po appartiene un anonimo *abbonato* agli *Annales* di Gergonne, che nel 1826/27 pubblica una nota dal titolo allarmato: *Sur un paradoxe de Statique*. «Quelques géomètres ont tendé de répandre un peu de jour sur cette question, en distinguant l'état physique de l'état mathématique, l'état concret de l'état abstrait; mais il est permis de douter qu'ils l'aient fait de manière à satisfaire pleinement les esprits exactes» [39]. Il nostro anonimo, infatti, ha in serbo un'obiezione che a lui appare vincente, insormontabile, benché per la verità non sia neppure un'obiezione: egli suppone che *CA* e *CB* siano due sbarre rigide incernierate in *C*, soggette a due pesi *P*, *Q* in *O*, *O'* (fig. 14); le reazioni sono date dalle:

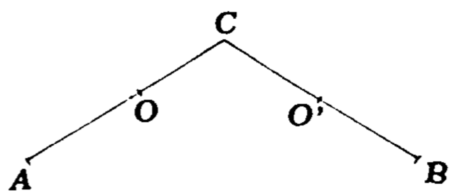


Fig. 14

$$R_A = P\frac{[CO]}{[AC]} \quad R_B = Q\frac{[CO']}{[BC]}$$

$$R_C = P\frac{[AO]}{[AC]} + Q\frac{[BO']}{[BC]}$$

che non dipendono dall'angolo $A\hat{C}B$, per cui valgono anche nel caso di tre appoggi allineati. Dove sta dunque l'indeterminazione che tutti riconoscono? «Il faut absolument ou bien faire à cette manière de raisonner une réponse décisive, ou bien se résigner è rejeter le principe de statique qui donne lieu au paradoxe dont il s'agit ici. Nous attendrons, sur cette alternative, l'opinion des juges compétens» [40]. Nel poscritto alla *Nota*, l'anonimo aggiunge un'osservazione che in seguito ricorrerà presso altri autori: posiamo in linea retta su un piano tre sfere pesanti, ognuna delle quali dà luogo a una reazione uguale e contraria al proprio peso; poi uniamole idealmente con sbarre rigide non pesanti, sì da formare un unico corpo rigido. Che cosa muta d'improvviso nel sistema onde intervenga l'indeterminazione?

Al primo partito — e cioè al partito di coloro che ritenevano d'aver trovato una soluzione — appartiene Ambrogio Fusinieri che nel 1832 pubblica presso gli *Annali delle Scienze del regno Lombardo Veneto* (fascicolo di settembre e ottobre 1832, p. 298 ss.) un lavoro vistosamente retrospettivo di pretto stile settecentesco: il problema dei quattro appoggi è risolto con lievi modifiche dei metodi di Lorgna e di Fontana, supponendo che i vincoli siano monolaterali. Dell'altro partito invece fa parte Pacifico Barilari, autore di una nota pubblicata a Pesaro nel 1833 dal titolo: *«Intorno un problema del Dottore Ambrogio Fusinieri sul modo di determinare le pressioni che esercita un grave sopra più di*

39. *Notes sur un paradoxe de Statique - Par un Abboné,* Annales de Mathématiques pures et appliquées, ... par J.D. Gergonne, *17*, 1826/27, pp. 75-79; p. 75.
40. Ibidem, pp. 77-78.

tre appoggi» dove, con argomenti simili a quelli di Paoli, vien dimostrato che la soluzione di Fusinieri è una tra le molte, ma non vi sono «ragioni bastanti per giudicare che la natura prenda piuttosto questa via di determinazione e non tante altre, che si possono immaginare senza incorrere in alcun assurdo».

Citiamo infine l'ultimo *sic et non* della nostra storia; ci riferiamo ai contributi di Francesco Bertelli e di Giuseppe Fagnoli accolti nel I e nel IV Tomo delle «Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna» [41]. Bertelli è un profondo conoscitore della letteratura sul tema degli appoggi staticamente indeterminati; numerose pagine della prima 1ª Parte e tutta la 2ª Parte del suo lungo saggio pubblicato postumo nel 1850, hanno infatti carattere storico. L'opinione dell'Autore è che la soluzione non può essere ottenuta senza l'aiuto della teoria dell'elasticità, rimuovendo cioè l'ipotesi del corpo rigido. Ma la «disparità di metodi e di soluzioni ipotetiche del problema» spinge Bertelli a tagliar corto con le trattazioni analitiche per affidare il verdetto all'esperimento; per questo egli descrive con grande cura un particolare tipo di dinamometro da lui stesso progettato «cui per ragione di comodità e d'uso, può darsi il nome, dalla greca favella derivandolo (...), di Piesimetro» (fig. 15).

Il lavoro successivo di Fagnoli merita forse qualche attenzione, poiché in esso si conclude l'itinerario iniziato con Euler per giustificare il *nuovo principio* da aggiungere alle leggi della statica, senza far diretto riferimento all'ipotesi di legame elastico. Anche Fagnoli conosce perfettamente la letteratura e le diverse posizioni dei maggiori scienziati, ma aggiunge: «a malgrado del rispetto grandissimo ch'io professo per le espressioni di quei sommi luminari della Scienza (...), m'è per forza il dire, che tanto la sentenza del Poisson e del Bertelli, quanto le proposte e i tentativi degli altri, mi sembrano immaturi e azzardati, non essendosi, a parer mio, ancora stabilito il problema sopra basi abbastanza chiare e distinte, né dirette le ricerche per quella logica via, che può sola dissipare le dubbiezze e condurre a qualche certa conclusione» [42]. Le basi chiare e distinte possono essere raggiunte — secondo l'Autore — solo se si comprende che la distribuzione delle pressioni esercitate da un sistema *rigido* su dati punti d'appoggio *irremovibili* non dipende soltanto dall'invariabilità della forma del sistema e dalla immobilità degli appoggi, ma deriva anche «da altre cause cooperanti alle suespresse, o anzi da cause in parte da quelle diverse». Riprendendo l'esempio delle tre sfere di cui aveva parlato l'anonimo degli *Annales* di Gergonne, Fagno-

