

condizione ausiliaria di carico (del sistema principale). Essendo anche in ogni caso $\sigma_x = \sigma_y = 0$, quindi

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right),$$

dove N, M_x, M_y siano le caratteristiche di sollecitazione effettive, risulta semplicemente

$$\int_{(\Sigma)} \varepsilon_z \frac{\sigma_z^*}{F^*} dA = \frac{N}{EA} \frac{N^*}{F^*} + \frac{M_x}{EJ_x} \frac{M_x^*}{F^*} + \frac{M_y}{EJ_y} \frac{M_y^*}{F^*} \quad (108).$$

La parte espressa per le tensioni tangenziali (sempre nel senso dichiarato alla nota ⁽¹⁰⁷⁾) ha l'espressione

$$\frac{1}{GF^*} \int_{(\Sigma)} (\tau_{zx} \tau_{zx}^* + \tau_{yz} \tau_{yz}^*) dA$$

ovviamente indipendente da ogni ipotesi sulla τ_{xy}^* .

Per quanto riguarda le τ (effettive) di torsione si ha:

$$\begin{aligned} \frac{M_t'}{GJ_t'F^*} \left\{ \int_{(\Sigma)} (x\tau_{yz}^* - y\tau_{zx}^*) dA - \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \tau_{zx}^* + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \tau_{yz}^* \right) dA \right\} = \\ = \frac{M_t'}{GJ_t'} \left\{ \frac{M_t^*}{F^*} - \frac{1}{F^*} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \tau_{zx}^* + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \tau_{yz}^* \right) dA \right\}, \end{aligned}$$

essendo M_t' il momento rispetto all'asse parallelo a z per il centro di taglio (cfr. nota ⁽⁸⁸⁾); dove poi

$$\int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \tau_{zx}^* + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \tau_{yz}^* \right) dA = \int_{(c)} \vartheta_0 \tau_{zn}^* ds - \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 \operatorname{div} \tau^* dA.$$

⁽¹⁰⁸⁾ Se in tal modo non si ritrova la deformazione della sezione nel proprio piano che si ha già nei casi più semplici del problema di Saint-Venant (trazione e flessione semplice), cioè si deve dunque esclusivamente alla posizione $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, che è la sola arbitraria nell'applicazione ai casi medesimi (insieme colla $\tau_{xy}^* = 0$, che qui non ha importanza). La forza ausiliaria nel piano della sezione produce effettivamente nei punti di un tronco comprendente la sezione medesima tensioni σ_x^* e σ_y^* non trascurabili.

Per avere un'idea dell'errore in cui si cadrebbe se le espressioni dello spostamento

Assumendo anche la τ^* conforme alla soluzione di Saint-Venant (onde $\tau_{zn}^* = 0$), si ottiene quindi

$$\frac{M_t'}{GJ_t'} \left(\frac{M_t^*}{F^*} + \frac{1}{F^*} \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 \operatorname{div} \tau^* dA \right);$$

dunque semplicemente

$$\frac{M_t'}{GJ_t'} \frac{M_t^*}{F^*} \tag{16}$$

per le τ^* di torsione, e

$$\frac{M_t'}{GJ_t'} \frac{1}{F^*} \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 \operatorname{div} \tau^* dA$$

per le τ^* di taglio. Quest'ultima espressione risulta nulla per le sezioni simmetriche, cioè nulla per la parte dovuta a T_y^* se la sezione è simmetrica rispetto all'asse y , per la parte dovuta a T_x^* se è simmetrica rispetto all'asse x , e nulla per l'una e per l'altra parte anche se la sezione è soltanto simmetrica rispetto al baricentro, risultando in tali casi antimetrico il prodotto $\vartheta_0 \operatorname{div} \tau$; e per semplicità si suole di regola reputarla nulla in ogni caso ⁽¹⁰⁹⁾.

così trovate volessero poi reputarsi valide ad ogni effetto, si può osservare che per le accennate condizioni $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ che risultano da tale spostamento, mentre si ritrova da esso la considerata componente $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ (come si vede dall'espressione trovata, posta la F^* normale alla sezione), si ritroverebbe invece la σ_z moltiplicata per il coefficiente

$$\frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)},$$

tendente all'infinito per $m \rightarrow 2$ (e $\approx 1,35$ per $m = \frac{10}{3}$).

