Capitolo I

IL PROBLEMA DI DE SAINT - VENANT

1. Il problema di cui qui si tratta, sulla soluzione del quale è fondata la teoria delle travi, riguarda un cilindro elastico isotropo di sezione generica, con le basi supposte per semplicità normali all'asse (condizione non essenziale), senza forze di massa e senza forze alla superficie laterale (cioè la superficie cilindrica, che insieme colle basi costituisce l'intera superficie del solido). Le forze alle basi potrebbero essere assegnate punto per punto sotto la sola ovvia condizione dell'equilibrio complessivo; se non che la risoluzione esatta del problema così posto si dimostra praticamente impossibile; ed è merito del De Saint-Venant l'averne data una soluzione approssimata nel senso del principio che porta il suo stesso nome (1), nella quale cioè non si tien conto dell'effettiva ripartizione di tali forze sulle due basi, ma solo del vettore risultante e del momento risultante sull'una o sull'altra di esse: tale soluzione potrà reputarsi valida in ogni caso, conforme al principio suddetto, per tutto il cilindro eccettuati due tratti estremi di lunghezza paragonabile alle dimensioni della sezione. Essa sarà dunque accettabile quando la lunghezza dell'intero cilindro sia di un ordine di grandezza superiore a quello delle dimensioni medesime (e si potrà parlare allora di una trave ad asse rettilineo di sezione costante) (2).

L'accennata soluzione non è stata trovata direttamente, ma ponendo nulle a priori tre componenti della tensione, cioè, assunto l'asse z parallelo alle generatrici,

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \tag{1}$$

---

(1) Vedasi D. Bonvicini e B. Dall'Aglio, *Scienza delle Costruzioni. La teoria dell'elasticità.* — « Oderisi », Gubbio, 1961; § 62.

(2) È importante osservare che una soluzione esatta avrebbe in realtà ben poche applicazioni, poichè raramente potrà essere nota la forza agente sulla sezione estrema di una trave punto per punto.

Si cercherà dunque innanzi tutto la soluzione più generale del sistema delle equazioni indefinite dell'equilibrio e delle equazioni di Beltrami [3] sotto tali condizioni e ponendo nulle le forze di massa; poi si terrà conto dell'annullamento delle forze alla superficie cilindrica, e resteranno nella soluzione sei costanti arbitrarie che consentiranno di sodisfare alle condizioni delle assegnate componenti del vettore e del momento risultante su una delle basi.

Le (1) significano che su ogni elemento di superficie parallelo all'asse z, la cui normale appartenga dunque al piano xy ($\alpha_{nz} = 0$), sono nulle la tensione normale e la componente normale all'asse z della tensione tangenziale: essendo infatti per un tale elemento

$$t_{nx} = \sigma_x \, \alpha_{nx} + \tau_{xy} \, \alpha_{ny}\,, \qquad t_{ny} = \sigma_y \, \alpha_{ny} + \tau_{xy} \, \alpha_{nx}\,,$$

risulta nulla la componente di $\boldsymbol{t}_n$ secondo ogni direzione del piano xy. Può dunque agire su esso elemento solo una tensione tangenziale secondo l'asse z; sicchè può dirsi che le singole « fibre » del cilindro (elementi filiformi paralleli all'asse) non esercitano mutua pressione (positiva o negativa), nè mutua azione tangenziale che tenda a farle scorrere lateralmente, ma possono solo esercitare un'azione mutua in direzione longitudinale. È facile anche vedere che uno stato di tensione sodisfacente alle (1) è sempre biassiale (o eventualmente monoassiale), cioè che una almeno delle tensioni principali deve in ogni punto risultare nulla. Basta osservare che in un punto qualunque la direzione appartenente alla sezione (cioè al piano xy) e normale al vettore $\boldsymbol{\tau}_z$ è direzione principale (fig. 1): la tensione tangenziale sull'elemento ad essa normale, cioè parallelo al vettore medesimo e all'asse z, ha infatti componente nulla sulla giacitura xy come sopra s'è visto (al pari di ogni elemento parallelo a z), e componente nulla anche secondo l'asse z perchè uguale (per la reciprocità delle tensioni tangenziali) alla componente della $\boldsymbol{\tau}_z$ in direzione normale a sè stessa. La tensione principale secondo tale direzione, agente cioè sul piano di $\boldsymbol{\tau}_z$ e dell'asse z, è infine nulla come la tensione normale su ogni elemento parallelo all'asse medesimo.

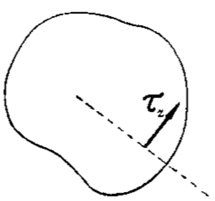

Fig. 1

Si osservi poi che in ogni punto del contorno la $\boldsymbol{\tau}_z$ deve risultare ad esso tangente, essendo nulla per ipotesi la forza di superficie $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\tau}_n$ (detta n la normale ad esso contorno), quindi $\tau_{zn} = \tau_{nz} = 0$.

(3) Per la forma di tali equazioni, come di tutte le relazioni della teoria dell'elasticità, si farà riferimento all'opera sopra citata.

La prima e la seconda delle equazioni indefinite dell'equilibrio divengono per l'ipotesi (1) (e per esser nulle le forze di massa)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0:$$

si porrà pertanto

$$\tau_{zx} = \varphi(x, y), \qquad \tau_{yz} = \psi(x, y). \tag{2}$$

La terza equazione di Beltrami, ricordando che la funzione

$$\Psi = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

si riduce qui al solo termine σ_z, e che per forze di massa nulle risulta $\Delta\Psi = 0$, dà la condizione

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0;$$

e così la prima, la seconda e la quarta delle equazioni medesime danno immediatamente

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

La σ_z ha perciò necessariamente la forma

$$\sigma_z = -E\,\{a_0 + a_1 x + a_2 y + (2c + b_1 x + b_2 y)\, z\},$$

dove a_0, a_1, a_2, c, b_1, b_2 sono costanti arbitrarie.