41. F. Bertelli, *Ricerche sperimentali circa la pressione de' corpi solidi ne' casi in cui la misura di essa, secondo le analoghe teorie meccaniche si manifesta indeterminata...* Mem. Accad. delle Sc. dell'Ist. di Bologna *1*, 1850 (1843-44), pp. 433-461; G. Fagnoli, *Riflessioni intorno la teorica delle pressioni che un corpo o sistema di forma invariabile esercita contro gli appoggi rigidi ed irremovibili dai quali è sostenuto in equilibrio.* Ibidem, *4*, 1853 (1852), p. 109-138.
42. G. Fagnoli, *loc. cit.*, p. 113.

Fig.a 1.a

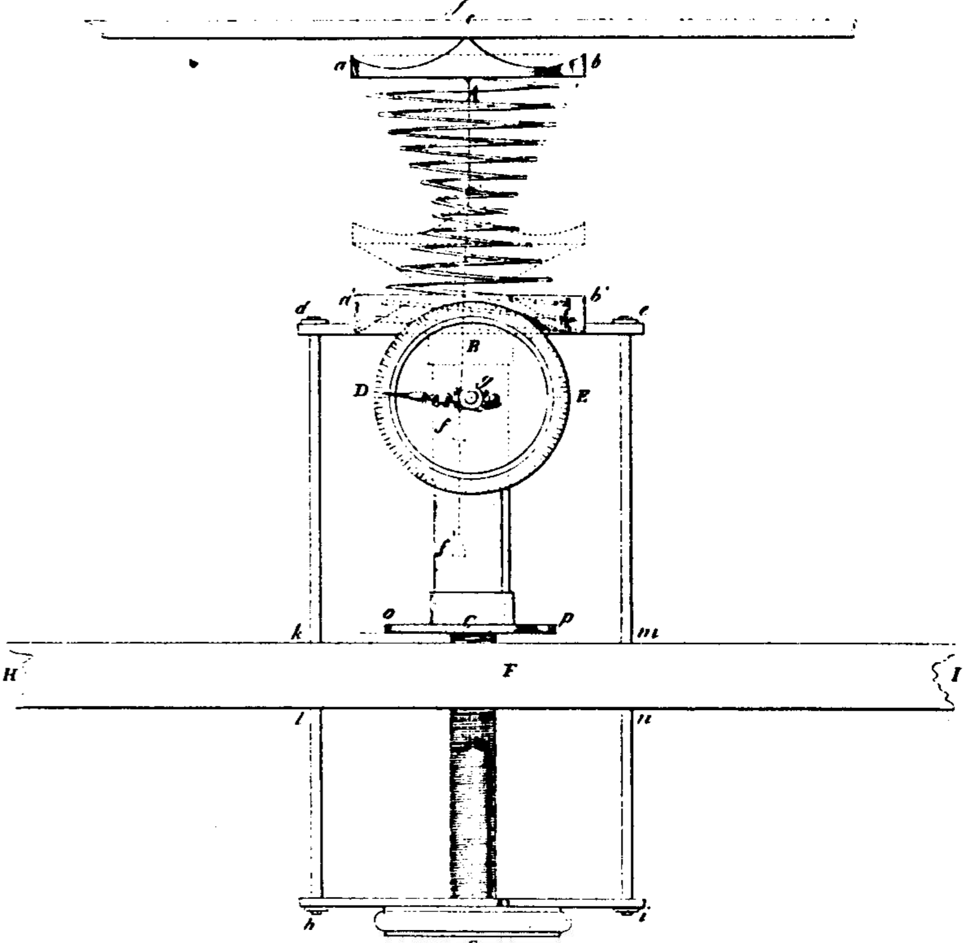
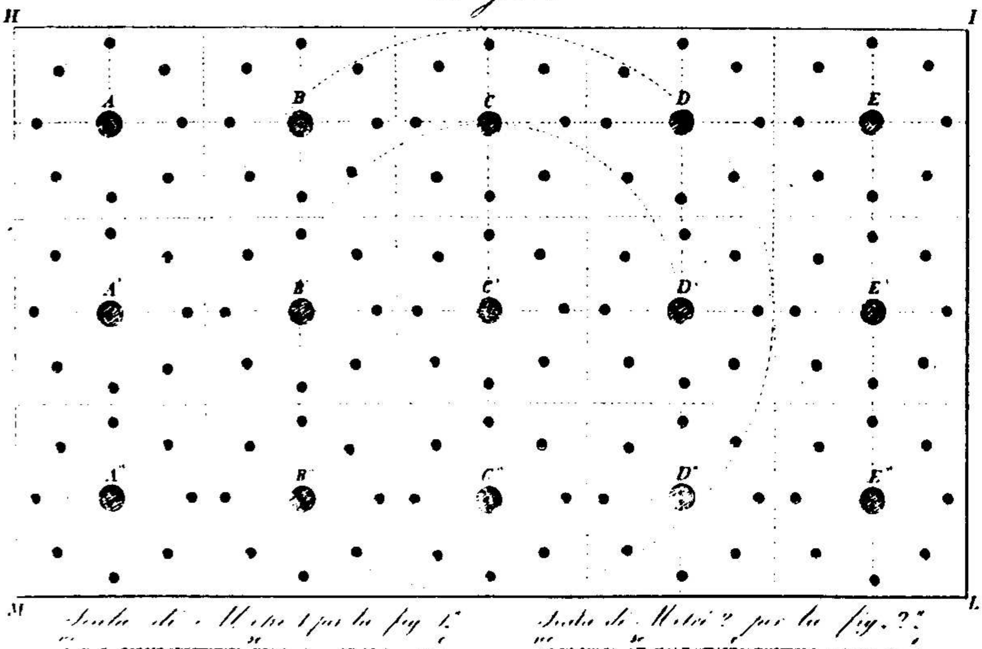