⁽¹⁰⁹⁾ Per quanto riguarda le τ^* di torsione è da avvertire che non sarebbe nullo l'integrale

$$\int_{(\Sigma)} \vartheta_0 \operatorname{div} \tau^* dA$$

quando per una sezione come quella a \perp (sezione « non raccolta ») si ponessero tali tensioni come risultano dalla soluzione del problema accennato in proposito della se-

Per quanto riguarda infine le τ (effettive) di taglio, si porrà allo stesso modo sempre nullo il contributo delle τ^* di torsione; e per le τ^* di taglio si otterrà in ogni caso l'espressione, esatta per le sezioni simmetriche rispetto a due assi ortogonali ⁽¹¹⁰⁾,

$$\chi_x \frac{T_x}{GA} \frac{T_x^*}{F^*} + \chi_y \frac{T_y}{GA} \frac{T_y^*}{F^*}, \quad (17)$$

zione medesima al paragrafo 17): si ricordi che

$$\operatorname{div} \tau^* = - \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z};$$

e si osservi che nel caso di una sezione simmetrica i due fattori del prodotto $\vartheta_0 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ risultano entrambi antisimmetrici (rispetto a un asse) o entrambi simmetrici (rispetto al baricentro). Ma si vede facilmente che ciò non ha importanza nella determinazione dello spostamento di un punto di un cilindro di tale sezione sollecitato da un momento torcente costante, nelle condizioni di vincolo già considerate nella soluzione del problema di Saint-Venant, come appunto deve essere. Essendo infatti in tal caso congruente la deformazione corrispondente alla tensione effettiva, deve ottenersi lo stesso risultato (cioè l'espressione dello spostamento già trovato nella soluzione suddetta) da ogni tensione ausiliaria che sia semplicemente in equilibrio colla forza F^* . Dovendo infatti allora (per essere costante il fattore $\frac{M_t'}{GJ_t'}$) integrarsi l'integrale sopra indicato per tutta la lunghezza del cilindro, si ottiene

$$\int_0^l dz \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 \operatorname{div} \tau^* dA = - \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 dA \int_0^l \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} dz = 0$$

per essere σ_z^* identicamente nulla nelle sezioni estreme.

Quando invece il cilindro suddetto sia effettivamente sollecitato da un momento torcente variabile, o sia diversamente vincolato, l'espressione dello spostamento

$$\frac{1}{GJ_t' F^*} \int_0^l dz \int_{(\Sigma)} M_t' M_t^* dA$$

risulterà grossolanamente approssimata.

⁽¹¹⁰⁾ Per tali sezioni (ma non per quelle simmetriche solo rispetto al baricentro, come le sezione a \square) sono nulli infatti i due integrali

$$\int_{(\Sigma)} (\tau_{xx})_x (\tau_{yz}^*)_y dA, \quad \int_{(\Sigma)} (\tau_{yz})_x (\tau_{zx}^*)_y dA,$$

intendendo distinte dagli indici x, y fuori dalla parentesi le tensioni dovute rispetti-

dove poi χ_x e χ_y potranno valutarsi colle formule approssimate del § 11, cioè

$$\chi_y = \frac{A}{J_x^2} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{S}{b}\right)^2 dA, \quad \chi_x = \frac{A}{J_y^2} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{S}{h}\right)^2 dA,$$

con ovvio significato di h .

La funzione da integrare lungo l'asse per esprimere il lavoro virtuale interno sarà dunque data dalla somma dei termini (15), (16), (17).

Si osservi che effettivamente gli ultimi termini, dovuti agli sforzi di taglio, risulteranno sempre trascurabili rispetto a quelli dovuti ai momenti flettenti: il rapporto di tali termini è infatti

$$\frac{2(m+1)}{m} \chi \frac{TT^*}{MM^*} i^2,$$

essendo i il raggio d'inerzia, dove i rapporti $\frac{M}{T}$, $\frac{M^*}{T^*}$ saranno per la se-

vamente agli sforzi di taglio T_x (o T_x^*) e T_y (o T_y^*). Basta ricordare le espressioni delle τ , e osservare che per tali sezioni risultano nulli

$$\int_{(\Sigma)} xy^3 dA, \quad \int_{(\Sigma)} xy \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dA, \quad \int_{(\Sigma)} y^2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dA, \quad \int_{(\Sigma)} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dA,$$

$$\int_{(\Sigma)} x^3 y dA, \quad \int_{(\Sigma)} x^2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} dA, \quad \int_{(\Sigma)} xy \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} dA,$$

per essere ciascuna delle funzioni integrande antisimmetrica rispetto all'uno o all'altro dei due assi. Si ha poi