La sesta equazione di Beltrami diviene, per la prima delle (1) e per quest'ultima,

$$\Delta\varphi = \frac{m}{m+1} E b_1 = 2 G b_1;$$

e analogamente la quinta diviene

$$\Delta\psi = 2 G b_2:$$

si porrà allora ovviamente

$$\varphi = G b_1 x^2 + \varphi_1, \qquad \psi = G b_2 y^2 + \psi_1,$$

essendo φ_1 e ψ_1 funzioni armoniche.

Da ultimo la terza equazione indefinita d'equilibrio diviene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E\,(2c + b_1 x + b_2 y) = 2Ec + 2\,\frac{m+1}{m}\,G\,(b_1\,x + b_2\,y).$$

Così dalle precedenti espressioni di φ e di ψ si ottiene

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2Gb_1 x + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + 2Gb_2 y - \frac{m+1}{m}\,(2Gb_1 x + 2Gb_2\,y) = 2Ec,$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_1 - \frac{2}{m}\,Gb_2 xy\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi_1 - \frac{2}{m}\,Gb_1 xy\right) = 2Ec\,;$$

che può scriversi

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 2\,Ec,$$

posto

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{2}{m}\,Gb_2\,xy = \varphi - G\left(b_1 x^2 + \frac{2}{m}\,b_2 xy\right),$$

e così

$$\psi_2 = \psi - G\left(b_2\,y^2 + \frac{2}{m}\,b_1 xy\right):$$

funzioni evidentemente anch'esse armoniche.

Derivando l'ultima relazione una volta rispetto ad x e una volta rispetto ad y si ottengono ovviamente le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right) = 0\,;$$

onde si porrà

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 2Gb_0\,,$$

essendo b_0 un'altra costante arbitraria. Da questa e dalla medesima precedente risulta che le funzioni armoniche

$$F = \varphi_2 - Ecx - Gb_0 y, \qquad H = \psi_2 - Ecy + Gb_0 x$$

sono coniugate; cioè che

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Si ha infine dalle definizioni di φ_2 e di F

$$\varphi = \varphi_2 + G\left(b_1 x^2 + \frac{2}{m} b_2 xy\right) = F + Ecx + G\left(b_0 y + b_1 x^2 + \frac{2}{m} b_2 xy\right),$$

e analogamente

$$\psi = H + Ecy + G\left(-b_0 x + \frac{2}{m} b_1 xy + b_2 y^2\right);$$

ossia (ricordando le (2))

$$\tau_{zx} = Ecx + G\left(b_0 y + b_1 x^2 + \frac{2}{m} b_2 xy\right) + F(x, y),$$

$$\tau_{yz} = Ecy + G\left(-b_0 x + \frac{2}{m} b_1 xy + b_2 y^2\right) + H(x, y),$$

dove F ed H sono funzioni armoniche coniugate, per ora arbitrarie purchè continue insieme colle loro derivate prime in ogni punto della sezione (proprietà notoriamente richiesta per le componenti della tensione).

Le espressioni trovate di σ_z, τ_{zx}, τ_{yz} costituiscono la soluzione più generale delle equazioni d'equilibrio e di congruenza quando siano poste nulle le altre tre componenti della tensione, e nulle essendo le forze di massa. Resta da tener conto della condizione delle forze nulle alla superficie cilindrica, ossia, come s'è già osservato, della $\tau_{nz} = 0$ in ogni punto del contorno della sezione. Poichè

$$\tau_{nz} = \tau_{zx}\,\alpha_x + \tau_{yz}\,\alpha_y$$

(ovviamente sottinteso nei simboli dei coseni l'indice $_n$), tale condizione si scrive

$$F\alpha_x + H\alpha_y = -Ec(x\alpha_x + y\alpha_y) -$$
$$-G\left\{b_0(y\alpha_x - x\alpha_y) + b_1\left(x^2\alpha_x + \frac{2}{m} xy\alpha_y\right) + b_2\left(\frac{2}{m} xy\alpha_x + y^2\alpha_y\right)\right\};$$

per sodisfare la quale si porrà

$$F = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \qquad H = \frac{\partial \vartheta}{\partial y},$$

essendo ϑ un'altra funzione armonica [4], la cui derivata normale al contorno sarà espressa dal secondo membro della relazione medesima.

Il problema della determinazione di una funzione armonica di cui sia assegnata la derivata normale al contorno del campo è noto come *problema di Neumann*, e ammette (poste per essa funzione condizioni molto generali) un'unica soluzione ove si prescinda da una costante additiva, che qui evidentemente non ha alcuna importanza [5]; ma l'assegnata derivata normale deve sodisfare alla condizione di annullamento dell'integrale di essa esteso al contorno (condizione di compatibilità, ossia di possibilità del problema), come si vede immediatamente trasformando tale integrale mediante il lemma di Gauss: dev'essere dunque

$$\int_{(c)} \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\, ds = 0.$$

Considerata la suddetta espressione di $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$, si trova subito (sempre applicando il lemma di Gauss) che l'integrale del primo termine in G

---

(4) L'esistenza della $\vartheta = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F\,dx + H\,dy$ è assicurata, attesa la già ricordata continuità di F e di H, dalla relazione $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x}$; e per la $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y}$ risulta $\Delta \vartheta = 0$. Inversamente, essendo ϑ funzione armonica, risultano armoniche coniugate le $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$.