Fig.a 2.a



Scala di Metri 1 per la fig 1.a Scala di Metri 2 per la fig. 2.a li indica appunto la ragione dell'indeterminatezza nelle «circostanze accessorie che accompagnano lo stabilimento dell'equilibrio»; la configurazione finale che nel caso rigido è prevedibile a priori non è infatti sufficiente a definire il problema poiché si può sempre immaginare che essa sia il risultato di una deformazione precedente, a partire da un'arbitraria configurazione iniziale [43].

Per «dissipare le dubbiezze», l'Autore tenta dapprima di definire il concetto di corpo rigido secondo una sua interpretazione dinamica; in breve (e sperando di aver inteso correttamente l'oscuro testo di Fagnoli), il corpo rigido sarebbe un insieme di punti tra loro «liberi e sciolti», dove però ogni punto esercita sugli altri *reazioni interne* atte a impedire qualsiasi moto relativo [44]. Orbene, se ci si limita a stabilire le condizioni di equilibrio del Sistema, basta tener conto soltanto *dell'eguaglianza* tra le forze attive e le forze reattive, «per lo che diviene lecito l'aggiunger nuove forze e nuove resistenze ad arbitrio, purché si serbi l'uguaglianza fra loro (...). Ma qualora si tratti d'indagare il modo di diffusione o distribuzione delle forze non è più permesso di prescindere dalla considerazione dell'assoluta *entità* delle reazioni interne» [45]. Infatti, per una data combinazione di forze attive, applicate a un sistema rigido, cui sia possibile far corrispondere diverse combinazioni di forze reattive equivalenti, muta di caso in caso la distribuzione delle *reazioni interne*. Ad esempio, nel problema degli appoggi su un piano, se si suppone che le reazioni d'appoggio seguano il principio di Euler, «ciascuna di essa imprimerà nel rispettivo punto una velocità virtuale, ossia la tendenza ad un moto iniziale, che non altera la posizione relativa dei punti stessi», sicché in tal caso le *reazioni interne* sono nulle; se invece quel principio è trasgredito, allora si deve ammettere che abbiano luogo alcune *reazioni interne* idonee ad assicurare l'invariabilità della forma del sistema. Ecco dunque la nuova interpretazione che Fagnoli propone per il principio di Euler: esso individua tra le infinite combinazioni di forze reattive che possono far equilibrio alla data forza pressante, quella sola che «non eccita alcuna reazione interna tra i punti del Sistema ai quali è applicata» [46].

L'ingegnoso — seppur incerto — tentativo di Fagnoli richiama l'analogo ragionamento usato da Mariano Fontana (1792) per presagire «dinamicamente» la regola del terzo medio nella statica degli archi. Troppo sbrigativo ci sembra al proposito il giudizio severo di K. Pearson («It seems to me utterly obscure and involves the strange metaphysical conception of internal reactions in 'perfectly rigid bodies' » [47]. Certamente oscuro e metafisico è il discorso di Fagnoli, ma

43. Ibidem, pp. 114-115.
44. Ibidem, pp. 121-122.
45. Ibidem, p. 124.
46. Ibidem, p. 130.
47. I. Todhunter, K. Pearson, loc. cit., II, *1*, p. 350.

ha dalla sua una remota tradizione: dall'originaria trattazione «aristotelica» per la legge della leva, alla sottile analisi sulla radice dinamica del concetto di forza.

Introduzione alle nuove vie del secolo XIX

Il contributo di Fagnoli è l'ultimo del vecchio stile. In realtà, sin dai primi decenni del secolo XIX, altre più promettenti vie son venute maturando. La lezione di Lagrange è ormai diffusamente appresa dai ricercatori più avveduti: la forza (in particolare, la forza reattiva) può allentare il suo diretto collegamento con i concetti «classici» di «causa del moto» o di «causa della deformazione» essendo anche definibile in termini strettamente matematici quale moltiplicatore di una condizione appesa alla equazione dei lavori virtuali. Sarebbe dunque assurdo temere che venga meno il principio deterministico giammai contraddetto in fisica se per avventura accade che la fragile larva di un moltiplicatore lagrangiano resti talvolta indeterminabile. Questo è il messaggio offerto da Gabrio Piola in uno splendidò lavoro del 1824 premiato dall'Imperial Regio Istituto di Scienze in Milano. Nell'*Osservazione* introduttiva al capitolo «Problema di Equilibrio», dove le equazioni cardinali della statica son dedotte dal principio dei lavori virtuali, il Piola scrive: «Si è già notata l'indole differente delle questioni di dinamica e di statica, delle quali ultime si cerca nondimeno la soluzione appoggiandosi alla stessa equazione generale. Nelle prime ciò che si cerca essendo le coordinate dei diversi punti, si hanno sempre tante equazioni quante sono le quantità da determinarsi, né l'esservi delle equazioni di condizione distrugge il qui asserito, perché, quantunque trattando queste col metodo dei moltiplicatori si introducano delle indeterminate di più: le equazioni stesse aggiungendosi a quelle che risultano dalla formula generale, danno sempre quel numero di equazioni che si richiede a determinare tutte le incognite. Non così nelle equazioni di equilibrio in cui ciò che si cerca sta nelle relazioni tra le forze; egli è ben chiaro che se vi sono delle equazioni di condizione fra le coordinate, vengono introdotte delle indeterminate di più, e le equazioni stesse non possono servire a determinare le incognite, supponendo che queste siano le forze. Non è quindi da stupirsi se in molti problemi di equilibrio si ha tra le incognite un non sufficiente numero di equazioni: è la natura stessa delle questioni che rende tali problemi indeterminati» [48].

