

Questa espressione risulterà nulla solo quando sia  $\vartheta_0 = \text{cost.}$ : è facile verificare che questo è il caso della sezione circolare, o a corona circolare; per le quali sezioni si ha dunque  $q = 1$  <sup>(22)</sup>. Quanto alla seconda disuguaglianza si osservi che per ciò che s'è ora trovato può scriversi

$$\begin{aligned} J_p - \int_{(\Sigma)} \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) dA &= \int_{(\Sigma)} \left\{ x^2 + y^2 - 2 \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dA = \\ &= \int_{(\Sigma)} \left\{ \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right)^2 + \left( y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right)^2 \right\} dA > 0 \quad (23). \end{aligned}$$

È chiaro inoltre che il fattore  $q$  dipende soltanto dalla forma della sezione, cioè che assume uno stesso valore per tutte le sezioni simili: tale proprietà non si distingue infatti dall'indipendenza rispetto all'unità

<sup>(22)</sup> Risulta anche evidentemente che una funzione lineare non costante non può soddisfare alla condizione al contorno della  $\vartheta_0$  per nessuna sezione: non sarebbe nullo infatti l'ultimo membro dell'uguaglianza sopra trovata, mentre dovrebbe essere nullo il primo membro.

Considerato direttamente il problema della sezione per la quale risulti

$$\vartheta_0 = ax + by + c,$$

si ha  $a\alpha_x + b\alpha_y = x\alpha_y - y\alpha_x$ , ossia  $(y+a)\alpha_x = (x-b)\alpha_y$ ; o anche, posto  $y_1 = y+a$ ,  $x_1 = x-b$ ,

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

dove sia  $f(x_1, y_1) = \text{cost.}$  l'equazione del contorno. Quindi

$$\frac{dy_1}{dx_1} = - \frac{x_1}{y_1},$$

onde

$$x_1^2 + y_1^2 = \text{cost.},$$

che è l'equazione di un cerchio col centro nel punto  $x = b$ ,  $y = -a$ . Poichè la condizione al contorno per la  $\vartheta_0$  della torsione è riferita nella forma sopra ricordata ad assi baricentrici, risulta necessariamente  $a = b = 0$ . (In tal caso la medesima condizione resta verificata per ogni cerchio col centro nell'origine, perciò la costante è funzione  $\vartheta_0$  anche per la sezione a corona circolare.)

<sup>(23)</sup> Non può essere zero perchè dovrebbe essere

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} = -y,$$

cosa ovviamente impossibile: perciò  $q$  non può tendere all'infinito se non tendendo a zero o all'infinito l'area della sezione. (Si veda per esempio il caso della sezione ellittica.)

di misura delle lunghezze, ossia dal già osservato carattere di puro numero. (Il problema della determinazione della funzione  $\vartheta_0$ , che ha evidentemente le dimensioni di un'area, diventa numericamente lo stesso per due sezioni simili se si assumono gli assi coordinati corrispondenti nella similitudine, e le unità di lunghezza nello stesso rapporto delle dimensioni delle sezioni medesime: così anche l'integrale

$$\int_{(\Sigma)} \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) dA$$

assume per le due sezioni uno stesso valore numerico, al pari di  $J_p$ ; onde risulta infine uno stesso valore del numero  $q$ .)

Le componenti della deformazione diverse da zero sono soltanto  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{yz}$ , le cui espressioni si ottengono dividendo le (5) per  $G$ ; e risultano così ovviamente le espressioni dello spostamento

$$\xi = -q \frac{M_t}{GJ_p} zy, \quad \eta = q \frac{M_t}{GJ_p} zx, \quad \zeta = -q \frac{M_t}{GJ_p} \vartheta_0(x, y).$$

La costante della  $\vartheta_0$  resterà determinata dalla condizione  $\vartheta_0(0, 0) = 0$  quando il baricentro sia interno alla sezione, e più in generale quando la  $\vartheta_0$  risulti analiticamente definita in un campo che lo comprenda: senza tale condizione, o un'altra analoga (n. nota <sup>(10)</sup>), lo spostamento resterà indeterminato per una traslazione lungo l'asse del cilindro.

Le espressioni delle componenti  $\xi$  ed  $\eta$  dimostrano che lo spostamento di ogni punto della sezione generica nel piano della sezione stessa è dato da una semplice rotazione di questa intorno al baricentro dell'angolo

$$\Omega(z) = q \frac{M_t}{GJ_p} z;$$

onde risulta la rotazione relativa di due sezioni infinitamente vicine intorno all'asse  $z$  del valore costante (riferito all'unità di distanza)

$$\omega = q \frac{M_t}{GJ_p} = \frac{M_t}{GJ'_t},$$

posto

$$J'_t = \frac{J_p}{q}.$$

Il prodotto  $GJ'_t$ , rapporto del momento torcente a tale rotazione relativa, dicesi *rigidezza torsionale*. Le sezioni così rotate (e ciascuna indeformata nel proprio piano) vengono poi ad incurvarsi, o ingobbarsi, tutte allo stesso modo per la componente  $\zeta$  proporzionale alla funzione armonica  $\vartheta_0$ .

È interessante osservare che ogni retta parallela all'asse del cilindro si mantiene in tale deformazione rettilinea e inestesa, compiendo solo un moto rigido, anzi una semplice rotazione. Mentre infatti la componente  $\zeta$

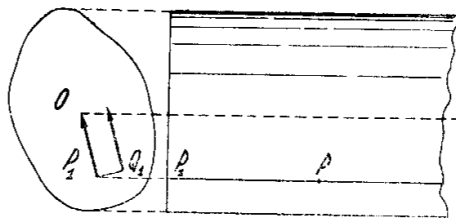


Fig. 8

è data da una traslazione nella direzione della stessa retta (scorrimento di questa su sè stessa), le altre due componenti sono date evidentemente dalla rotazione rappresentata dal vettore applicato  $\omega(O - P_1)$ , essendo  $O$  il baricentro di una delle basi, origine degli assi, e  $P_1$  la traccia della retta considerata sulla

base medesima (fig. 8): detto cioè  $s_0(P)$  lo spostamento del punto generico  $P$  di tale retta proiettato nel piano della sezione, si ha

$$s_0(P) = \omega(O - P_1) \wedge (P - P_1) \quad (24).$$

Risultante di questa rotazione colla suddetta traslazione in direzione normale al vettore  $O - P_1$  è poi la rotazione rappresentata dallo stesso vettore applicato traslato di

$$Q_1 - P_1 = -\vartheta_0(P) \frac{O - P_1}{(O - P_1)^2} \wedge k,$$

essendo  $k$  il versore secondo l'asse  $z$  <sup>(25)</sup>. ( $Q_1 - P_1$  è dunque il vettore ottenuto da  $O - P_1$  per rotazione negativa di  $\frac{\pi}{2}$  nel piano della base, ridotto nel rapporto  $\frac{\vartheta_0(x, y)}{x^2 + y^2}$ .)