(5) Per il lemma di Gauss si ha

$$\int_{(c)} \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\, ds = \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) \right\} dA = \int_{(\Sigma)} \left\{ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2 \right\} dA,$$

essendo nullo l'altro termine per l'armonicità della ϑ; perciò per $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$ risulta necessariamente

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0.$$

Questa conclusione vale quando sia richiesta la funzione ϑ continua in tutto il campo Σ insieme colle sue derivate prime, nonchè monodroma.

risulta nullo senz'altro, e quelli dei termini successivi risultano proporzionali all'uno o all'altro dei momenti statici

$$\int_{(\Sigma)} x\,dA, \qquad \int_{(\Sigma)} y\,dA\,;$$

dunque nulli anch'essi quando le coordinate x, y siano riferite su ogni sezione ad assi baricentrici, cioè quando *sia z lo stesso asse baricentrico del cilindro.* Siccome invece l'integrale del termine $Ec\,(x\alpha_x + y\alpha_y)$ risulta proporzionale all'area della sezione, si conclude che dev'essere necessariamente nulla la costante c.

Si potrà da ultimo porre per comodo

$$\vartheta(x, y) = G\,\{b_0\,\vartheta_0(x, y) - b_1\vartheta_1(x, y) - b_2\vartheta_2(x, y)\},$$

assegnando per le tre funzioni armoniche ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 le condizioni al contorno

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} = x\alpha_y - y\alpha_x, \qquad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = x^2\alpha_x + \frac{2}{m}\,xy\alpha_y, \qquad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{2}{m}\,xy\alpha_x + y^2\alpha_y\,.$$

Così le espressioni più generali delle componenti σ_z, τ_{zx}, τ_{yz} divengono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= -E\,\{a_0 + a_1x + a_2y + (b_1x + b_2y)\,z\},\\
\tau_{zx} &= G\left\{b_0\left(y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\right) + b_1\left(x^2 - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\right) + b_2\left(\frac{2}{m}\,xy - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right)\right\}, \qquad (3)\\
\tau_{yz} &= G\left\{b_0\left(-x + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\right) + b_1\left(\frac{2}{m}\,xy - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y}\right) + b_2\left(y^2 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}\right)\right\},
\end{aligned}$$

dove a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 sono costanti arbitrarie, mentre le ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 sono le funzioni armoniche regolari (vale a dire finite e continue in ogni punto della sezione insieme colle loro derivate prime e seconde) e monodrome, sodisfacenti alle sopra indicate condizioni al contorno (6). La monodromia è richiesta (s'intende nel caso delle sezioni cicliche) come condizione di congruenza della corrispondente deformazione (7).

Invece delle ϑ possono farsi comparire in tale soluzione generale le ri-

(6) La continuità delle derivate seconde che non può richiedersi in generale nel porre il problema di Neumann, come s'è visto nella nota precedente, deve risultare qui per la necessaria condizione di continuità della tensione. (Vedasi l'opera sopra citata, § 32.)

(7) Si vedrà infatti quando si daranno le espressioni delle componenti dello spostamento che la ζ contiene un termine proporzionale alla funzione ϑ (cioè proporzionale alla ϑ_0, alla ϑ_1, alla ϑ_2 rispettivamente in ciascuno dei casi particolari che si conside-

spettive funzioni coniugate χ ponendo $-\frac{\partial\chi}{\partial y}$ in luogo di $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ e $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ in luogo di $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$. Per ciascuna di esse restano evidentemente fissati a meno di una costante i valori lungo ciascuna delle linee chiuse costituenti il contorno (in numero pari all'ordine i di connessione della sezione); e la condizione di monodromia delle ϑ,

$$\int_{(c)} \frac{d\vartheta}{ds}\, ds = 0,$$

si muta nella

$$\int_{(c)} \frac{\partial\chi}{\partial n}\, ds = 0$$

per ciascuna delle linee chiuse del campo non riducibili ad un punto, e in particolare dunque per ciascuna delle medesime linee di contorno

---

reranno ponendo diversa da zero la sola costante b_0, la b_1 o la b_2).

Che tale condizione sia d'altra parte necessaria per rendere determinata la ϑ s'è già accennato alla nota (5); ma può anche osservarsi, con riferimento alla sezione doppiamente connessa della fig. 2, che da ogni $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ assegnata ad arbitrio sui due lati di un taglio che renda la sezione aciclica si ottiene una ϑ armonica regolare nel campo tagliato, ma con valori in generale diversi sui lati medesimi, dalla quale può aversi ovviamente nel campo non tagliato una funzione continua ma polidroma, con derivate prime in generale discontinue attraverso la linea del taglio. Essendo qui richiesta anche la continuità di tali derivate, bisognerà assegnare la $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ con valori opposti dalle due parti; e la condizione di monodromia della ϑ assicurerà allora anche la continuità della derivata tangenziale. Assicurata invece quest'ultima condizione, resterebbe per la ϑ una costante di polidromia

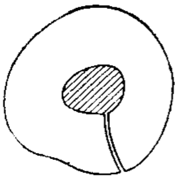

Fig. 2

$$\int_{(c)} F\, dx + H\, dy.$$

Per la monodromia dello spostamento non occorrono altre condizioni, poichè oltre alla ϑ le espressioni della deformazione non contengono che funzioni razionali intere.

Si avverta che il problema d'elasticità posto per il corpo ciclico non è stato qui ridotto mediante il taglio a quello del corpo aciclico (col quale procedimento si sarebbe persa l'unicità della condizione alla superficie laterale). Si sono date invece le espressioni delle componenti della tensione valide in ogni caso, con conveniente determinazione delle funzioni armoniche coniugate F ed H per adattarle alla particolare forma della sezione; e solo in tale determinazione si manifesta allora la differenza tra il caso della sezione ciclica e quello della sezione aciclica, intervenendo nel primo le sopra esposte considerazioni.

(fig. 3): si hanno così evidentemente $i - 1$ condizioni indipendenti, che sono le stesse condizioni richieste per l'esistenza di una funzione χ armonica regolare in ciascuno dei campi tratteggiati della figura, la quale abbia al rispettivo contorno la stessa derivata normale $\frac{\partial \chi}{\partial n}$. Si avverta che la χ non sarà invece necessariamente funzione monodroma.