48. G. Piola, *Sull'applicazione de' principj della Meccanica del Lagrange ai principali problemi.* Memoria presentata al Concorso del Premio e coronata dall'I.R. Istituto di Scienze nella solennità del giorno 4 ottobre 1824. Milano, 1825, pp. 77-78.

Questo passo è veramente notevole: l'assoluta chiarezza del metodo lagrangiano elimina ogni sospetto di «paradosso» nel problema degli appoggi, mostrando che l'eventuale indeterminazione delle forze reattive non ospita alcun significato fisico conturbante. D'altra parte, lo stesso concetto di forza perde molto della sua immediatezza intuitiva; quel che è immediato sono soltanto «le condizioni fra le coordinate», ovvero i dati della geometria (o della cinematica). La forza invece resta, per dir così, «schermata» dal procedimento matematico entro il quale essa appare dapprima al modo di moltiplicatore, e cioè sotto l'aspetto di uno strumento formale utile al calcolo. Tale interpretazione riduttiva farà strada durante il secolo XIX, animerà un progetto scientifico ed epistemologico di vasta portata tendente a escludere la forza dai concetti primitivi della meccanica. «Il est bien possible — dirà Saint Venant nel 1866 — que les forces, ces sortes d'êtres problématiques, ou plutôt d'adjectifs substantisés, qui ne sont ni matière ni esprit, êtres aveugles et incoscients et qu'il faut donner cependent de la merveilleuse faculté d'apprécier les distances et d'y proportionner ponctuellement leur intensités, soient de plus en plus expulsées et ecartées des sciences mathématiques» [49].

Nello stesso anno 1825 in cui fu pubblicato il risolutivo saggio di Piola, uscì nel *Bulletin des Sciences par la Société Philomatique di Paris* una nota di Louis Navier altrettanto risolutiva sul versante delle applicazioni. Secondo K. Pearson, Navier «seems to have been the first to notice that problems relating to reactions, for the determination of which elementary statics does not provide sufficient equations, are perfectly determinate when account is taken of the elasticity of the reacting bodies» [50]. In realtà una simile osservazione era stata già compiuta da diversi altri autori; ma il merito indiscutibile di Navier sta nell'aver condotto a termine l'analisi sia nella memoria qui citata [51], sia nel più celebre *Résumé des leçons données à l'Ecole royale des ponts et chaussées* edito l'anno successivo.

Il riferimento all'elasticità rappresentava in quegli anni il tema più promettente non soltanto per la straordinaria efficacia applicativa e per la rigorosa sintesi che la nuova teoria riusciva a realizzare, ma anche per il profondo significato che sembrava esser racchiuso nei principi e nelle equazioni generali. L'interpretazione molecolare del comportamento elastico dei corpi, promossa da Navier, da Cauchy, da Poisson, sollecitava grandi speranze di poter finalmente unificare e spiegare «tutte le forze operanti nella Natura» alla luce della legge universa-

49. Cfr. R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Neûchatel, 1950, p. 421.
50. I. Todhunter, K. Pearson, *A History of the Elasticity I*, Cambridge, 1886, p. 146.
51. L. Navier, *Sur des question de statique dans lesquelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui surpassant trois.* Bull. des Sc. par la Société Philomatique, 1825, p. 35.

le dell'attrazione e della repulsione inter-atomica che già R.G. Boscowich aveva presagito. Dagli ammassi stellari sui quali opera l'attrazione newtoniana, agli aggregati delle molecole di un corpo sul quale operano le forze di «coesione», tutto appariva esser governato dal medesimo principio. In questo orientamento è di preminente interesse l'opera scientifica di Ottaviano Fabrizio Mossotti il cui saggio «*Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, aperçu pour servir à la determination de la cause et des lois de l'action moléculaire*» pubblicato a Torino nel 1836 e presentato da Faraday nel 1837 al Royal Institution, persegue l'ambizioso obiettivo di raccogliere ad unità tutte le forze naturali (dalla gravitazione universale all'azione molecolare, alla «forza repulsiva del calorico», alle forze elettriche, all'azione dei corpi sulla luce) mediante lo studio dell'«azione combinata dell'attrazione colla ripulsione fra due o più sostanze». In particolare, Mossotti arricchisce il modello di Boscowich mettendo in conto, come «parte integrante dell'equilibrio stabile» dei corpi anche l'azione dell'*etere*, di quel «fluido impoderabile — cioè — al quale possono essere attribuiti i fenomeni dell'elettricità e del calore».

Entro una simile visione, le leggi costitutive dell'elasticità non si pongono affatto come descrizione di una limitata classe di corpi, non indicano una partizione del campo dei corpi possibili, ma esprimono, se così si può dire, una proprietà «ontologica» che connota il corpo in quanto corpo.