È da ricordare naturalmente anche qui che la deformazione trovata può differire da quella effettiva per quantità che al limite siano infinite-sime d'ordine superiore. Come le deformate delle rette parallele all'asse del cilindro nella flessione semplice risultano parabole, ed è da presumere che debbano effettivamente essere cerchi, così è da presumere che nella torsione le rette medesime, che qui appaiono mantenersi rettilinee, si trasformino effettivamente in eliche circolari: dalla semplice rotazione di esse si avrebbe infatti la conseguenza di una progressiva dilatazione trasversale.

(24)  $\omega(O - P_1) \wedge (P - P_1) = \omega z(O - P_1) \wedge k = \omega z(-yj + xj).$

(25) Si ha così

$$\begin{aligned} s(P) &= s_0(P) - \omega(O - P_1) \wedge (Q_1 - P_1) = s_0(P) + \omega \frac{\vartheta_0}{(O - P_1)^2} (O - P_1) \wedge \{(O - P_1) \wedge k\} = \\ &= s_0(P) - \omega \vartheta_0 k. \end{aligned}$$

(Si ricordi che  $a \wedge (b \wedge c) = (a \times c)b - (a \times b)c.$ )

Quanto alla componente  $\zeta$ , proporzionale alla  $\vartheta_0$ , che dà l'ingobbamento della sezione, si può dimostrare facilmente che quando la sezione ha un asse di simmetria essa risulta antisimmetrica rispetto all'asse medesimo (cioè a valori opposti in punti simmetrici): basta osservare che è antisimmetrica l'espressione assegnata per la derivata normale al contorno  $\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} = x\alpha_y - y\alpha_x$ , avendosi in punti simmetrici, assunto l'asse di simmetria come asse  $y$ , valori uguali di  $\alpha_y$  e valori opposti di  $\alpha_x$  <sup>(26)</sup>. La fig. 9 rappresenta una sezione ribaltata di una superficie con ordinate antisimmetriche; le figg. 10, 11 e 12 danno la rappresentazione a curve di livello dell'ingobbamento delle rispettive sezioni, aventi rispettivamente due, tre e quattro assi di simmetria <sup>(27)</sup>.

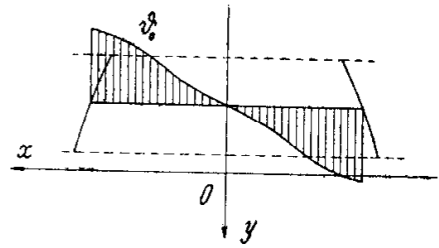


Fig. 9

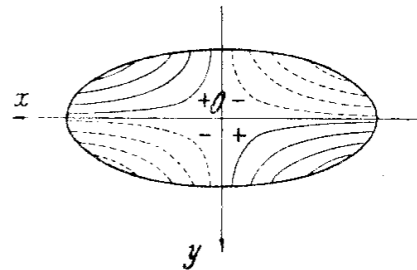


Fig. 10

<sup>(26)</sup> Si ricordi che l'asse di simmetria (s'intende simmetria ortogonale) è necessariamente asse principale d'inerzia.

Posto

$$\vartheta'_0(x, y) = \vartheta_0(-x, y),$$

funzione ancora ovviamente armonica, si osservi che  $\frac{\partial \vartheta'_0}{\partial n}$  risulta in ogni dato punto del contorno uguale a  $\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}$  nel punto simmetrico: per quanto sopra s'è detto sui valori di  $\alpha_x$  ed  $\alpha_y$  in tali punti, si ha così per la funzione  $\vartheta'_0$  la condizione al contorno

$$\frac{\partial \vartheta'_0}{\partial n} = -x\alpha_y + y\alpha_x.$$

Si ottiene quindi dalla soluzione del problema di Neumann, tenuto conto della continuità nei punti dell'asse  $y$  dove le due funzioni coincidono,  $\vartheta'_0 = -\vartheta_0$ , ossia

$$\vartheta_0(-x, y) = -\vartheta_0(x, y),$$

espressione dell'antisimmetria della  $\vartheta_0$ .

<sup>(27)</sup> Non è da credere che in ogni regione compresa tra due assi di simmetria la  $\zeta$  conservi sempre uno stesso segno, come negli esempi delle tre figure. Basta pensare ad un rettangolo coi lati quasi uguali: gli assi di simmetria sono due soli, ma l'andamento della  $\zeta$  non può essere sostanzialmente diverso da quello del quadrato.

Lo stato di tensione questa volta è biassiale. Come dimostra la rappresentazione per mezzo dei cerchi di Mohr (fig. 13), le due tensioni principali sono opposte (una trazione e una compressione) e uguagliano in valore assoluto la tensione tangenziale, risultante dei vettori  $\tau_{zx} \mathbf{i}$  e  $\tau_{yz} \mathbf{j}$ ; e gli assi principali sono le bisettrici dell'angolo retto formato dalle direzioni dell'asse  $z$  e della risultante medesima.

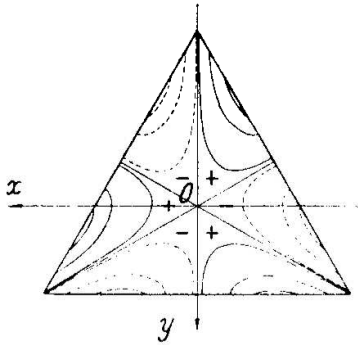


Fig. 11

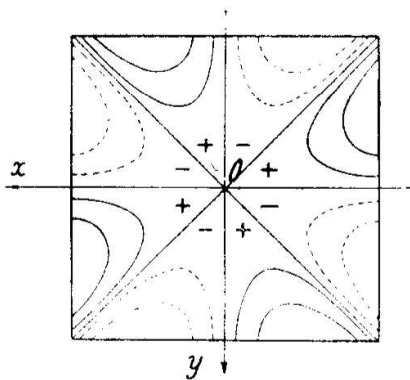


Fig. 12

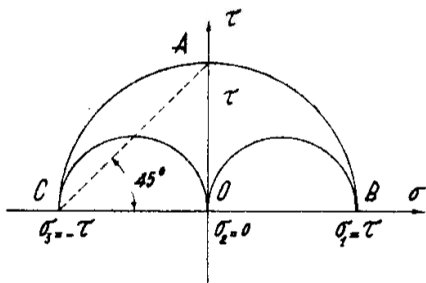


Fig. 13

L'energia potenziale elastica unitaria è

$$\varphi = \frac{1}{2G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2) =$$

$$= \frac{M_t^2}{2GJ_t'^2} \left\{ \left( y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right)^2 + \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right)^2 \right\};$$

e il lavoro di deformazione

$$\mathcal{L} = \frac{M_t^2}{2GJ_t'^2} l \int_{(\Sigma)} \left\{ \left( y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right)^2 + \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dA;$$

onde, ricordando che questo integrale è uguale a

$$J_p = \int_{(\Sigma)} \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) dA = \frac{J_p}{q} = J_t',$$

risulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_t \frac{M_t}{GJ_t'} l = \frac{1}{2} M_t \Omega(l),$$

conforme al teorema dei lavori virtuali applicato nel modo già detto per i casi precedenti.