$$\int_{(\Sigma)} \{(\tau_{zx})_y (\tau_{zx}^*)_y + (\tau_{yz})_y (\tau_{yz}^*)_y\} dA = \frac{T_y^*}{T_y} \int_{(\Sigma)} \{(\tau_{zx})_y^2 + (\tau_{yz})_y^2\} dA = \chi_y \frac{T_y T_y^*}{A},$$

e analogamente

$$\int_{(\Sigma)} \{(\tau_{zx})_x (\tau_{zx}^*)_x + (\tau_{yz})_x (\tau_{yz}^*)_x\} dA = \chi_x \frac{T_x T_x^*}{A}.$$

Circa la distinzione essenziale tra χ_y e χ_x si osservi ad esempio che per una sezione a \perp , assunta per asse y la mediana dell'anima, χ_x risulta appena superiore al valore $6/5$ della sezione rettangolare, al quale tende tendendo a zero lo spessore dell'anima.

zione generica dell'ordine della lunghezza della trave, come dimostrano le (14). Risulta così un ordine di grandezza come quello trovato per il rapporto delle frecce dovute al taglio e al momento flettente nel problema di Saint-Venant ⁽⁴¹¹⁾.

19. Segue da quanto si è visto che si ottiene la rotazione della sezione intorno a un dato asse considerando in luogo di una forza una coppia ausiliaria, la cui grandezza si indicherà con \mathcal{M}^* ⁽⁴¹²⁾; e così con due coppie ausiliarie opposte in sezioni infinitamente vicine si ottengono le rotazioni relative delle sezioni medesime. Applicate le coppie $\mp \mathcal{M}_x^* i$ si hanno per il rapporto $\frac{M_x^*}{\mathcal{M}_x^*}$ diagrammi opposti, salvo lo spostamento, della discontinuità unitaria dalla sezione considerata alla sezione infinitamente vicina; onde l'integrale

$$\int_0^l \frac{M_x^*}{\mathcal{M}_x^*} ds$$

si riduce semplicemente a ds , e risulta così per la rotazione relativa ω_x delle sezioni a distanza unitaria l'espressione

$$\omega_x = \frac{M_x}{EJ_x},$$

⁽⁴¹¹⁾ Nell'espressione dello spostamento di un punto e della rotazione di una sezione è chiaro che tali termini contenenti gli sforzi di taglio non hanno in realtà nessun significato, essendo dell'ordine stesso dell'errore che deve ammettersi in simile ricerca: si ricordi infatti che la tensione ausiliaria nella trave vincolata isostaticamente differisce in modo essenziale da quella data dalla soluzione del problema di Saint-Venant in prossimità dei vincoli, per effetto delle reazioni concentrate. Siccome si vedrà d'altra parte che i termini medesimi sono i soli da cui risulti una differenza tra la rotazione della sezione (quella rotazione media convenzionale che si ottiene col criterio adottato) e la rotazione dell'elemento dell'asse, è da avvertire che non resta però priva di significato anche tale differenza, poichè si vedrà che l'errore derivante dalla causa sopra accennata è esattamente lo stesso nella determinazione delle due rotazioni.

⁽⁴¹²⁾ Si ripete che una tale determinazione acquista un significato preciso solo con la definizione convenzionale di uno spostamento (che non può essere effettivo perchè la deformazione corrispondente alla tensione considerata non è congruente) risultante da un moto rigido di ogni sezione. La distinzione fatta nella soluzione del problema di Saint-Venant tra rotazione della sezione e deformazione di essa (ingobbamento e deformazione nel proprio piano) era anch'essa evidentemente convenzionale, perchè fondata su un'arbitraria scissione delle espressioni delle componenti dello spostamento. Si vedrà che la rotazione così definita, uguale a quella dell'elemento dell'asse, non è (come s'è accennato nella nota precedente) la rotazione medesima che viene a considerarsi nello stesso problema col criterio ora adottato.

cioè la stessa della soluzione di Saint-Venant. (Si ricordi in proposito di questa, l'ultima nota.) Allo stesso modo si ottengono le espressioni

$$\omega_y = \frac{M_y}{EJ_y}, \quad \omega_t = \frac{M'_t}{GJ'_t}$$

(l'ultima rappresenta la rotazione nel piano della sezione)⁽⁴¹³⁾.

