente precisare bene la natura e le modalità dei detti cambiamenti di stato fisico (in particolare, deformazioni), per investigare poi, mediante l'analisi, le leggi che li governano.

Occorre però notare che le ipotesi che volta a volta si introducono a base della teoria sono per lo più arbitrarie.

I principî a base delle ricerche teoriche sono quasi sempre dei postulati, soltanto soggetti alla condizione di non essere contraddittori, nè con se stessi, nè con altri già introdotti: ma essi non possono affatto fondarsi sopra pure deduzioni matematiche, nè sopra dati puramente sperimentali.

Infatti è ovvio che nessuna teoria fisica può basarsi su semplici deduzioni matematiche; e d'altra parte il controllo sperimentale non

può riguardare direttamente dei principi semplici e generali; esso si può fare solo su fenomeni particolari ed inoltre sempre più o meno complessi; sicchè i risultati sperimentali sono atti, non a giustificare i principi posti a base della teoria, ma invece a dare verifiche dei risultati ultimi della teoria stessa.

L'esperimento offre perciò soltanto delle verifiche indirette.

Inoltre le misure sperimentali non sono mai assolutamente precise.

Perciò da esse non si possono direttamente ricavare delle leggi atte ad interpretare i fenomeni naturali; per enunciare tali leggi si richiede sempre un'astrazione logica e razionale non affatto fondata sull'esperienza, nè da questa direttamente giustificata.

Nel séguito si accennerà volta per volta agli esperimenti più caratteristici che servono a verificare i risultati della teoria ed a stabilire i limiti della sua applicabilità.

È evidente quanto sia importante che gli studiosi ed i tecnici si facciano un'idea concreta e precisa dei limiti di applicabilità della teoria, soprattutto per non essere indotti ad usarla in quei problemi nei quali essa non è applicabile e per i quali essa non ha significato.

Per conoscere alcune delle dette limitazioni noi non abbiamo bisogno di ricorrere all'esperimento; ciò accade ogni qualvolta cessano di essere verificate le ipotesi fondamentali sopra enunciate.

Così la teoria dell'elasticità non si può applicare se nei corpi studiati si manifestano deformazioni permanenti; tale teoria non ha valore per quei corpi naturali che col loro comportamento si approssimano molto al solido anelastico o plastico.

D'altra parte, poichè abbiamo sopra supposto che le deformazioni elastiche subite dai corpi siano piccolissime ed assimilabili ad infinitesimi, la teoria non sarà applicabile per i corpi molto deformabili, capaci cioè di subire, sotto l'azione di forze moderate, delle deformazioni elastiche molto grandi. A questo proposito si noti che le deformazioni anche piccolissime, sono sempre quantità finite; tant'è vero, che esse sono misurabili, con appropriati apparecchii abbastanza sensibili. Perciò non è rigoroso l'assimilare a quantità infinitesime; ma i risultati che si ottengono trattandole come tali saranno tanto più approssimati, quanto più piccole sono le deformazioni stesse, sempre quando i loro prodotti o le loro potenze dalla seconda in poi sieno del tutto trascurabili.

E se gli errori commessi coll'applicazione della teoria risultano più piccoli delle quantità praticamente misurabili coi mezzi sperimentali disponibili, pure cogli esperimenti più accurati non si riesce a scorgere un divario tra i risultati della teoria, ed i fenomeni reali; ed allora si può affermare che la teoria è praticamente verificata.