**6.** Come esempio si dà l'espressione della funzione  $\vartheta_0$ , e quindi quelle di  $J_t'$  e delle componenti della tensione, per la *sezione ellittica* di semiassi  $a$  e  $b$ , rispettivamente secondo  $x$  ed  $y$ . Essendo

$$\alpha_x = \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}, \quad \alpha_y = \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

(come si ha ovviamente dall'equazione dell'ellisse), risulta

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} xy;$$

e si verifica immediatamente che a tale condizione soddisfa la funzione armonica

$$\vartheta_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy.$$

Si ha poi

$$\int_{(\Sigma)} \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) dA = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \int_{(\Sigma)} (x^2 - y^2) dA = \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{\pi}{4} ab;$$

e infine

$$J'_t = J_p - \int \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) dA = \frac{\pi}{4} ab \left\{ a^2 + b^2 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \right\} = A \frac{a^2 b^2}{a + b^2},$$

essendo  $A = \pi ab$  l'area dell'ellisse.

Le espressioni delle componenti della tensione divengono così

$$\tau_{zx} = -2 \frac{M_t}{Ab^2} y, \quad \tau_{yz} = 2 \frac{M_t}{Aa^2} x.$$

Si deduce da queste espressioni che la tensione  $\tau$  sulla sezione in tutti i punti di ogni segmento passante per il centro ha la stessa direzione, cioè quella della tangente all'ellisse agli estremi del segmento medesimo, variando d'intensità linearmente con valore nullo al centro (fig. 14). Quanto all'intensità della tensione nei punti del contorno,

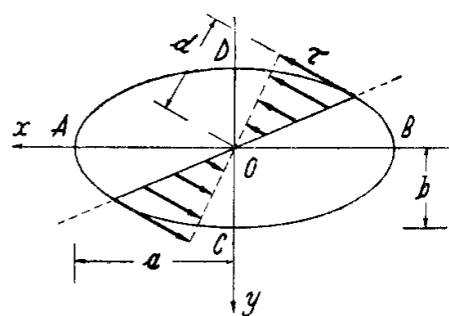


Fig. 14

$$\tau = 2 \frac{|M_t|}{A} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}},$$

si osservi che detta  $d$  la distanza dal centro della tangente nel punto generico, si ha

$$d = x \alpha_x + y \alpha_y = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}},$$

onde risulta

$$\tau = 2 \frac{|M_t|}{Ad} :$$

tale intensità è dunque inversamente proporzionale alla distanza dal centro della stessa linea d'azione della tensione. La tensione massima si ha così agli estremi dell'asse minore, ed ha il valore

$$\tau_{\max} = 2 \frac{|M_t|}{Ab}$$

(posto che dei due semiassi sia  $b$  il minimo).

Per la *sezione circolare* o *a corona circolare* si ha, come già s'era detto,  $\vartheta_0 = 0$ ,  $q = 1$ . Tale sezione si mantiene piana, e la tensione massima risulta

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|}{J_p} r,$$

essendo  $r$  il raggio esterno <sup>(28)</sup>.

Per la *sezione rettangolare* la funzione  $\vartheta_0$  non si può esprimere che in serie, e così naturalmente il momento  $J'_t$  e la tensione. Si può porre l'espressione di  $J'_t$  nella forma

$$J'_t = \left( \frac{1}{3} - \beta \frac{b}{a} \right) ab^3,$$

essendo  $a$  il lato maggiore e  $b$  il lato minore del rettangolo, e  $\beta$  una funzione del rapporto  $\frac{b}{a}$ ; e l'espressione della tensione massima, che si ha nel punto di mezzo del lato maggiore, nella forma

$$\tau_{\max} = 3\alpha \frac{|M_t|}{ab^2},$$

dove  $\alpha$  è pure funzione dello stesso rapporto. Il numero  $\beta$  varia solo tra 0,2101 per  $\frac{b}{a} \rightarrow 0$  (rettangolo infinitamente stretto) e 0,1928 per  $\frac{b}{a} = 1$

---

<sup>(28)</sup> Per la sezione delimitata da due ellissi omotetiche la funzione  $\vartheta_0$  è quella stessa della sezione delimitata da una sola delle ellissi medesime, e così pure il fattore  $q$ : la tensione varia come nella sezione delimitata dalla sola ellisse esterna, mutando nell'espressione di essa solo il momento  $J_p$  (o, nello stesso rapporto,  $J'_t$ ).

(quadrato), assumendo il valore 0,2093 per  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ ; il numero  $\alpha$  varia da 1 per  $\frac{b}{a} \rightarrow 0$  a 1,600 per  $\frac{b}{a} = 1$ , assumendo per  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$  il valore 1,356. Per un rettangolo sufficientemente stretto potranno dunque essere sufficientemente approssimate le espressioni

$$J'_t = \frac{ab^3}{3}, \quad \tau_{\max} = 3 \frac{|M_t|}{ab^2} = \frac{|M_t|}{J'_t} b.$$

Potrà anche usarsi in ogni caso l'espressione approssimata (di Bach)

$$\tau_{\max} = \left( 3 + \frac{2,60}{0,45 + \frac{a}{b}} \right) \frac{|M_t|}{ab^2}.$$

Un caso che può trattarsi per approssimazione con estrema semplicità è quello del *cilindro cavo con parete sottile*. Dalle espressioni (5) di  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{yz}$  basta trarre in tal caso l'importante conseguenza che

$$\operatorname{div} \tau = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0;$$

onde (com'è noto, e come si dimostra in ovvio modo)

$$\int_{(c)} \tau \times n \, ds = 0,$$

essendo  $c$  una linea chiusa arbitraria delimitante una parte della sezione, ed  $n$  la normale ad essa (esterna o interna): è nullo cioè il flusso del vettore  $\tau$  attraverso ogni linea siffatta.

Considerata allora la linea chiusa  $ABDC$  della fig. 15, e ricordato che nei punti dei tratti  $BD$  e  $CA$  il vettore  $\tau$  è tangente alla linea medesima, si conclude che è costante il flusso attraversante ogni linea (come  $AB$  e  $CD$ ) interna alla sezione del cilindro, che congiunga un punto della linea di contorno interna con un punto di quella esterna, secondo un determinato senso di percorrenza dell'una o dell'altra delle linee stesse.