È importante osservare che la coppia nella seconda sezione va considerata parallela a quella della prima sezione (cioè rispettivamente secondo l'asse x , o y o t , della prima sezione, non secondo l'asse omonimo della seconda). In tal modo s'introduce evidentemente una discontinuità infinitesima nei diagrammi degli altri due momenti dovuti alla seconda coppia. Si ottiene così da ciascuno di essi diagrammi un integrale rappresentato dall'area

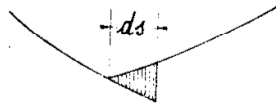


Fig. 56

tratteggiata della fig. 56⁽⁴¹⁴⁾, dunque infinitesimo di second'ordine, che non modifica il risultato. Quando invece si ponga nella seconda sezione la coppia diretta come l'asse considerato (x , y o t) della sezione medesima, si otterrà un integrale infinitesimo di prim'ordine anche, in generale, da

ciascuno dei diagrammi delle altre caratteristiche di sollecitazione (per la variazione delle reazioni), e perciò un risultato diverso. Che sia infatti

$$\omega_x \neq \frac{d\Omega_x}{ds}, \text{ etc.}$$

essendo

$$\Omega = \Omega_x i + \Omega_y j + \Omega_t t$$

⁽⁴¹³⁾ Circa quest'ultima sembra superfluo avvertire, ricordata la nota ⁽⁴⁰⁹⁾, che la discontinuità di $\text{div } \tau$, nel caso che per la sezione a \perp si pongano le τ^* risultanti dalla soluzione del problema accennato al paragrafo 17, non ha alcuna importanza nella valutazione dell'integrale

$$\int_0^l dz \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 \text{div } \tau dA = - \int_{(\Sigma)} \vartheta_0 dA \int_0^l \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} dz,$$

il quale resta ugualmente nullo per ciascuno dei diagrammi riguardanti le due coppie infinitamente vicine.

⁽⁴¹⁴⁾ Nel diagramma di $\frac{M_y^*}{\mathcal{M}_x^*}$ la discontinuità nella seconda sezione vale $-\frac{1}{\tau_t} ds$,

in quello di $\frac{M'_t}{\mathcal{M}_x^*}$ vale $\frac{\cos \varphi}{\rho} ds$, come si ha dalle 14).

la rotazione della sezione, si riscontra immediatamente: si ha, ricordando le (13),

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{d\Omega}{ds} \times \mathbf{i} = \frac{d\Omega_x}{ds} - \frac{1}{\tau_t} \Omega_y + \frac{\cos \varphi}{\rho} \Omega_t, \\ \omega_y &= \frac{d\Omega}{ds} \times \mathbf{j} = \frac{d\Omega_y}{ds} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \Omega_t + \frac{1}{\tau_t} \Omega_x, \\ \omega_t &= \frac{d\Omega}{ds} \times \mathbf{t} = \frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\cos \varphi}{\rho} \Omega_x + \frac{\sin \varphi}{\rho} \Omega_y.\end{aligned}$$

Analogamente si ottengono le componenti $\bar{\Omega}_x$, $\bar{\Omega}_y$ della rotazione $\bar{\Omega}$ di un elemento dell'asse della trave, considerando agli estremi dell'elemento medesimo rispettivamente le forze $\pm F^* \mathbf{j}$ e $\mp F^* \mathbf{i}$ (col segno superiore nel primo estremo), essendo

$$\bar{\Omega}_x = -\bar{\Omega} \wedge \mathbf{t} \times \mathbf{j}, \quad \bar{\Omega}_y = \bar{\Omega} \wedge \mathbf{t} \times \mathbf{i}.$$

Osservando che dai diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione dovuti soltanto alle differenze delle reazioni, cioè alle reazioni prodotte nel primo caso dalla coppia $F^* ds \mathbf{i}$, nel secondo dalla $F^* ds \mathbf{j}$, si ottiene la rotazione Ω_x o Ω_y della sezione, e che resta poi la differenza dei diagrammi $\frac{T_y^*}{F^*}$ o $\frac{T_x^*}{F^*}$ consistente nello spostamento ds della discontinuità unitaria, dalla quale risulta il lavoro virtuale

$$-\chi_y \frac{T_y}{GA} \quad \text{o} \quad \chi_x \frac{T_x}{GA},$$

si conclude che le componenti della rotazione dell'elemento dell'asse sono

$$\bar{\Omega}_x = \Omega_x - \chi_y \frac{T_y}{GA}, \quad \bar{\Omega}_y = \Omega_y + \chi_x \frac{T_x}{GA}.$$