Ebbene, la via nuova tracciata da George Green che tanto strettamente si intreccerà alla nostra storia, si presenta con una analoga latitudine di intenzioni. Il celebre saggio da lui letto nello stesso 1837 presso il Cambridge Philosophical Society [52] riguarda ancora l'etere, l'impoderabile sottile materia che, secondo le opinioni scientifiche di quel tempo, dovrebbe avvolgere l'intero cosmo. Tuttavia, a differenza di Cauchy e degli altri autori che vedevano nell'etere «a system of molecules acting on each other by mutually attractive and repulsive forces», Green preferisce schivare i rischi di un modello così inverificabile. «We are so perfectly ignorant of the mode of action of the elements of the luminiferous ether on each other, that it would seem a safer method to take some general physical principle as the basis of our reasoning, rather than certain modes of action». Il principio usato dall'Autore è che «in whatever way the elements of any material system may act upon each other, if all internal forces exerted be multiplied by the elements of their respective directions, the total sum for any assigned portion of the mass will always be the exact differential of some function» [53].

52. *G. Green, On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common Surface of two non-crystallized Media*, (Trans. of the Canbridge Phil. Soc., 7, 1839, pp. 1-24); Mathematical Papers of the late George Green, London 1871, pp. 243-269.
53. Ibidem, p. 243.

Si noti l'assoluta generalità di questa proposizione che, stando alla lettera, riguarda «any material system». Certo, non avrà torto Castigliano a considerar con un qualche riserbo il principio di Green, riconoscendo in esso un'ipotesi ben fondata sull'esperienza e plausibile, ma nulla più; tant'è vero che le dimostrazioni da lui date al teorema di minimo del lavoro di deformazione sono sempre duplici, a dispetto della prolissità: un primo argomento verte sui «sistemi articolati», ai quali è chiaramente riferibile il concetto di elasticità secondo Navier, Poisson, Cauchy, Mossotti, ed è da Castigliano ritenuto certo e rigoroso; un secondo argomento verte sugli altri sistemi, per i quali, egli dice, «la questione è più complicata a cagione dell'ignoranza in cui noi siamo intorno alla costituzione molecolare», ed è tratto dal principio di Green. Sul rigore di questa seconda dimostrazione, indubbiamente più stringata ed elegante, Castigliano però non si pronuncia, quasi la valutasse una via d'uscita provvisoria da offrire in mancanza di meglio [54].

Non c'è dubbio invece che Green attribuiva al suo principio un ruolo fondamentale nell'intera teoria fisico-meccanica, consentendo l'applicazione dei metodi lagrangiani e conducendo addirittura alle equazioni di Navier per via strettamente deduttiva. Posto infatti che per un sistema materiale valga l'equazione:

$$\Sigma\, Dm \left\{ \frac{d^2u}{dt^2}\,\delta u + \frac{d^2v}{dt^2}\,\delta v + \frac{d^2w}{dt^2}\,\delta w \right\} = \Sigma\, Dv \cdot \delta\phi$$

dove u, v, w sono le componenti di spostamento della particella il cui volume e la cui massa elementari sono Dm e Dv, e dove $\delta\phi$ è il differenziale esatto di una funzione delle sei componenti di deformazione infinitesima, Green ritiene matematicamente ovvio il poter «expand ϕ in a very convergent series of the form $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \ldots$, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, etc. being homogeneous functions of the quantities $a, \beta, \gamma, s_1, s_2, s_3$, [deformazioni angolari e lineari] of the degrees 0, 1, 2, etc. each of which is very great compared with the next following one» [55]. È poi agevole riconoscere che i termini ϕ_0, ϕ_1, possono essere cancellati e i termini ϕ_3, ϕ_4, ... sono trascurabili rispetto a ϕ_2 «provided the whole system be perfectly free from all extraneous forces, and subject only to its own molecular actions». A questo punto l'Autore aggiunge: «If now we can obtain the value of ϕ_2, we shall only have to apply the general methods given in the *Mécanique Analytique*. But ϕ_2 being a homogeneous function of six quantities of the second degree, will in its most general form contain 21 arbitrary coefficients» [56].

54. Cfr.: A. Castigliano, *Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici*, Atti R. Accad. delle Sc. di Torino, *11*, 1875, p. 132.
55. G. Green, loc. cit., p. 249.
56. Ibidem, p. 250.

Seguono diverse specificazioni di ϕ_2 in casi più particolari sino a quello del corpo isotropo, dove i coefficienti si riducono a due.

Tralasciando di menzionare la grande controversia sulle costanti elastiche che questo straordinario testo di Green ha generato, limitiamoci a due osservazioni: 1) quello sviluppo in serie di ϕ appare a Green una semplice elaborazione formale, mentre in realtà esso racchiude una forte incidenza fisica; illuminante a questo proposito, è la critica di K. Pearson [57]. 2) Nella trattazione sopra richiamata i coefficienti elastici nascono concettualmente prima delle tensioni; per cui *non è riconosciuto* alcun ruolo significativo a una formula di «legame costitutivo» stress-strain del tipo:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad [8]$$

che Green nemmeno scrive e che probabilmente gli sembrerebbe una pura definizione nominale.