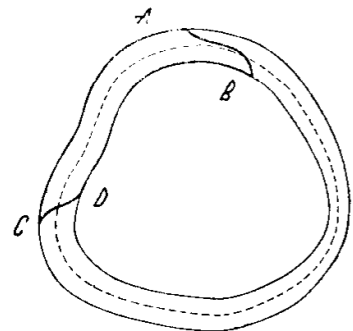


Fig. 15



Il flusso attraversante un segmento rettilineo normale alla linea mediana (tratteggiata nella figura)<sup>(29)</sup> può indicarsi con  $\bar{\tau}\delta$ , essendo  $\delta$  la lunghezza del segmento medesimo, cioè lo spessore della parete, e  $\bar{\tau}$  un valore medio di  $\tau \ll t$  nei punti di esso segmento, dove sia  $t$  il versore secondo la tangente alla linea mediana nel prefissato senso di percorrenza. Assunto quest'ultimo in modo che il triedro delle direzioni  $z, n, t$ , essendo  $n$  la normale esterna alla linea mediana, sia congruente con quello degli assi fondamentali, il momento dei vettori  $\bar{\tau}\delta \cdot t ds$  lungo la linea mediana rispetto a un punto qualunque  $O$  del piano dovrà uguagliare, ove si riguardi come nullo l'integrale della proiezione del vettore  $\tau$  nei punti del considerato segmento secondo la direzione  $n$ , il momento  $M_t k$ <sup>(30)</sup>. Da questa sola condizione, cioè dalla stessa definizione del momento torcente, ricordando la costanza del flusso  $\bar{\tau}\delta$ , si ottiene immediatamente il valore di  $\bar{\tau}$ : indicato infatti con  $P$  il punto generico della linea mediana  $c$ , essa condizione si scrive

$$\bar{\tau}\delta \int_{(c)} (P - O) \wedge t ds = M_t k;$$

onde

$$\bar{\tau} = \frac{M_t}{2A\delta},$$

essendo  $A$  l'area racchiusa dalla linea  $c$ <sup>(31)</sup>. Questa espressione è nota come *formula di Bredt*.

<sup>(29)</sup> Potrebbe definirsi in modo preciso la linea mediana come quella i cui punti sono equidistanti dalle due linee del contorno, misurata la distanza normalmente alla linea medesima; l'esistenza della quale è dimostrabile, posto che lo spessore sia abbastanza piccolo rispetto ai raggi di curvatura di esse linee, mediante un ovvio procedimento di successive approssimazioni. Ma sarebbe per il problema qui considerato una definizione inutile, poichè non è detto che il riferimento alla vera linea mediana così definita dia in tale problema il risultato più prossimo al vero.

<sup>(30)</sup> Si avverta che anche dove, per essere le due linee del contorno notevolmente convergenti, le proiezioni su  $n$  delle singole  $\tau$  non fossero trascurabili, riuscirebbe trascurabile l'integrale di esse sullo spessore.

$$^{(31)} \int_{(c)} (P - O) \wedge t ds = \int_{(c)} (P - O) \wedge (k \wedge n) ds = \int_{(c)} (P - O) \times n ds \cdot k,$$

e posta in  $O$  l'origine degli assi,

$$\int_{(c)} (P - O) \times n ds = \int_{(c)} (x\alpha_x + y\alpha_y) ds = 2 \int_{(\Sigma)} dA.$$

Basta osservare infine che tale valore medio  $\bar{\tau}$  può riguardarsi anche come valore medio della stessa tensione tangenziale, la cui direzione è in ogni punto del considerato segmento assai prossima a quella di  $t$  (essendo il valore massimo dell'angolo di esse direzioni quello noto a uno degli estremi del segmento medesimo), e che può allora assumersi anche come valore effettivo della tensione in ciascun punto<sup>(32)</sup>.

7. Un'ovvia analogia consente una rappresentazione intuitiva dell'andamento del vettore  $\tau$  nella sezione del cilindro soggetto a torsione, ed anche la deduzione di una semplice espressione approssimata di  $J'_t$  e della tensione massima in casi di grande interesse.

S'è già osservato che

$$\operatorname{div} \tau = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Si osservi ora che il rotazionale (o vorticale) dello stesso vettore è costante, risultando ovviamente dalle (5)

$$\operatorname{rot} \tau = \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 2 \frac{M_t}{J'_t} \mathbf{k};$$

e si ricordi che nei punti del contorno il vettore  $\tau$  è tangente al contorno medesimo. Quest'ultima proprietà e quella della divergenza nulla caratterizzano anche la velocità del moto, parallelamente al piano  $xy$ , di un fluido incompressibile contenuto in un recipiente cilindrico ad asse parallelo a  $z$ , avente la stessa sezione del cilindro considerato (essendo nota la seconda delle suddette proprietà come « condizione di continuità » del moto dei fluidi incompressibili): quando poi si consideri un tal moto permanente e a rotazionale costante, risulterà in ogni caso la velocità proporzionale al vettore  $\tau$  riguardante la torsione dello stesso cilindro<sup>(33)</sup>. In ciò con-

<sup>(32)</sup> Nello scambio del valor medio della componente  $\tau \times t$  col valor medio della stessa tensione l'approssimazione è dello stesso ordine di quella precedentemente introdotta col trascurare l'integrale della componente  $\tau \times n$  (v. nota <sup>(30)</sup>): manca infatti qui la compensazione dei valori di tali componenti, ma la differenza fra  $\tau \times t$  e  $\operatorname{mod} \tau$  è del second'ordine rispetto all'angolo delle due direzioni, mentre  $\tau \times n$  è del primo ordine.

In queste considerazioni è ovviamente sottintesa l'osservazione intuitiva che nei diversi punti di uno stesso segmento normale alla linea mediana le tensioni  $\tau$  debbono essere di senso concorde.

<sup>(33)</sup> Si dimostra facilmente che un vettore resta univocamente determinato in un campo aciclico quando sono assegnati la divergenza, il rotazionale e la componente normale al contorno, essendo necessariamente nullo un vettore a divergenza e rotazionale nulli e componente normale nulla al contorno di un tale campo (anche spaziale): dalla

siste la così detta *analogia idrodinamica* di Lord Kelvin e Greenhill<sup>(34)</sup>.

L'utilità di questa analogia proviene dall'esser più facile intuire l'andamento della velocità di un liquido che quello della tensione tangenziale di torsione. Le linee di velocità (o di flusso), che nel moto permanente sono anche traiettorie, hanno per esempio nel caso della sezione triango-

condizione  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  (condizione d'integrabilità della forma differenziale  $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ ) segue infatti  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ ; e poichè evidentemente

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi, \quad \text{grad } \varphi \times \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

la  $\varphi$  risulta costante, e  $\mathbf{v}$  nullo. Nel caso del campo piano ciclico può aversi una velocità istantanea  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \neq 0$ , essendo  $\varphi$  funzione polidroma colle costanti di polidromia

$$\int_{(c_i)} v ds$$

( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , se  $n$  è l'ordine di connessione del campo), dove le  $c$  siano le singole linee costituenti il contorno, eccettuata quella esterna.