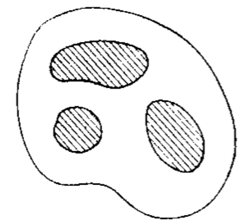

Fig. 3

2. Dallo studio dei casi particolari che si hanno ponendo nelle (3) una sola delle costanti diversa da zero risulterà che effettivamente si potrà avere da tale soluzione, come s'era detto, un valore arbitrario di ciascuna delle sei componenti del vettore risultante e del momento risultante delle tensioni sull'una (e quindi anche sull'altra) delle basi. A tale studio si premettono le seguenti definizioni delle *caratteristiche* (o parametri) *di sollecitazione*, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani aventi l'ori-

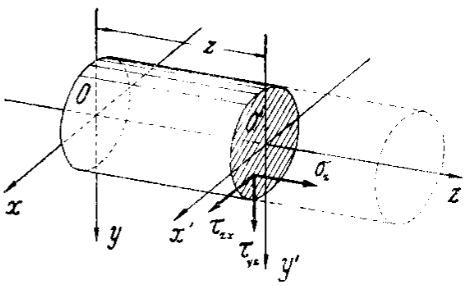

Fig. 4

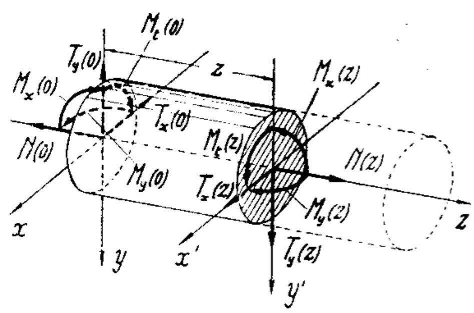

Fig. 5

gine nel baricentro di una delle basi (conforme alla già fissata posizione dell'asse z) e cogli *assi x, y secondo gli assi principali d'inerzia* di essa (figg. 4, 5).

Sforzo normale, o *componente normale*, si dirà la componente secondo l'asse z del vettore risultante delle tensioni sulla faccia positiva (cioè quella rivolta al senso positivo dell'asse medesimo) della sezione generica; dunque

$$N = \int_{(\Sigma)} \sigma_z \, dA.$$

Sforzo di taglio nella direzione dell'asse x si dirà la componente secondo l'asse medesimo dello stesso vettore risultante; e così sforzo di taglio nella direzione dell'asse y la componente di esso secondo tale asse:

$$T_x = \int_{(\Sigma)} \tau_{zx} \, dA, \qquad T_y = \int_{(\Sigma)} \tau_{yz} \, dA.$$

Momento torcente sarà la componente secondo l'asse z del momento risultante delle tensioni medesime sopra considerate rispetto al baricentro O' della sezione:

$$M_t = \int_{(\Sigma)} (\tau_{yz}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA.$$

Momento flettente intorno all'asse x' (asse principale d'inerzia della sezione generica) sarà la componente del medesimo momento risultante secondo l'asse x; e così momento flettente intorno all'asse y' la componente di esso secondo l'asse y:

$$M_x = \int_{(\Sigma)} \sigma_z\, y\, dA, \qquad M_y = -\int_{(\Sigma)} \sigma_z\, x\, dA \text{ [8]}.$$

È chiaro che N non cambia segno se s'inverte il senso positivo di uno qualunque degli assi: esso è sempre positivo quando la media delle tensioni normali sulla sezione è una trazione. Gli sforzi di taglio cambiano segno se s'inverte il senso positivo di uno degli assi z, x o rispettivamente z, y. Il segno del momento torcente cambia al cambiare del senso positivo di uno qualunque dei tre assi (dunque quando si passi da un triedro orario ad uno antiorario). Infine il segno del momento flettente M_x dipende solo dal senso positivo dell'asse y, e quello di M_y solo da quello dell'asse x.

Le condizioni d'equilibrio del tronco del cilindro fra la base dov'è posta l'origine degli assi e la sezione generica esprimono la variabilità delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'asse del cilindro medesimo: le prime quattro risultano costanti, e i momenti flettenti variabili linearmente; cioè (fig. 5)

$$M_x(z) = M_x(0) + T_y\, z\,, \qquad M_y(z) = M_y(0) - T_x\, z \text{ [9]}.$$

---

[8] Detto $\boldsymbol{M}$ il momento risultante rispetto al baricentro O' della sezione, e detto P il punto generico della sezione medesima, si ha

$$\boldsymbol{M} = \int_{(\Sigma)} (P - O') \wedge (\sigma_z \boldsymbol{k} + \tau_{zx} \boldsymbol{i} + \tau_{yz} \boldsymbol{j})\, dA = \int_{(\Sigma)} (x\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}) \wedge (\sigma_z \boldsymbol{k} + \tau_{zx} \boldsymbol{i} + \tau_{yz} \boldsymbol{j})\, dA =$$

$$= \int_{(\Sigma)} \sigma_z\, y\, dA\,.\,\boldsymbol{i} - \int_{(\Sigma)} \sigma_z\, x\, dA\,.\,\boldsymbol{j} + \int_{(\Sigma)} (\tau_{yz}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA\,.\,\boldsymbol{k} = M_x \boldsymbol{i} + M_y \boldsymbol{j} + M_z \boldsymbol{k}.$$

[9] Per l'equilibrio dei momenti rispetto al baricentro O della base $z = 0$ si ha

$$\boldsymbol{M}(z) + z\boldsymbol{k} \wedge (T_x \boldsymbol{i} + T_y \boldsymbol{j} + N_z \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{M}(0) = 0,$$

ossia

$$\boldsymbol{M}(z) = \boldsymbol{M}(0) - z\,(T_x \boldsymbol{j} - T_y \boldsymbol{i});$$

onde

$$M_t(z) = M_t(0), \qquad M_x(z) = M_x(0) + T_y\, z, \qquad M_y(z) = M_y(0) - T_x\, z.$$