I secondi termini di queste espressioni rappresentano ovviamente l'inclinazione della deformata dell'asse sulla sezione rotata, ossia l'angolo formato con quest'ultima dal piano normale all'asse deformato, che è in realtà la nuova sezione della trave⁽¹⁴⁵⁾. Anche qui da un'osservazione

⁽¹⁴⁵⁾ Si osservi che queste espressioni sono ottenute considerando T_x e T_y ripartite come nella soluzione del problema di Saint-Venant (flessione composta) anche in ogni sezione prossima quanto si voglia a quella in cui si applicano le forze ausiliarie, vale a dire considerando anche queste ultime in tal modo ripartite anzichè concentrate agli estremi dell'elemento dell'asse. Non va dimenticato d'altra parte che la rotazione di esso elemento è una quantità definita, di cui si ottiene così una valutazione approssimata, mentre non esiste una definita rotazione della sezione, essendo quella conside-

analoga alla precedente si trae

$$\bar{\Omega}_x \mp - \frac{d\eta_0}{ds}, \quad \bar{\Omega}_y \mp \frac{d\xi_0}{ds},$$

intese per ξ_0, η_0 le componenti dello spostamento del baricentro secondo l'asse x o y della rispettiva sezione: e infatti anche da uno spostamento diretto in ogni punto secondo l'asse della trave si ha, per la curvatura di questo, una rotazione dell'elemento.

Per la dilatazione dell'elemento dell'asse, $\varepsilon_0 = \frac{\delta ds}{ds}$, si ottiene infine, considerando due forze parallele $\mp F^* t$ agli estremi di esso, ed osservando che il momento della coppia da esse costituita è di second'ordine, l'espressione (dovuta allo spostamento della discontinuità del diagramma $\frac{N^*}{F^*}$)

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA}.$$

20. Si possono ora trovare senza difficoltà in funzione delle quantità sopra considerate, nonchè della curvatura $\frac{1}{\rho}$ e della torsione $\frac{1}{\tau}$ dell'asse, le variazioni dei versori t, n, b e delle stesse $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\tau}$.

rata semplicemente una media delle rotazioni degli elementi superficiali di essa. Se si potessero considerare le forze ausiliarie propriamente concentrate nei baricentri delle rispettive sezioni (cioè se si conoscessero le tensioni prodotte, come caso limite, dalle forze ivi concentrate), si otterrebbe la rotazione dell'asse esattamente (s'intende quella prodotta dall'azione delle forze che equilibrano la tensione assunta come effettiva).

La parte dovuta all'avanzamento della discontinuità dei diagrammi di $\frac{T_y^*}{F^*}$ o $\frac{T_x^*}{F^*}$ sarebbe allora $-(\gamma_{yz})_0$ o rispettivamente $(\gamma_{zx})_0$, valori nel baricentro, com'è chiaro senz'altro, e come infatti deve essere perchè dalla coppia si otterrebbe allora la rotazione dell'elemento superficiale baricentrico della sezione.

Si può ricordare da ultimo che nel problema di Saint-Venant quando sono nulli T_y e T_x è nulla l'inclinazione dell'asse sulla sezione rimasta piana (trazione e flessione semplice), oppure la media ordinaria delle inclinazioni sui diversi elementi di essa: si ha infatti nel caso della torsione

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} dA = \int_{(\Sigma)} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dA = 0$$

(per essere ζ proporzionale a ϑ_0), dove $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ sono, a meno di infinitesimi di ordine superiore, i coseni degli angoli formati dall'asse x colle tangenti alla sezione deformata giacenti rispettivamente nei piani paralleli a zx e a zy .

Si ha innanzitutto dalla stessa definizione del vettore $\bar{\Omega}$

$$\delta t = \bar{\Omega} \wedge t = \bar{\Omega}_b n - \bar{\Omega}_n b,$$

dove

$$\bar{\Omega}_b = \bar{\Omega}_x \sin \varphi + \bar{\Omega}_y \cos \varphi,$$

$$\bar{\Omega}_n = \bar{\Omega}_x \cos \varphi - \bar{\Omega}_y \sin \varphi.$$

Dalla relazione di Frenet

$$\frac{n}{\rho} = \frac{dt}{ds}$$

si ha poi

$$\frac{1}{\rho} \delta n + \delta \frac{1}{\rho} n = \delta \frac{dt}{ds} = \frac{\delta dt}{ds} - \frac{dt}{ds^2} \delta ds = \frac{d \delta t}{ds} - \frac{\varepsilon_0}{\rho} n;$$

onde, per essere $\delta n \times n = 0$,

$$\delta \frac{1}{\rho} = \frac{d \delta t}{ds} \times n - \frac{\varepsilon_0}{\rho}$$

e

$$\delta n = \rho \left(\frac{d \delta t}{ds} - \frac{d \delta t}{ds} \times n \cdot n \right) = \rho \left(\frac{d \delta t}{ds} \times b \cdot b + \frac{d \delta t}{ds} \times t \cdot t \right).$$