Ma se si passa alla considerazione dei moti permanenti, è da osservare che ogni tal moto nella suddetta sezione del cilindro dev'essere a traiettorie chiuse semplici (cioè senza punti doppi), non intersecantisi; e il percorso di ogni traiettoria deve compiersi in uno stesso tempo da ogni particella che si muova lungo la traiettoria medesima (passando tutte le particelle in ogni dato punto di questa con una data velocità); e che quando il moto sia a rotazionale costante saranno uguali anche i tempi impiegati a percorrere le diverse traiettorie. Un tale moto può infatti considerarsi composto di una rotazione rigida intorno a un certo punto e di un moto irrotazionale, cioè lo stesso moto considerato relativamente a una terna rotante in senso opposto; e poichè nel primo di questi moti al termine della rotazione  $2\pi$  ogni particella si ritrova nel punto iniziale, è necessario che essa abbia compiuto contemporaneamente un cammino chiuso anche nel secondo moto, non essendo altrimenti possibile la chiusura contemporanea dei cammini compiuti da tutte le particelle che percorrono una stessa traiettoria. (Ognuna di queste dovrebbe a un certo momento aver compiuto nei due moti spostamenti opposti, e così anche nel secondo moto ogni elemento della traiettoria avrebbe compiuto una rotazione, contrariamente al dichiarato carattere del moto medesimo.) È chiara allora l'impossibilità di un moto permanente irrotazionale, poichè in esso la velocità media lungo ogni traiettoria dovrebb'essere nulla; e così si conclude infine che anche nel caso della sezione ciclica il moto permanente a rotazionale costante è univocamente determinato, salvo s'intende un fattore di proporzionalità.

(<sup>34</sup>) Si potrebbe dimostrare che il moto da considerare nell'analogia è il moto relativo del liquido perfetto contenuto nel recipiente cilindrico rispetto al recipiente stesso, ottenuto facendo rotare quest'ultimo con velocità costante intorno ad un asse parallelo alle generatrici. (Il moto assoluto, non permanente e non soggetto a condizioni fisse lungo una linea fissa, è irrotazionale.)

In pratica non essendo assolutamente nullo l'attrito interno del liquido nè quello tra esso e la parete, sarà possibile porre in rotazione tutto l'insieme come un corpo rigido; dopo di che arrestando bruscamente il cilindro si avrà in un primo tempo un moto del liquido assai prossimo al moto relativo suddetto.

lare equilatera l'andamento della fig. 16: si vede subito che la velocità è nulla ai vertici; e osservando che nei punti di ogni linea ad esse normale la velocità è inversamente proporzionale alla distanza fra due di esse infinitamente vicine, risulta anche che le tre mediane del triangolo sono i luoghi delle velocità massime (dal baricentro al mezzo dei lati) e delle velocità minime; onde infine, richiedendosi per la costanza del rotazionale l'uguaglianza della velocità media lungo ciascuna delle traiettorie, come s'è visto nell'ultima nota, è chiaro che risulta la velocità massima assoluta nei punti di mezzo dei tre lati. Così per la sezione a corona circolare (fig. 17 a) risulta ovviamente la velocità proporzionale alla distanza dal centro come per la sezione circolare piena; ma se s'inserisce un diaframma (fig. 17 b), corrispondente a un taglio longitudinale del cilindro soggetto a torsione, si costringe il liquido ad un percorso affatto diverso (con flusso nullo attraverso ogni sezione come *AB*); e così nel caso della torsione compensandosi in parte i momenti rispetto

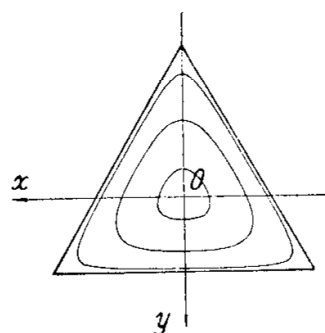


Fig. 16

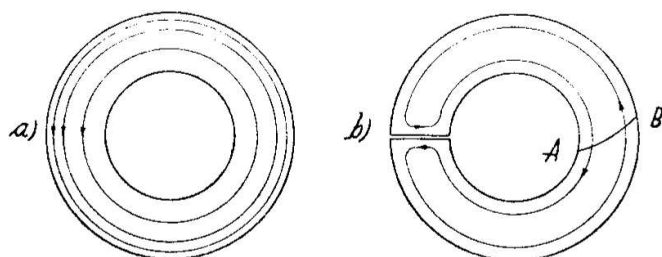


Fig. 17

al baricentro delle tensioni dirette in un senso con quelli delle tensioni dirette in senso opposto, risulta che per il dato momento  $M_t$  occorrerà un massimo valore della tensione assai maggiore di quello del caso del cilindro non tagliato.

Nel caso della sezione a  $\text{I}$  rappresentata schematicamente nella fig. 18 a l'andamento delle linee di velocità, indicato nella figura stessa, differisce sostanzialmente solo presso gli attacchi dei tre rettangoli da quello della fig. 18 b, che mostra il liquido circolante separatamente in ciascuno dei rettangoli medesimi. Anche la tensione  $\tau$  di torsione sarà perciò praticamente in quasi tutta la sezione quella stessa che si avrebbe se ciascuno dei tre cilindri di sezione rettangolare fosse separatamente sollecitato da un momento torcente in modo da risultare i tre rotazionali uguali fra loro, e uguali a quello del caso effettivo.

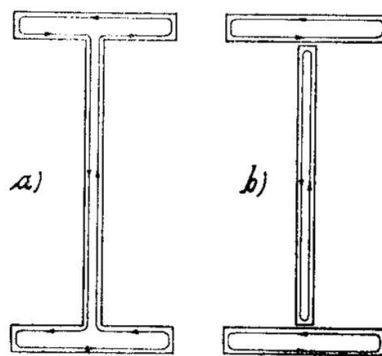


Fig. 18

Ricordando l'espressione del rotazionale risulta che dovrà aversi dunque (con ovvia notazione)

$$\frac{M_t^{(1)}}{J_t'^{(1)}} = \frac{M_t^{(2)}}{J_t'^{(2)}} = \frac{M_t^{(3)}}{J_t'^{(3)}} = \frac{M_t}{J_t'};$$

onde, poichè evidentemente  $\Sigma M_t^{(i)} = M_t$ , risulta anche

$$J_t' = \Sigma J_t'^{(i)}.$$

Dette poi  $h$  le altezze dei rettangoli e  $\delta$  le rispettive larghezze, attesa la piccolezza dei rapporti  $\frac{\delta}{h}$  sarà sufficientemente approssimata per ciascuno di essi l'espressione

$$J_t' = \frac{1}{3} h \delta^3,$$

e quindi per l'intera sezione la

$$J_t' = \frac{1}{3} \Sigma h \delta^3.$$

Infine dalla

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|}{J_t'} \delta,$$

espressione approssimata per ciascun rettangolo, si ottiene per l'intera sezione

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|}{J_t'} \delta_{\max} = \frac{3 |M_t|}{\Sigma h \delta^3} \delta_{\max} :$$

tensione agente nel punto di mezzo del lato maggiore del rettangolo di maggior larghezza.