Nella trattazione dei casi particolari sopra indicati, che s'inizia al seguente paragrafo, saranno date anche le componenti dello spostamento (senza il procedimento d'integrazione della deformazione, essendo immediata la verifica). Esse saranno riferite, salvo esplicita dichiarazione diversa, al seguente sistema di vincoli strettamente rigidi (evidentemente sufficiente a rendere lo spostamento determinato, e non iperstatico): si porrà fisso il punto scelto per origine degli assi, baricentro di una delle basi, e nel punto stesso fissa la direzione della normale alla sezione, e la direzione di uno degli assi principali d'inerzia di questa ancora appartenente alla giacitura dell'asse medesimo e della suddetta normale. Le prime tre condizioni, riguardanti direttamente lo spostamento, si esprimono ponendo

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0\,;$$

le altre tre, che si esprimono ponendo

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 = 0$$

(quest' ultima riguardante la direzione dell'elemento parallelo all'asse y) sono condizioni d'incastro, risultanti da condizioni poste per lo spostamento di altri punti infinitamente vicini all'origine: nella direzione dell'asse z (altro punto fisso) le due prime, e l'ultima nella direzione dell'asse y [10]. Si avverta che essendo in ogni caso del problema di Saint-Venant, per ipotesi, $\gamma_{xy} = 0$, dalla

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 = 0$$

si trae anche

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 = 0,$$

e così nell'origine ogni direzione della sezione resta appartenente alla giacitura da essa determinata con l'asse z.

([10]) Nel caso che il baricentro sia fuori della sezione le condizioni poste non potrebbero essere effettive condizioni di vincolo. Per l'aspetto analitico è da osservare che le componenti di spostamento ξ ed η risultano in ogni caso funzioni razionali intere; perciò tali condizioni conserveranno tutte significato fuorchè eventualmente la $\zeta_0 = 0$, essendo la ζ dipendente come s'è detto dalla funzione ϑ, la quale potrebbe risultare non definita nell'origine quando questa sia fuori del campo per il quale è posto il problema di Neumann: in tal caso, non volendo lasciare indeterminato lo spostamento per una traslazione lungo l'asse del cilindro, si potrebbe assegnare per esempio il valore zero alla componente ζ in un punto effettivo della base $z = 0$.

3. *Trazione o compressione.*

Posto nelle (3) solo la costante a_0 diversa da zero, si ha

$$\sigma_z = -Ea_0, \qquad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0.$$

Sono dunque nulle le caratteristiche T_x, T_y, M_t che dipendono dalle τ, e risulta pure

$$M_x = -Ea_0 \int_{(\Sigma)} y dA = 0,$$

e così

$$M_y = 0.$$

Resta la sola caratteristica N, componente normale:

$$N = \int_{(\Sigma)} \sigma_z dA = -Ea_0 A;$$

onde

$$-Ea_0 = \frac{N}{A},$$

e quindi

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Le componenti della deformazione risultano

$$\varepsilon_z = \frac{N}{EA}, \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{N}{mEA}; \qquad \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$$

(oltre alla $\gamma_{xy} = 0$ come in ogni altro caso). E quindi si ha evidentemente per lo spostamento sodisfacente alle condizioni sopra dichiarate

$$\zeta = \frac{N}{EA} z, \qquad \xi = -\frac{N}{mEA} x, \qquad \eta = -\frac{N}{mEA} y.$$

Risulta da queste espressioni che le sezioni si mantengono piane, traslando ciascuna in direzione normale a sè stessa di una quantità proporzionale alla propria distanza dall'origine, e deformandosi nel proprio piano tutte allo stesso modo. L'allungamento totale dell'asse del cilindro, ossia la traslazione della base $z = l$, è

$$\Delta l = \zeta(l) = \frac{N}{EA} l.$$

Lo stato di tensione, costante in tutto il cilindro, è monoassiale. Si ricordi (11) che sono allora ugualmente sollecitati tutti gli elementi ugualmente inclinati sull'asse z, e che in particolare è nulla la tensione su ogni elemento parallelo all'asse medesimo, mentre sugli elementi inclinati di $\frac{\pi}{4}$ si ha la massima tensione tangenziale, uguale (in valore assoluto) a $\frac{1}{2}|\sigma_z|$, accompagnata dalla tensione normale $\frac{1}{2}\sigma_z$.

L'energia potenziale elastica unitaria è

$$\varphi = \frac{1}{2E}\sigma_z^2 = \frac{N^2}{2EA^2};$$

e l'energia elastica totale, o lavoro di deformazione (12), è

$$\mathcal{L} = \int_{(S)} \varphi dV = \frac{N^2}{2EA} l = \frac{1}{2} N\Delta l;$$

espressione conforme al risultato dell'applicazione del teorema dei lavori virtuali, assunto per spostamento virtuale quello stesso effettivo.

4. *Flessione semplice.*

Si porrà qui $a_2 \neq 0$, risultando per $a_1 \neq 0$ un caso del tutto analogo. Le (3) divengono allora

$$\sigma_z = -Ea_2 y, \qquad \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0;$$

e risultano così ancora nulle le caratteristiche T_x, T_y, M_t. Per le altre si ha:

$$N = -Ea_2 \int_{(\Sigma)} y dA = 0$$

(come già osservato, per la scelta dell'asse z);

---

(11) Si veda il paragrafo 25 dell'opera citata alla nota (1).