In certo senso possiamo concludere dicendo che da Green «tutto è scoperto» — esplicitamente o meno — ma nulla è ancor «riconosciuto» nel suo autentico significato. L'itinerario che s'offre ai successori è quello appunto di un progressivo riconoscimento delle ricche conseguenze che dall'impostazione di Green possono essere tratte. Sotto questo profilo, determinante è il saggio di William Thomson del 1857 pubblicato presso «The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics» [58], dove l'ipotesi del differenziale esatto è dimostrata nell'ambito della termodinamica per trasformazioni isoterme governate dal «second Fundamental Law of the Dynamical Theory of Heat», ed è come in Green attribuita estensivamente «to any kind of matter» [59]. Thomson si sofferma a lungo su formule analoghe alle [8] deducendo da esse le indicazioni relative ai coefficienti elastici; è chiaro che nelle [8] si esprime compiutamente almeno uno dei teoremi di Castigliano «sulle derivate del lavoro di deformazione». Tuttavia, resta, crediamo, una differenza. In Thomson, la forza interna (o meglio, la tensione) è ancora una grandezza *derivata*, connessa alla geometria della deformazione quasi per definizione: quel programma cui s'è dinnanzi accennato per «bandire» la forza dai concetti primitivi della meccanica è almeno parzialmente realizzato. Ebbene, l'originalità dei successivi *riconoscimenti* si ricollega invece a un'altra linea scientifica, o piuttosto epistemologica, tendente a dotare la statica di piena autonomia rispetto alla cinematica, attribuendo quindi al concetto di forza un rango non subordinato. Secondo questa linea, cioè, la statica e la ci-

57. Todhunter, K. Pearson, loc. cit., *1*, pp. 501-502.
58. W. Thomson, *On the Thermo-elastic and Thermo-magnetic Properties of Matter*, Quart J. of Pure and Appl. Math., *1*, 1857, pp. 57-77.
59. Ibidem, p. 63.

nematica si fronteggiano nell'armonia delle loro corrispondenze formali, da paro a paro, poiché sia l'una sia l'altra riguardano *enti* definibili o intelligibili in sé. Di qui nascerà l'impostazione che oggi ci appare più chiara, con la cinematica e la statica trattate separatamente e successivamente ricongiunte in virtù di un appello a ulteriori principi d'ordine sperimentale come, ad esempio, le equazioni costitutive.

Il Filosofo che ha capito tutto

Dobbiamo francamente riconoscere che la vera svolta risolutiva, quella che non tanto sciolse il problema degli appoggi, ma piuttosto aprì la strada della moderna meccanica strutturale, è dovuta a un ben strano, quasi misterioso personaggio, a un filosofo i cui pensieri vagavano oltre ogni confine disciplinare, invadendo l'economia politica, la statistica, le dottrine del probabilismo filosofico, le scienze della vita, l'epistemologia, la storia e la storiografia. A lui senza dubbio rimonta «il teorema del minimo lavoro in tutta la sua generalità», come ebbe ad avvertire malvolentieri Castigliano, il quale, nella 1ª Memoria del 1875, tentò di sminuirne la trattazione con argomenti non del tutto obiettivi. E a lui soprattutto può esser riferita quella diversa lettura alla meccanica cui s'è fatto cenno alla fine del paragrafo precedente, dove la statica prende corpo quale disciplina in sé, parallela e non subordinata alla cinematica.

Il nostro filosofo entrò nella storia qui narrata nascondendo il proprio nome: solo un'enigmatica sigla, «A.C.», apposta al termine di due straordinari la vori del 1827 e del 1828 pubblicati nel Bollettino del barone Férussac. Oscuro negli intenti, oscuro nell'identità, egli restò alquanto estraneo alla comunità scientifica dei meccanici, per lungo tempo; tant'è che ancor nel 1870 il Generale Menabrea, scrivendo al Conte Federigo Clopis presidente dell'Accademia di Torino, riteneva che A.C. celasse il nome di Augustin Cauchy, e la stessa opinione fu formulata da G. Barsotti in una lettera a Menabrea del 1869, mentre O.F. Mossotti nelle sue *Lezioni di Meccanica Razionale* del 1858 aveva lasciato anonimo l'autore. Poi la questione fu chiarita: A.C. sono le iniziali di Augustin Cournot. Ma chi era costui? Ai cultori della meccanica la sua memoria dice poco; in *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, E. Mach neppure lo cita; altrettanto fa R. Dugas nella sua *Histoire de la Mécanique*; Y. Elkana, M. Jammer, M.B. Hesse ed altri più recenti storici, dediti all'esame critico dei concetti della meccanica cui Cournot dette notevole contributo, lo ignorano. Ben diversa è invece l'accoglienza della sua opera tra i filosofi: la *Revue de Métaphysique et de Morale* gli dedicò un numero speciale nel 1905; F. Mentré ne studiò l'opera interpretandola secondo l'orientamento dello spiritualismo cristiano in un grosso volume del 1907; alcuni storici ne accentuarono gli spunti in favore del vitalismo (J. Second 1910, J. Rostand 1953, E. Callot 1959); altri lo collocarono quale esponente del probabilismo filosofico (F. Mentré 1908, D. Darbot 1910, G. Milhaud 1911, F. Redi 1934, J. De La Harpe 1936, E. Rocchi 1967); altri ancora ne valorizzarono gli apporti all'economia e alle scienze sociali (R. Ruyer 1930, F. Bompaire 1931, P. Taviani 1940). «La philosophie hautement empirique» di A. Cournot (com'ebbe a chiamarla G. Sorel in un articolo commemorativo del 1911) fu oggetto di un'analisi attenta all'intreccio costante tra filosofia e scienza nonché alle preziose notazioni epistemologiche sulla meccanica, pubblicata nel 1942 da Bruno Caizzi [60].