Tali espressioni di  $J_t'$  e di  $\tau_{\max}$  sono praticamente accettabili per la torsione delle travi impiegate nelle costruzioni in acciaio, la cui sezione può considerarsi composta di rettangoli lunghi e stretti<sup>(35)</sup>.

---

<sup>(35)</sup> Si avverte per altro che se la sezione fosse esattamente come nella figura, nei vertici rientranti la velocità del liquido assumerebbe valore infinito, e così la tensione di torsione. In realtà tali vertici sono sempre arrotondati; e la tensione in essi, che durante il comportamento elastico potrebbe nonostante superare la massima sopra considerata, è in generale priva di importanza per la resistenza effettiva del profilato, come fenomeno locale soggetto a sostanziale mutamento in regime plastico.

Una seconda interessante analogia, cioè *l'analogia della membrana*, o di Prandtl, consente una determinazione sperimentale della tensione  $\tau$ .

Se nelle (5) s'introduce al posto della  $\vartheta_0$  la funzione coniugata  $\chi_0$  (come s'è già accennato in generale alla fine del paragrafo 1), e si pone poi

$$\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \chi_0,$$

tali espressioni divengono

$$\tau_{zx} = -\frac{M_t}{J'_t} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \frac{M_t}{J'_t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5')$$

La funzione  $\varphi$  soddisfa evidentemente all'equazione  $\Delta \varphi = 2$ , e alla condizione al contorno

$$\frac{d\varphi}{ds} = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} - \frac{d\chi_0}{ds},$$

dove

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial s} = -\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} = -x\alpha_y + y\alpha_x = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \quad (37);$$

dunque  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ : ciò significa che  $\varphi$  è costante lungo ciascuna delle linee chiuse costituenti il contorno, e in particolare costante lungo tutto il contorno quando questo sia costituito da una sola linea chiusa, cioè nel caso del cilindro aciclico.

È interessante osservare che tale funzione risulta quindi in ogni caso monodroma, e così anche la  $\chi_0$ . La funzione  $\frac{M_t}{J'_t} \varphi$  è stata detta dal Prandtl *funzione di tensione* (Spannungsfunktion).

(36) In forma vettoriale può scriversi  $\tau = -\frac{M_t}{J'_t} \text{rot} \{ \varphi(x, y) \mathbf{k} \}$ .

(37) S'intende definita la  $\chi_0$  dalle condizioni

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x},$$

e la  $\frac{d\chi_0}{ds}$  è considerata nel senso della tangente orientata in modo che la coppia  $n, t$ , essendo  $n$  la normale esterna, risulti congruente alla coppia  $x, y$ : risulta allora evidentemente

$$\frac{d\chi_0}{ds} = \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = -\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n},$$

e

$$\alpha_x = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{ds}, \quad \alpha_y = \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{dx}{ds}.$$

Considerata un'altra generica linea di livello della funzione  $\varphi$ , e detti  $\mathbf{n}$  (di componenti  $\alpha_x, \alpha_y$ ) e  $\mathbf{t}$  (di componenti  $-\alpha_y, \alpha_x$ ) i versori diretti rispettivamente secondo la normale esterna e la tangente ad essa, si ha dalle (5')

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = -\frac{M_t}{J'_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t} = \frac{M_t}{J'_t} \frac{\partial \varphi}{\partial n} :$$

dunque il vettore  $\boldsymbol{\tau}$  è tangente in ogni punto alla linea di livello passante per il punto medesimo, e proporzionale alla massima pendenza in esso punto di una superficie che rappresenti cartesianamente la funzione  $\varphi$  <sup>(38)</sup>.

Quindi risulta anche, detto  $O$  un punto fisso e  $P$  il punto generico della sezione,

$$\begin{aligned} M_t \mathbf{k} &= \int_{(\Sigma)} (P - O) \wedge (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}) \mathbf{t} dA = \frac{M_t}{J'_t} \int_{(\Sigma)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (P - O) \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}) dA = \\ &= \frac{M_t}{J'_t} \int_{(\Sigma)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (P - O) \times \mathbf{n} dA \cdot \mathbf{k}, \end{aligned}$$

ossia

$$M_t = \frac{M_t}{J'_t} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_e} d\varphi \int_{(c)} (P - O) \times \mathbf{n} ds,$$

essendo  $c$  la linea di livello corrispondente al generico valore di  $\varphi$ , e  $\varphi_e$  il valore al contorno esterno della sezione, che si vede facilmente essere il massimo valore di tale funzione <sup>(39)</sup>. E poichè

$$\int_{(c)} (P - O) \times \mathbf{n} ds = \int_{(c)} (x\alpha_x + y\alpha_y) ds = 2A_c$$

<sup>(38)</sup> Si riferisce ovviamente alla rappresentazione cartesiana anche la denominazione « linee di livello » per le linee lungo le quali la funzione è costante.

<sup>(39)</sup> Si deve avvertire che due linee di livello non potranno mai intersecarsi, perchè la  $\varphi$  è effettivamente un'unica funzione a un sol valore, mantenendosi le sue derivate in ogni punto finite e continue. (Si ricordi che essa è sempre monodroma anche nel caso della sezione ciclica.) Così la  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  conserva lungo ogni linea di livello uno stesso segno; e poichè essendosi posta per la determinazione della  $\varphi$  la condizione

$$\int_{(c)} \frac{\partial \chi_0}{\partial n} ds = 0$$

lungo ogni singolo contorno, cioè

$$\int_{(c)} \frac{d\varphi_0}{ds} ds = 0,$$

(area della superficie racchiusa dalla linea  $c$ ), risulta quindi

$$J'_t = 2 \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_e} A_c d\varphi = 2 \int_{(\Sigma_e)} (\varphi_e - \varphi) dA,$$

essendo  $\Sigma_e$  la superficie racchiusa dalla linea esterna del contorno, e inteso che in ogni punto della superficie racchiusa da ciascuna delle eventuali linee interne (parti tratteggiate della figura 19, che non appartengono alla sezione) sia assegnato alla  $\varphi$  lo stesso valore costante che essa ha sulla linea medesima <sup>(40)</sup>.