(12) S'intende l'energia elastica dovuta alla sola azione delle considerate forze, indipendente com'è noto da un eventuale stato di coazione elastica. Si ricordi che il problema è stato posto per il corpo libero.

$$M_y = Ea_2 \int_{(\Sigma)} xy\, dA = 0,$$

per essere x, y gli assi principali d'inerzia;

$$M_x = -\, Ea_2 \int_{(\Sigma)} y^2\, dA = -\, Ea_2\, J_x$$

(essendo ovviamente J_x il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse x). Anche questa volta risulta dunque una sola caratteristica di sollecitazione diversa da zero, cioè il momento flettente M_x, necessariamente costante per la trovata relazione

$$M_x(z) = M_x(0) + T_y\, z.$$

(Per $a_1 \neq 0$ risulta il solo momento M_y, pure necessariamente costante.) Si ha infine

$$-\, Ea_2 = \frac{M_x}{J_x},$$

onde

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x}\, y.$$

Le componenti della deformazione sono

$$\varepsilon_z = \frac{M_x}{EJ_x}\, y, \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\, \frac{M_x}{mEJ_x}\, y, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0\,;$$

e quindi si ottengono le seguenti espressioni delle componenti dello spostamento (sempre tenuto conto delle condizioni indicate al paragrafo 2):

$$\zeta = \frac{M_x}{EJ_x}\, yz, \qquad \xi = -\, \frac{M_x}{mEJ_x}\, xy, \qquad \eta = -\, \frac{M_x}{2EJ_x}\left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m}\right) \text{ (}^{13}\text{)}.$$

([13]) Il termine in z^2 dell'espressione di η serve a rendere $\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$, ossia $\gamma_{yz} = 0$ (quindi la deformata di ogni retta parallela ad y normale alla deformata dell'asse z); e così il termine in x^2 a rendere $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\, \frac{\partial \xi}{\partial y}$, ossia $\gamma_{xy} = 0$.

Si può osservare che da tali espressioni, combinate linearmente con le analoghe riguardanti il momento M_y e quelle riguardanti la componente normale N, si ottengono le espressioni generali dello spostamento nella differenza tra uno stato piano di deformazione e il corrispondente stato piano di tensione (quando quest'ultimo esista); differenza dovuta all'azione di una σ_z con ripartizione lineare sulle basi del cilindro. Vedasi l'opera sopra citata, paragrafo 60.

Per analizzare tale spostamento conviene scinderlo in due parti, ponendo

$$\zeta_1 = \frac{M_x}{EJ_x} yz, \qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2;$$

$$\zeta_2 = 0, \qquad \xi_2 = -\frac{M_x}{mEJ_x} xy, \qquad \eta_2 = \frac{M_x}{2mEJ_x}(x^2 - y^2).$$

La seconda parte dà soltanto una deformazione di ogni sezione nel proprio piano, che è evidentemente la stessa per tutte le sezioni. La deformazione dell'asse z del cilindro e la nuova disposizione del piano di ogni sezione rispetto all'asse deformato risultano dalla prima parte, per la quale le sezioni restano evidentemente piane e indeformate anche nel loro piano: trattandosi di uno spostamento parallelo al piano yz e indipendente da x, basterà rappresentare la deformazione della sezione longitudinale del cilindro col piano yz (fig. 6). Ogni punto dell'asse z si sposta soltanto nella direzione y e proporzionalmente a z^2; perciò la deformata dell'asse medesimo è la parabola di equazione

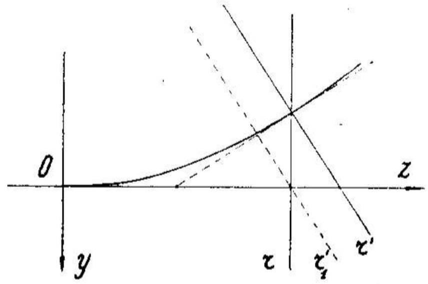

Fig. 6

$$y = -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2,$$

la cui tangente nel punto generico incontra l'asse z a metà distanza fra l'origine e la proiezione del punto stesso. La retta r, intersezione del considerato piano yz colla sezione normale generica, resta ancora rettilinea, rotando intorno al punto d'intersezione coll'asse z dell'angolo

$$\Omega(z) = \frac{\zeta_1}{y} = \frac{M_x}{EJ_x} z$$

e traslando in direzione di y dell'ordinata

$$-\frac{M_x}{2EJ_x} z^2$$

della suddetta parabola nel punto medesimo: risultante di tali due movimenti è una rotazione dello stesso angolo Ω intorno al punto di coordinate $0, \frac{z}{2}$, cioè il suddetto punto d'intersezione dell'asse con la tangente alla parabola. Segue da ciò, o direttamente dall'osservazione che

$$\Omega = -\frac{dy}{dz},$$

angolo di queste ultime due rette (14), che la retta considerata si mantiene nella deformazione normale all'asse del cilindro, come doveva risultare per essere (anche in questa sola prima parte dello spostamento) $\gamma_{yz}=0$ (15). Allo stesso modo di tale retta ruota anche, per l'osservata indipendenza di questa prima parte dello spostamento dalla coordinata x, ogni retta ad essa parallela appartenente alla medesima sezione normale del cilindro, rotando così dello stesso angolo Ω l'intera sezione intorno all'asse parallelo ad x per il punto suddetto, e mantenendosi pertanto normale anche essa all'asse deformato del cilindro.

La *curvatura* $\dfrac{1}{\varrho}$ di tale asse deformato è espressa in valore assoluto a meno di infinitesimi d'ordine superiore dalla derivata $\dfrac{d^2y}{dz^2}$ (essendo ancora $y = y(z)$ la sopra trovata equazione della curva medesima): si porrà

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x},$$

considerando così positiva la curvatura per M_x positivo (caso della figura). Conforme alla osservata ortogonalità della sezione all'asse deformato, questa è anche l'espressione della rotazione relativa ω di due sezioni infinitamente vicine (precisamente della sezione più lontana dall'origine rispetto all'altra) riferita all'unità di distanza iniziale, cioè

$$\omega = \frac{d\Omega}{dz}:$$

tale rotazione avviene intorno all'asse baricentrico parallelo ad x della stessa sezione, come risulta dalla posizione degli assi di rotazione delle

(14) Tutto ciò va inteso ovviamente nel senso degli spostamenti infinitesimi.