E per la precedente espressione di δt , ricordando anche le altre relazioni di Frenet,

$$\delta n = \rho \left(\frac{\bar{\Omega}_b}{\tau} - \frac{d \bar{\Omega}_n}{ds} \right) b - \bar{\Omega}_b t,$$

$$\delta \frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\Omega}_n}{\tau} + \frac{d \bar{\Omega}_b}{ds} - \frac{\varepsilon_0}{\rho}.$$

Dalla $b = t \wedge n$ si ottiene allora

$$\delta b = \bar{\Omega}_n t - \rho \left(\frac{\bar{\Omega}_b}{\tau} - \frac{d \bar{\Omega}_n}{ds} \right) n;$$

e infine dalla

$$\frac{1}{\tau} \delta n + \delta \frac{1}{\tau} n = \delta \frac{n}{\tau} = - \delta \frac{db}{ds} = - \frac{d \delta b}{ds} - \frac{\varepsilon_0}{\tau} n$$

si ha

$$\delta \frac{1}{\tau} = - \frac{d\delta b}{ds} \times n - \frac{\varepsilon_0}{\tau},$$

ossia

$$\delta \frac{1}{\tau} = \frac{d}{ds} \left\{ \varrho \left(\frac{\bar{\Omega}_b}{\tau} - \frac{d\bar{\Omega}_n}{ds} \right) \right\} - \frac{\bar{\Omega}_n}{\varrho} - \frac{\varepsilon_0}{\tau} \quad (116).$$

Le espressioni trovate, e in particolare quelle di $\delta \frac{1}{\varrho}$, $\delta \frac{1}{\tau}$, divengono molto semplici se si trascura l'effetto del taglio ponendo $\bar{\Omega}_n = \Omega_n$, $\bar{\Omega}_b = \Omega_b$. Si ha infatti

$$\frac{d\Omega_b}{ds} = \omega_b - \frac{\Omega_n}{\tau},$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds} = \omega_n + \frac{\Omega_b}{\tau} - \frac{\Omega_t}{\varrho},$$

essendo

$$\omega_b = \frac{d\Omega}{ds} \times b = \omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi,$$

$$\omega_n = \frac{d\Omega}{ds} \times n = \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi \quad (117);$$

(116) In proposito delle espressioni che contengono il raggio ϱ al numeratore è da avvertire che per ogni fissato valore di ϱ esse saranno sufficientemente approssimate finchè risultino sufficientemente piccole, cioè fino a certi valori della sollecitazione, tanto minori quanto minore sia la curvatura iniziale dell'asse.

(117) Come precedentemente per $\frac{d\Omega_x}{ds}$, $\frac{d\Omega_y}{ds}$, cioè: dalla

$$\Omega = \Omega_n n + \Omega_b b + \Omega_t t$$

si ha

$$\omega_b = \frac{d\Omega}{ds} \times b = \frac{d\Omega_b}{ds} + \Omega_n \frac{dn}{ds} \times b = \frac{d\Omega_b}{ds} + \frac{\Omega_n}{\tau}$$

(essendo $\frac{dt}{ds} \times b = 0$),

$$\omega_n = \frac{d\Omega}{ds} \times n = \frac{d\Omega_n}{ds} - \frac{\Omega_b}{\tau} + \frac{\Omega_t}{\varrho}.$$

onde

$$\delta t = \Omega_b n - \Omega_n b;$$

$$\delta n = (\Omega_t - \rho\omega_n) b - \Omega_b t;$$

$$\delta b = \Omega_n t - (\Omega_t - \rho\omega_n) n;$$

$$\delta \frac{1}{\rho} = \omega_b - \frac{\varepsilon_0}{\rho}$$

$$\delta \frac{1}{\tau} = \omega_t - \frac{\varepsilon_0}{\tau} - \frac{d(\rho\omega_n)}{ds} \quad (118).$$