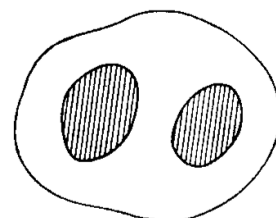


Fig. 19

È facile ottenere una superficie rappresentativa della funzione  $\varphi$  ricorrendo a una membrana perfettamente flessibile, e capace di sopportare nel proprio piano solo sforzi di trazione, che dovranno pertanto essere uguali in ogni direzione del piano medesimo: una tal membrana potrà essere in pratica un velo d'acqua saponata.

che è la condizione di monodromia della funzione  $\vartheta_0$ , si ha

$$\int_{(c)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2A_c$$

(area della superficie racchiusa dalla generica linea di livello), risulta tale segno sempre positivo, quindi  $\varphi_e$  il valore massimo della  $\varphi$ .

L'esistenza di linee di livello costituite di due o più linee chiuse (si pensi ad una sezione con una o più strozzature) non modifica in alcun modo l'espressione trovata, nè quindi il successivo risultato.

<sup>(40)</sup> Tale espressione di  $J'_t$  poteva naturalmente ricavarsi anche in modo diretto dalla definizione

$$J'_t = J_p - \int_{(\Sigma)} \left( x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) dA.$$

Ricordando che s'è già trovato essere questa espressione uguale alla

$$\int_{(\Sigma)} \left\{ \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right)^2 + \left( y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right)^2 \right\} dA,$$

risulta

$$\begin{aligned} J'_t &= \int_{(\Sigma)} \left\{ \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right)^2 + \left( y - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right)^2 \right\} dA = \int_{(\Sigma)} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dA = \\ &= \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\} dA = \int_{(c)} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{(\Sigma)} \varphi \Delta \varphi dA, \end{aligned}$$



Se  $T$  è la suddetta trazione (forza per unità di lunghezza, poichè riguardante l'intero spessore della membrana), e  $\varrho_1, \varrho_2$  sono i raggi di curvatura delle sezioni della membrana con due piani ad essa normali e normali fra loro, un'ovvia considerazione d'equilibrio dimostra la relazione

$$T \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = p,$$

essendo  $p$  la forza per unità di area agente sulla membrana medesima in direzione ad essa normale e in un determinato senso, e intendendosi positivo il raggio di curvatura quando il centro sia sulla parte negativa della normale così orientata<sup>(41)</sup>.

Quando la pressione  $p$  sia costante, e non sia accompagnata da forza in direzione tangenziale, risultando così costante anche  $T$  (per un'altra ovvia considerazione d'equilibrio)<sup>(42)</sup>, la superficie della membrana avrà curvatura totale costante, ovviamente sempre positiva. Quando poi le ordinate di una tal superficie rispetto a un certo piano di riferimento si

essendo  $c$  l'intero contorno; e inteso per  $\varphi_i$  il valore costante di  $\varphi$  sulla  $i^a$  linea chiusa di contorno,

$$J'_t = \sum_{i=0}^n \varphi_i \int_{(c_i)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - 2 \int_{(\Sigma)} \varphi dA = 2\varphi_0 A_0 - 2 \left( \int_{(\Sigma)} \varphi dA + \sum_{i=1}^n \varphi_i A_i \right),$$

che è ovviamente la stessa espressione del testo. (Si avverte che per ogni linea di contorno interna la normale esterna rispetto alla sezione è normale interna rispetto alla superficie racchiusa dalla linea stessa.)

<sup>(41)</sup> Si tratta dell'equilibrio di traslazione in direzione della normale all'elemento di membrana, la cui proiezione sul piano tangente è il rettangolo di lati  $ds_1, ds_2$ . La risultante delle due forze  $Tds_1$  è  $Tds_1 d\omega_2$ , quella delle  $Tds_2$  è  $Tds_2 d\omega_1$ ; onde si ha (fig. 20)

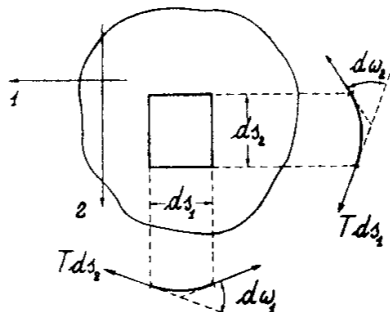


Fig. 20

$$Tds_1 d\omega_2 + Tds_2 d\omega_1 = p ds_1 ds_2,$$

dove poi

$$\frac{d\omega_1}{ds_1} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{d\omega_2}{ds_2} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

<sup>(42)</sup> In proposito di tale condizione d'equilibrio nel piano tangente si avverta che la membrana non potrebbe sopportare una forza arbitrariamente assegnata sul piano medesimo, ma solo una forza rappresentata dal gradiente superficiale di un'arbitraria funzione dei punti della superficie, cioè la tensione  $T$ .

mantengano abbastanza piccole, e sia quindi abbastanza piccola l'inclinazione della tangente in ogni punto di ciascuna delle suddette sezioni rispetto alla rispettiva retta di riferimento (intersezione del piano di essa sezione col piano suddetto), potrà scambiarsi la curvatura della sezione colla derivata seconda dell'ordinata di essa, e la superficie a curvatura totale costante con una a laplaciano costante, come dev'essere la superficie rappresentativa della funzione  $\varphi$ .

È chiaro allora che nel caso della sezione aciclica, quando cioè il contorno sia costituito da una sola linea chiusa, basterà distendere un velo d'acqua saponata su un vano ritagliato in forma della sezione medesima in un sottile lamierino piano, e sottoporlo a una leggera differenza di pressione fra le due facce: le ordinate  $\zeta$  della superficie del velo rispetto al piano del contorno, considerate in valore assoluto, rappresenteranno la funzione  $\varphi$ , posto  $\varphi_e = 0$  (dunque  $\varphi \leq 0$ ), nella scala  $\frac{2}{\Delta\zeta}$ , ossia

$$\varphi = \frac{2}{\Delta\zeta} \zeta \quad (43).$$

Si avrà così

$$J'_t = -2 \int_{(\Sigma)} \varphi \, dA = -\frac{4}{\Delta\zeta} \int_{(\Sigma)} \zeta \, dA,$$

dove l'integrale rappresenta ovviamente il volume del solido compreso tra la membrana e il suddetto piano del contorno; e le (5') assumeranno la forma

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{2 \int_{(\Sigma)} \zeta \, dA} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{M_t}{2 \int_{(\Sigma)} \zeta \, dA} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (44).$$

Queste espressioni valgono anche nel caso della sezione ciclica, inteso come s'è detto di mantenere  $\zeta$  costante all'interno di ciascuna delle linee interne del contorno. La superficie potrà ottenersi in tal caso usando lo stesso lamierino ritagliato in forma del contorno esterno, disposto orizzontalmente, e ricoprendo ogni parte del vano esclusa dalla sezione, cioè rac-

(43) Si avverte che per la convenzione fatta sul segno della curvatura, alla curvatura totale positiva corrisponde un  $\Delta\zeta$  negativo.