(15) Si può osservare che la condizione $\gamma_{yz} = 0$ rappresenta l'invarianza dell'angolo degli elementi dy, dz in modo esatto, cioè anche per lo spostamento considerato non infinitesimo, essendo $\xi = 0$ (e quindi mantenendosi gli elementi medesimi nel loro piano), e $\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$.

due sezioni, e come dev'essere per esser nullo lo scorrimento di esse (16).

Il prodotto EJ_x rapporto del momento flettente a tale rotazione relativa, dicesi *rigidezza flessionale* (per l'inflessione nel piano yz).

Si osservi ora che il punto d'incontro coll'asse y della generica retta r', corrispondente alla sopra considerata intersezione r della sezione generica col piano xy (fig. 6), ha l'ordinata

$$y = -\frac{EJ_x}{M_x} - \frac{M_x}{2EJ_x} z^2 :$$

il primo termine è l'ordinata dell'analogo punto della r'_1, ottenuta dalla r per la rotazione intorno al punto d'incontro coll'asse z, che si ricava ovviamente dalla condizione $z - \zeta_1(y, z) = 0$; il secondo termine è la già considerata traslazione $\eta_1(z)$. Ora quest'ultimo è in realtà trascurabile rispetto al primo termine (17), che è costante; sicchè può reputarsi in sostanza che tutte le rette r passino dopo la deformazione per uno stesso punto dell'asse y, e che pertanto la deformata dell'asse, a cui esse si mantengono normali, sia un cerchio. In termini più precisi può avvertirsi che la differenza tra le ordinate della parabola

$$y = -\frac{M_x}{2\,EJ_x} z^2,$$

considerate infinitesime, differiscono per un infinitesimo del terz'ordine da quelle del cerchio osculatore nell'origine

$$y = -\frac{M_x}{2\,EJ_x}(z^2 + y^2).$$

(16) Il centro della rotazione relativa di due rette $z = z_1$ e $z = z_2$ è la proiezione sull'asse z del punto d'incontro delle tangenti all'asse deformato nei punti d'intersezione colle rette medesime: essa proiezione è infatti il punto del piano yz che si sposta ugualmente nell'una e nell'altra delle due rotazioni intorno ai punti delle rispettive tangenti sull'asse z, portandosi nel suddetto punto d'incontro. Si vede così facilmente che tale centro risulterà sempre interno all'intervallo (z_1, z_2) quando la deformata dell'asse non abbia nello stesso intervallo un punto di flesso (nel caso della parabola è evidentemente il punto di mezzo dell'intervallo); dunque per $z_2 \to z_1$ tende anch'esso alla medesima ascissa.

Ma basterebbe solo ricordare che la posizione dell'asse di rotazione sodisfa alla condizione di ortogonalità della sezione all'asse deformato, la quale si identifica con quella dello scorrimento nullo delle sezioni infinitamente vicine.

(17) Posto $|\varepsilon_z|_{\max} = \varepsilon$, onde $\frac{|M_x|}{EJ_x} \leq \frac{2\varepsilon}{d}$, essendo d la massima dimensione della sezione, il rapporto dei due termini considerati risulta inferiore a $2\left(\varepsilon\frac{l}{d}\right)^2$, detta l la lunghezza del cilindro (massimo valore di z).

Poichè nello sviluppo della teoria gl'infinitesimi d'ordine superiore al primo sono stati sistematicamente trascurati, non si può giudicare dal risultato se effettivamente la deformata dell'asse sia la parabola, o altra linea le cui ordinate differiscano da quelle di essa per infinitesimi d'ordine superiore; e l'ovvia osservazione che tutte le sezioni si trovano nelle stesse condizioni di sollecitazione fa allora presumere che la vera deformata sia il suddetto cerchio. L'espressione

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{EJ_x},$$

approssimata per la parabola, è da reputare quindi espressione esatta della curvatura effettiva della deformata medesima. Con analogo criterio si presumerà che la dilatazione dell'asse, che risulta rigorosamente nulla nel punto $z = 0$ $\left(\text{per essere ivi nulla la derivata } \frac{ds}{dz}\right)$ si mantenga tale rigorosamente in ogni punto, reputandosi dunque illusorio l'allungamento dell'asse dovuto agli spostamenti tutti ad esso normali (18).

È chiaro infine che ogni retta del piano yz parallela all'asse si trasforma in un cerchio concentrico a quello ora considerato; e così si trasformano in cerchi in piani paralleli ad yz tutte le altre parallele a z.

La seconda parte dello spostamento può a sua volta essere scissa in due, considerando separatamente il termine in y^2 dell'espressione di η_2. Si ha da questo una traslazione di ogni retta della sezione parallela all'asse x, in direzione y e proporzionale al quadrato della distanza di essa dal baricentro: resta dunque fissa la retta baricentrica, e le altre si spostano tutte nel senso negativo dell'asse y, con aumento delle distanze fra quelle da tale parte del baricentro e diminuzione delle distanze fra quelle dall'altra parte (dilatazione in direzione y dove si ha contrazione assiale, e inversamente). La parte che resta dello spostamento è espressa nel piano $x'y'$ (piano della sezione) in modo del tutto analogo allo spostamento so-

(18) Con la ragione addotta si è giustificata la costanza della curvatura e della dilatazione dell'asse. L'aver assunto per tali quantità i valori che risultano nella sezione $z = 0$ può giustificarsi osservando che risulta nulla nella sezione medesima la rotazione, e pertanto le $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{zx}$ sono in essa espressioni rigorose delle componenti della deformazione.