Non c'è dubbio: in ogni campo Cournot si rivela un autentico precursore le cui idee sono destinate a dar frutto assai più tardi rispetto alla loro prima apparizione. Naturalmente qui dobbiamo limitarci ad un semplice cenno sui risultati relativi alla meccanica che trovano espressione nelle note del 1827 e 1828 e che sono richiamati nel *Traité* del 1861. La nota del 1827 verte su un tema apparentemente diverso da quello degli appoggi o dei sistemi staticamente indeterminanti; il titolo è «*Sur les percussions entre deux corps durs, qui se choquent en plusieur points*» (Bull. des Sciences math. astron., phys. et chim. du Baron de Férussac, 1827, pp. 4-11). Si tratta del problema dell'urto tra due corpi rigidi quando il numero dei punti di contatto sia maggiore di 6. È l'esatto simmetrico del problema degli appoggi sovrabbondanti del corpo rigido su un piano; «pour

60. Augustin A. Cournot (1801-1877) si educò in campo scientifico studiando matematica, fisica, meccanica, chimica e astronomia; seguì i corsi di Laplace all'Académie des Sciences, strinse amicizia alla Sorbona con Dirichlet, frequentò i maggiori scienziati, come Ampère, Poisson, Cauchy. Precettore per un decennio presso il Maresciallo Gouvion, proseguì tuttavia le sue ricerche matematiche e fisiche che lo condussero a pubblicare le sue prime memorie tra il 1826 e il 1831 nel Bulletin del Barone de Férussac; si addottorò in scienze nel 1829 con due monografie, l'una riguardante appunto il nostro tema, l'altra relativa alla meccanica celeste. Agli interessi specifici dello scienziato si univano in Cournot quelli per la riflessione filosofica e lo studio delle scienze umane: è significativo che nel 1827 egli avesse conseguito la licenza in diritto. Le prime grandi opere apparvero nel 1838 e nel 1843 e riguardarono rispettivamente le «*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*» e l' «*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*». Il primo di questi trattati segna una data importante nella storia dell'Economia teorica poiché «è il primo tentativo franco e serio di applicare la matematica alla scienza economica» (L. Walras, 1873). L' «*Exposition...*» è in certo modo parallela ai lavori di Poisson sulla teoria della probabilità e pone Cournot tra i massimi fondatori del probabilismo ottocentesco, secondo una lettura rigorosa — ripresa ad es. da J. S. Mill — che non esclude la fedeltà ai principi della spiegazione scientifica e «deterministica» della natura. Del 1851 è l'opera «*Essai sur les fondaments de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*» dove sono tracciate le linee di un criticismo scientifico veramente anticipatore dell'epistemologia che si svilupperà verso la fine del secolo XIX. Ma particolare interesse per noi presenta il cospicuo trattato del 1861, «*Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*» per l'interpretazione ivi formulata sui principi della statica e della meccanica. Il *Traité* delinea il complesso orientamento vitalistico dell'autore, in un sistema comprensivo d'ogni scienza e conoscenza. Di notevole significato per la storiografia francese sono infine le «*Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*» del 1868.

une application facile du principe de D'Alembert», Cournot perviene alla conclusione che: «lorsque le nombre des points de choc est plus grand que 6 (...) on a toujours ce qu'il faut pour déterminer tous les éléments du mouvement après le choc» ma restano indeterminati «les valeurs individuelles des percussions N, N_I etc. souffertes par chacun des points de choc: c'est à dire, qu'au moyen de la supposition qu'on a fait de deux corps parfaitement rigides, ces percussions peuvent être sensées réparties diversement sur chacun des points de choc, sans que les éléments du mouvement des deux corps après le choc en soient changés, pourvu que (...) le résultante des percussions et leur couple résultant restent les mêmes» [61].

Dunque, anche nella meccanica dell'urto sorge il medesimo paradosso che s'incontra in statica. Vero è che nell'un caso e nell'altro l'elemento generatore del paradosso è l'ipotesi del corpo rigido, sicché sembrerebbe ragionevole uscirne adottando la soluzione di Poinsot affermando cioè che i corpi rigidi non esistono. «Mais cela lève-t-il la difficulté mathématique? — domanda Cournot — Nous osons penser que non, malgré le respect que doit inspirer l'autorité de ce célèbre géomètre (Poinsot), qui a particulièrement médité sur la philosophie des sciences exactes». Ora, questa filosofia — aggiunge l'Autore — è soggetta a variare: ai tempi di Descartes e di Leibniz si voleva riportare tutta la dinamica a fenomeni d'urto tra parti di materia impenetrabili e rigidi; questi fenomeni erano i soli ad esser ritenuti intelligibili, mentre le forze a distanza, come l'attrazione newtoniana, erano relegate tra le cause occulte. D'Alembert fu il primo che segnalò quanto oscura fosse anche l'idea d'impulso. L'indeterminazione sopra riscontrata è un'ulteriore prova che l'urto tra corpi rigidi produce le stesse difficoltà che si riscontrano nella statica e non gode perciò di quella chiarezza che Descartes e Leibniz vi riconoscevano.

Resta la questione sull'esistenza o meno del corpo rigido: ma essa non è pertinente, poiché comunque si tratta «d'une conception mathématique aussi claire que celles d'un cerche ou d'un carré parfait» raggiungibile per un consueto passaggio al limite dai corpi naturali: «donc à la limite, par analogie avec le phénomène perpetuellement observé en mathématique, la rigidité devenant parfaite, les percussions individuelles obtiendront une valeur limite, qui n'est que masquée, à la manière d'un coefficient differentiel, par une indétermination apparente» [62].