(44) S'intende qui che il contorno della sezione sia disegnato al vero. Se si usa una scala  $n$  (cioè se si riducono le dimensioni del contorno nel rapporto  $\frac{1}{n}$ ), le espressioni delle  $\tau$  vanno evidentemente divise per  $n^3$ .

chiusa da uno dei contorni interni, con una laminetta rigida guidata in modo da poter traslare in direzione verticale senza apprezzabile resistenza (e anche praticamente priva di peso); indi, disposto il velo d'acqua saponata sulla rimanente parte del vano, esercitando la pressione su una faccia di esso: ogni laminetta si porterà allora alla quota voluta, cioè quella determinata dalla condizione

$$\int_{(c_i)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2A_i,$$

ossia

$$\int_{(c_i)} \frac{\partial \mathcal{X}_0}{\partial n} ds = 0,$$

che è la condizione richiesta per la monodromia della funzione  $\vartheta_0$ , come s'è già detto in generale. Tale relazione è infatti equivalente alla

$$\int_{(c_i)} \frac{\partial \zeta}{\partial n} ds = \Delta \zeta \cdot A_i,$$

che si trae immediatamente, posto secondo la suddetta approssimazione

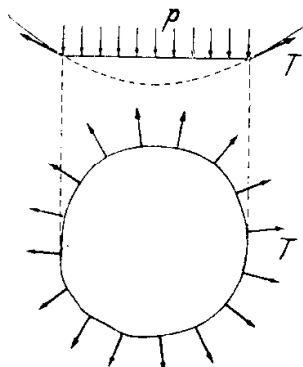


Fig. 21

$T\Delta\zeta = p$ , dalla condizione d'equilibrio della laminetta (fig. 21)

$$pA_i = T \int_{(c_i)} \frac{\partial \zeta}{\partial n} ds.$$

Senza scrivere quest'ultima basterebbe osservare che è la stessa condizione d'equilibrio del velo disteso all'interno della  $c_i$ : dunque la quota della laminetta è determinata dalla condizione che l'in-

clinazione  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$  consenta il prolungamento della su-

perficie  $\zeta$  in tale spazio interno; che è appunto, come s'è già osservato in generale, quella derivante dalla monodromia della  $\vartheta_0$  <sup>(45)</sup>.

(45) Si può da ultimo osservare che per le sezioni di dimensioni non comparabili (come rettangoli molto allungati, o sezioni di profilati metallici) può avere importanza pratica un fenomeno dovuto al diverso ordine di grandezza della rotazione rispetto alla deformazione, per la quale si rende necessario tener conto dei termini di second'ordine dell'espressione di quest'ultima. (Si veda in proposito per esempio quanto è detto più volte nel citato volume di Teoria dell'elasticità.) In forma elementare può esporsi tale questione al modo seguente.

Dalle espressioni trovate dello spostamento (§ 5) risulta, come s'è già osservato, una rotazione dell'elemento inizialmente parallelo all'asse  $z$  rappresentata dal vet-

8. *Flessione composta.*

Si ponga ora solo  $b_2 \neq 0$ , avvertendo che un caso affatto analogo risulta ponendo  $b_1 \neq 0$ .

Le (3) divengono

$$\sigma_z = -Eb_2 yz; \quad \tau_{zx} = Gb_2 \left( \frac{2}{m} xy - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = Gb_2 \left( y^2 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right):$$

tore  $-\omega(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ ; mentre la rotazione occorrente a riportare dopo la deformazione l'elemento medesimo normale alla sezione è rappresentata dal vettore

$$\gamma_{yz} \mathbf{i} - \gamma_{zx} \mathbf{j} = \omega \left\{ \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left( y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) \mathbf{j} \right\}.$$

Ora, mentre

$$\int_{(\Sigma)} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})^2 dA = J_p,$$

s'è trovato

$$\int_{(\Sigma)} \left\{ \left( x - \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left( y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \right) \mathbf{j} \right\}^2 dA = \frac{J_p}{q}:$$

dunque quando il fattore  $q$  è grande, come appunto per le sezioni sopra indicate, la seconda rotazione risulta in media trascurabile rispetto alla prima, e potrà allora reputarsi lecito scambiare l'elemento suddetto con quello che si ritrova normale alla sezione deformata, attribuendo a quest'ultimo la rotazione  $-\omega(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$  e la  $\varepsilon = 0$ , dove sia  $\varepsilon$  l'ordinaria espressione (di prim'ordine) della dilatazione lineare.

Dopo questa premessa fondamentale, si osservi che tale elemento sarebbe così effettivamente soggetto ad una dilatazione, espressa a meno di potenze superiori di  $\omega$  da

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

La corrispondente tensione normale sull'elemento della sezione deformata si otterrebbe semplicemente moltiplicando tale dilatazione per il modulo  $E$  (posto sempre  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , ed essendo tale tensione sostanzialmente una  $\sigma_z$ ); ma risulterebbe così una componente normale

$$N = \frac{1}{2} \omega^2 EJ_p;$$

in mancanza della quale, cioè quando si abbia effettivamente semplice torsione, si avrà una contrazione dell'asse del cilindro

$$-\varepsilon = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{J_p}{A}.$$

La tensione suddetta (che s'indicherà semplicemente con  $\sigma$ , ricordando che non è diretta esattamente secondo l'asse  $z$ ) non risulterà poi in tal modo eliminata punto per punto,

risulta nulla allora la componente normale  $N$ , per essere

$$\int_{(\Sigma)} y \, dA = 0,$$

e così pure il momento flettente  $M_y$ , per essere

$$\int_{(\Sigma)} xy \, dA = 0$$

ma resterà

$$\sigma = \frac{1}{2} \omega^2 E \left( -\frac{J_p}{A} + x^2 + y^2 \right).$$

Supposta qui per semplicità la sezione simmetrica rispetto al baricentro, i momenti flettenti dati da questa tensione sono evidentemente nulli.

Nel caso della sezione ellittica, essendo

$$\frac{J_p}{A} = \approx \frac{1}{4} a^2,$$

e potendosi trascurare  $y^2$ , risulta agli estremi dell'asse maggiore

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{8} \omega^2 a^2 E,$$

al centro

$$\sigma_{\min} = -\frac{1}{8} \omega^2 a^2 E;$$

per la sezione rettangolare di lato maggiore  $2a$ , con

$$\frac{J_p}{A} = \frac{1}{3} a^2,$$

risulta

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{3} \omega^2 a^2 E, \quad \sigma_{\min} = -\frac{1}{6} \omega^2 a^2 E.$$

Da ultimo è da osservare che avendo la suddetta tensione normale nel punto generico la componente

$$\omega \sigma (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$$

nel piano  $xy$ , si ha da essa un momento torcente

$$\mathcal{M}_t = \omega \int_{(\Sigma)} \sigma (x^2 + y^2) \, dA,$$