È ovvio che risulta a questo modo per i punti dell'asse una componente di spostamento parallela all'asse medesimo; e può osservarsi che resta $\frac{M_x}{EJ_x}$ anche l'espressione della rotazione relativa delle sezioni infinitamente vicine riferita alla primitiva distanza.

pra considerato nel piano zy, colla sola differenza del fattore costante $-\frac{1}{m}$; dunque le rette parallele ad x' (traslate come s'è detto) si trasformano in cerchi col centro sulla parte dell'asse y_1' (cioè l'asse y' rotato insieme colla sezione per il primo spostamento) opposta a quella su cui trovasi il centro della deformata dell'asse del cilindro, a distanza

$$\frac{mEJ_x}{|M_x|}$$

dal baricentro della sezione (fig. 7). Le rette parallele ad y' ruotano per mantenersi normali a tali cerchi, convergendo quindi nel comune centro di essi.

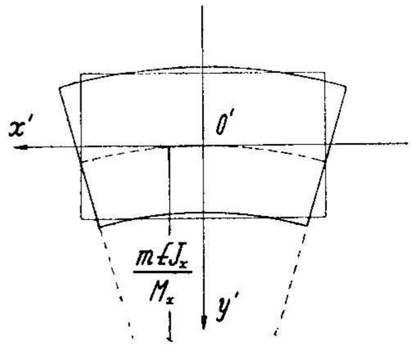

Fig. 7

Lo stato di tensione è in ogni punto monoassiale come nel caso precedente (ma ovviamente non costante).

L'energia potenziale elastica unitaria è

$$\varphi = \frac{1}{2E}\sigma_z^2 = \frac{1}{2E}\frac{M_x^2}{J_x^2}y^2,$$

e il lavoro di deformazione

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2E}\frac{M_x^2}{J_x^2}\int_0^l dz \int_{(\Sigma)} y^2 dA = \frac{1}{2}\frac{M_x^2}{EJ_x}\, l = \frac{1}{2} M_x\, \Omega(l),$$

conforme al teorema dei lavori virtuali applicato come s'è detto alla fine del paragrafo precedente.

5. *Torsione*

Posto solo $b_0 \neq 0$, le (3) divengono

$$\sigma_z = 0, \qquad \tau_{zx} = Gb_0\left(y + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\right), \qquad \tau_{yz} = Gb_0\left(-x + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\right),$$

essendo ϑ_0 la funzione armonica definita a meno di una costante dalla condizione al contorno

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} = x\alpha_y - y\alpha_x \,.$$

Risultano nulle evidentemente le caratteristiche N, M_x, M_y; e con queste due ultime anche le T_x, T_y per le già ricordate relazioni. Per conferma ad esempio della

$$T_x = \int_{(\Sigma)} \tau_{zx}\, dA = 0$$

si osservi che mentre si ha senz'altro

$$\int_{(\Sigma)} y dA = 0,$$

per il secondo termine si ha

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} dA = \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\right)\right\} dA \; (^{19}) = \int_{(c)} x \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\, \alpha_x + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\, \alpha_y\right) ds =$$

$$= \int_{(c)} x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\, ds = \int_{(c)} x\,(x\alpha_y - y\alpha_x)\, ds = -\int_{(\Sigma)} y dA = 0.$$

Resta dunque il solo momento torcente,

$$M_t = \int_{(\Sigma)} (x\tau_{yz} - y\tau_{zx})\, dA = -\, G b_0 \int_{(\Sigma)} \left(x^2 + y^2 + y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} - x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\right) dA.$$

Osservato che

$$\int_{(\Sigma)} (x^2 + y^2)\, dA = J_p\,,$$

momento d'inerzia polare, e posto

$$q = \frac{J_p}{J_p - \displaystyle\int_{(\Sigma)} \left(x \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y} - y \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\right) dA}\,, \tag{4}$$

risulta

$$M_t = -\, G b_0 \frac{J_p}{q}\,;$$

(19) Per tale sostituzione basta ricordare che la ϑ_0 è armonica.

onde si ricava

$$Gb_0 = -\,q\,\frac{M_t}{J_p},$$

e così le espressioni delle tensioni tangenziali divengono infine

$$\tau_{zx} = -\,q\,\frac{M_t}{J_p}\left(y + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right), \qquad \tau_{yz} = q\,\frac{M_t}{J_p}\left(x - \frac{\partial\vartheta_0}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Il numero q definito dalla (4) è detto *fattore di torsione.* Si vuol dimostrare che esso è sempre ≥ 1, ossia che

$$q - 1 = \frac{\displaystyle\int_{(\Sigma)}\left(x\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y} - y\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)dA}{\displaystyle J_p - \int_{(\Sigma)}\left(x\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y} - y\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)dA} \geq 0,$$

o anche che

$$\int_{(\Sigma)}\left(x\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y} - y\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)dA \geq 0$$

e

$$J_p - \int_{(\Sigma)}\left(x\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y} - y\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)dA \geq 0 \ \text{(20)}.$$

La prima di queste si dimostra osservando che

$$\int_{(\Sigma)}\left(x\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y} - y\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)dA = \int_{(\Sigma)}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(x\vartheta_0) - \frac{\partial}{\partial x}(y\vartheta_0)\right\}dA = \int_{(c)}\vartheta_0\,(x\alpha_y - y\alpha_x)\,ds =$$

$$= \int_{(c)}\vartheta_0\,\frac{\partial\vartheta_0}{\partial n}\,ds = \int_{(\Sigma)}\left\{\left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y}\right)^2\right\}dA \ \text{(21)}.$$

---

(20) Le due condizioni, ovviamente sufficienti, sono anche necessarie perchè J_p è per definizione > 0: se infatti la seconda espressione risultasse negativa, sarebbe l'integrale maggiore di J_p, e pertanto positivo.

(21) Vedasi la nota (5).