Essendo da ultimo evidentemente

$$\delta\varphi = \Omega_t - \delta n \times b \quad (119) = \rho\omega_n,$$

onde

$$\delta \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\delta\varphi}{ds} - \varepsilon_0 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d(\rho\omega_n)}{ds} - \varepsilon_0 \frac{d\varphi}{ds},$$

si ottiene per la variazione della torsione della trave

$$\frac{1}{\tau_t} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\varphi}{ds}$$

(118) Per quest'ultima bisogna anche ricordare che

$$\frac{d\Omega_t}{ds} = \omega_t + \frac{\Omega_n}{\rho}.$$

(119) Dalla

$$\delta n = \Theta \wedge n = \Theta_t b - \Theta_b t$$

si ha

$$\Theta_t = \delta n \times b:$$

questa è la rotazione intorno all'asse t compiuta dal versore n nell'assumere la direzione della nuova normale principale, cioè quella dell'asse deformato nel punto $P + \delta P$ (essendo δP lo spostamento); ed anche ovviamente l'analoga rotazione del versore b . La Ω_t è invece una media delle rotazioni degli elementi della sezione intorno allo stesso asse t , che può assumersi per rotazione dell'intera sezione indeformata come risulta dalla definizione convenzionale dello spostamento, quindi anche per rotazione della coppia x, y degli assi principali d'inerzia: vi sarebbe poi da considerare una seconda rotazione della coppia medesima per portarla a coincidere con quella degli assi principali della nuova sezione, la quale sarebbe distinta dalla vecchia sezione rotata, non risultando quest'ultima normale al nuovo asse; ma tale distinzione s'è già trascurata trascurando l'effetto del taglio.

l'espressione

$$\delta \frac{1}{\tau_t} = \omega_t - \frac{\varepsilon_0}{\tau_t}.$$

Le semplicissime espressioni di $\delta \frac{1}{\varrho}$, $\delta \frac{1}{\tau_t}$ dipendono soltanto dalle caratteristiche di sollecitazione M_x , M_y , M'_t , N nella sezione cui le variazioni medesime si riferiscono: si ha infatti

$$\delta \frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{EJ_x} \sin \varphi + \frac{M_y}{EJ_y} \cos \varphi - \frac{N}{EA\varrho}$$

$$\delta \frac{1}{\tau_t} = \frac{M'_t}{GJ'_t} - \frac{N}{EA\tau_t};$$

dove i termini contenenti N saranno in generale trascurabili rispetto agli altri.

La variazione della curvatura, che è la più importante per le applicazioni, può esprimersi abbastanza semplicemente anche senza trascurare l'effetto del taglio. Basta aggiungere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (\bar{\Omega}_n - \Omega_n) + \frac{d(\bar{\Omega}_b - \Omega_b)}{ds} = \\ & = -\frac{1}{GA\tau} (\chi_x T_x \sin \varphi + \chi_y T_y \cos \varphi) + \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{GA} (\chi_x T_x \cos \varphi - \chi_y T_y \sin \varphi) \right\} = \\ & = -\frac{1}{GA\tau} (\chi_x T_x \sin \varphi + \chi_y T_y \cos \varphi) + \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{GA} (\chi_x T_x \mathbf{j} - \chi_y T_y \mathbf{i}) \right\} \times \mathbf{b} - \\ & \quad - \frac{1}{GA\tau} (\chi_x T_x \mathbf{j} - \chi_y T_y \mathbf{i}) \times \mathbf{n}^{(120)} = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{GA} (\chi_x T_x \mathbf{j} - \chi_y T_y \mathbf{i}) \right\} \times \mathbf{b} = \\ & = \frac{d}{ds} \frac{\chi_x T_x}{GA} \cos \varphi - \frac{d}{ds} \frac{\chi_y T_y}{GA} \sin \varphi + \frac{\chi_x T_x}{GA} \frac{d\mathbf{j}}{ds} \times \mathbf{b} - \frac{\chi_y T_y}{GA} \frac{d\mathbf{i}}{ds} \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Risulta così, ricordando le (13),

$$\delta \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{M_x}{EJ_x} - \frac{\chi_x T_x}{GA\tau} - \frac{d}{ds} \frac{\chi_y T_y}{GA} \right) \sin \varphi + \left(\frac{M_y}{EJ_y} - \frac{\chi_y T_y}{GA\tau} + \frac{d}{ds} \frac{\chi_x T_x}{GA} \right) \cos \varphi - \frac{N}{EA\varrho}.$$

⁽¹²⁰⁾ Perchè $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau}$.

In particolare per $\chi_x = \chi_y = \text{cost} = \chi$ (per esempio nel caso della sezione rettangolare)

$$\delta \frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{EJ_x} \sin \varphi + \frac{M_y}{EJ_y} \cos \varphi - \frac{\chi}{G} \left(\frac{T_b}{A\tau} - \frac{d}{ds} \frac{T_n}{A} \right) - \frac{N}{EA\varrho} \quad (121).$$

Nel caso dell'asse piano, quando uno degli assi principali d'inerzia della sezione giaccia costantemente sul piano dell'asse (che è in pratica il caso generale), posto $\mathbf{j} = \mathbf{n}$, quindi $\mathbf{i} = -\mathbf{b}$ (e $\varphi = -\frac{\pi}{2}$), risulta

$$\delta \frac{1}{\varrho} = -\frac{M_x}{EJ_x} + \frac{d}{ds} \frac{\chi_y T_y}{GA} - \frac{N}{EA\varrho}.$$

Deve essere considerata a parte la trave ad *asse inizialmente rettilineo* ⁽¹²²⁾ Distinto con l'indice 1 lo stato deformato, si ha in tal caso

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{n}}{\varrho} \right)_1 &= \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right)_1 = \delta \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\delta\mathbf{t}}{ds} \quad (123) = \frac{d\Omega}{ds} \wedge \mathbf{t} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\chi_x T_x}{GA} \mathbf{i} + \frac{\chi_y T_y}{GA} \mathbf{j} \right) = \\ &= \left(\frac{M_y}{EJ_y} + \frac{d}{ds} \frac{\chi_x T_x}{GA} - \frac{\chi_y T_y}{GA\tau_t} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{M_x}{EJ_x} - \frac{d}{ds} \frac{\chi_y T_y}{GA} - \frac{\chi_x T_x}{GA\tau_t} \right) \mathbf{j}; \end{aligned}$$

e nel caso della sezione costante

$$\left(\frac{\mathbf{n}}{\varrho} \right)_1 = \left(\frac{M_y}{EJ_y} + \frac{\chi_x}{GA} \frac{dT_x}{ds} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{M_x}{EJ_x} - \frac{\chi_y}{GA} \frac{dT_y}{ds} \right) \mathbf{j}.$$

$$\begin{aligned} (121) \quad -\frac{d}{ds} \frac{T_y}{A} \sin \varphi + \frac{d}{ds} \frac{T_x}{A} \cos \varphi &= \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{A} (-T_y \sin \varphi + T_x \cos \varphi) \right\} + \left(\frac{T_y}{A} \cos \varphi + \right. \\ &\left. + \frac{T_x}{A} \sin \varphi \right) \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{T_n}{A} + \frac{T_b}{A} \frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned}$$

e

$$\frac{T_b}{A} \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\tau_t} \right) = \frac{T_b}{A\tau}$$

⁽¹²²⁾ Per $\varrho \rightarrow \infty$ tendono pure all'infinito, come s'è visto, le espressioni delle variazioni $\delta\mathbf{n}$, $\delta\mathbf{b}$ e $\delta \frac{1}{\tau}$; e d'altra parte per la trave ad asse rettilineo gli assi \mathbf{n} e \mathbf{b} sono inizialmente indeterminati; perciò le espressioni medesime perdono significato. (Si ricordi la nota ⁽¹¹⁸⁾.)

⁽¹²⁴⁾ In questo e nel successivo passaggio è da ricordare che $\frac{dt}{ds} = 0$. (E s'intende che δ è sempre il differenziale.)

Per la torsione della trave si ha in quest'ultimo caso (quando dunque inizialmente $\frac{1}{\tau_t} = 0$)

$$\left(\frac{1}{\tau_t}\right)_1 = \frac{d\Omega}{ds} \wedge \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \omega_t = \frac{M'_t}{GJ'_t}.$$

Da questa potrebbe infine ricavarsi la $\left(\frac{1}{\tau}\right)_1$, togliendo la $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_1$ ottenuta derivando l'espressione di $\varphi (= \sin \varphi)$ che si ha ovviamente da quella di $\left(\frac{\mathbf{n}}{\varrho}\right)_1$.

FINITO DI STAMPARE CON I TIPI DELLA
TIPOGRAFIA "ODERISI,, EDITRICE IN GUBBIO
IL 31 OTTOBRE 1966