Il nostro Castigliano riprenderà l'argomento, con riguardo ai sistemi articolati (cfr. ad es. la prima memoria del 1875, pp. 32-33) giungendo a un'importante conclusione: «vedesi che ciascuna (delle tensioni nelle verghe) sarà espres-

61. A. Cournot, *Sur les percussions...*, Bull. de Férussac 1827, p. 8.
62. Ibidem, p. 10.

sa dal rapporto di due funzioni omogenee del grado 3n - 6 rispetto ai coefficienti (elastici) ϵ_{pq}, e perciò dipenderà soltanto dai rapporti tra questi coefficienti e non punto dai loro valori assoluti». Di qui segue che il determinare il limite corrispondente all'ipotesi di corpo rigido è, secondo Castigliano, banale e inconseguibile a un tempo: è inconseguibile se si pretende che la condizione di rigidità basti a determinare un'unica soluzione; è banale se si associa un particolare corpo rigido per ogni assegnato corpo elastico, rispettando i «rapporti tra i coefficienti». Il sentiero già chiaramente prefigurato da Castigliano riemergerà a distanza di quasi un secolo, possiamo dire, nei nostri giorni; «nulla va perduto nella storia», appunto, come si disse nel paragrafo introduttivo! Recentemente Giuseppe Grioli ha riproposto il tema in tutt'altro contesto e con diverso linguaggio [63]; ancor nel presente anno, in dialogo con Grioli ma partendo da un nuovo punto di vista, Paolo Podio Guidugli e Salvatore Marzano stanno pubblicando un importante lavoro in proposito [64], ed altri sviluppi sono in corso di elaborazione.

In verità, l'intento che guidava Agostino Cournot era assai più ambizioso e, proprio per questo, più immaturo: per scoprire la situazione limite del corpo rigido — egli dice — «il faut recourir à d'autres considérations que celles qui conduisent aux équations ordinaires de l'équilibre et du mouvement», e ciò può attuarsi mediante «un artifice particulier de calcul» idoneo a presentare i valori limiti «sous une forme remarquable» [65]. Tale «artificio particolare di calcolo» di cui Cournot preannunzia qui l'esistenza, prende forma sostanzialmente perfetta nelle pagine dello stesso Bulletin de Férussac, l'anno successivo, il 1828, dove appaiono due articoli consecutivi firmati rispettivamente con le sigle S. e A.C., sul medesimo problema degli appoggi.

In questi articoli la questione è posta in termini analoghi a quelli già da tempo ricorrenti presso numerosi autori; si ricerca un nuovo principio per il corpo rigido che segni la differenza essenziale che passa tra la decomposizione delle forze (problema di per sé indeterminato, salvo casi particolari) e la determinazione delle pressioni (univoca, in virtù del principio di ragion sufficiente). «Ces deux notions de forces et de pressions sont réellement distinctes; (...) de même que pour passer de la statique à la dynamique, il est nécessaire d'admettre un principe nouveau, la proportionalité des vitesses aux forces; de même pour passer à la théorie des pressions, il faut admettre un principe que l'esprit puisse saisir comme évident; ce principe, quel est-il?». Queste parole sono di S., l'autore del primo articolo, ma la loro paternità è da S. attribuita a Vène, ufficiale del

63. G. Grioli, *On the stress in rigid bodies,* Meccanica *18*, 1983, pp. 3-7.
64. S. Marzano, P. Podio Guidugli, *Materiali elastici approssimativamente vincolati.* Rend. Sem. Mat. Padova (in stampa).
65. A. Cournot, loc. cit., p. 11.

genio francese. È questi il primo militare (quanti militari o insegnanti in scuole militari nella nostra storia! da Delanges, a Vène, sino a Menabrea) che intuì la soluzione vincente sin dal 1818: «l'auteur, partant de la considération que, dans la nature, les effects sont presque toujours liés à leur causes par des conditions de minimum ou de maximum, pense que les pressions doivent être égales entre elles le plus possible, que leur différences doivent être en somme un minimum, ou enfin que leur produit total est un maximum» [66]. Si noti quant'è vaga la formulazione del principio; in sostanza, vien soltanto rivendicata la speranza di poter applicare alla statica quella teleonomia che sin dal tempo di Maupertuis e di Euler era stata attribuita in generale ai fenomeni meccanici.

La relazione che S. dà della memoria di Vène («présenté à l'Académie des Sciences pour le concours du prix de physique décerné à M. Oersted») è alquanto sbrigativa: quasi una premessa introduttiva all'articolo seguente *«Sur la théorie des pressions»* dovuto ad Agostino Cournot [67]. Anche per Cournot c'è differenza essenziale tra forze e pressioni: «on ne peut point comparer directement — egli dice — les pressions exercées par un corps contre les obstacles aux forces qui les produisent. Ces pressions, comme les vitesses, sont des grandeurs héterogènes aux forces par lesquelles elles sont engendrées» [68]. L'analogia è con la dinamica dove esiste un principio che collega le forze alle velocità; si sa che la natura di tale principio è incerta poiché non è chiaro se si tratti di legge empirica o di teorema razionale o addirittura — come ritiene Lagrange — di semplice definizione della forza. Ma «peu nous importe cette discussion; nous prenons ce principe comme un fait universellement admis». Per la statica, d'altra parte, si può parlare di *dynamique latente*, ossia del caso limite nel quale gli effetti non son più «resi sensibili da segni geometrici appariscenti», ma certamente vale anche per essa la proporzionalità tra cause ed effetti: «ainsi, un point soumis à des forces étant retenu par un obstacle fixe, nous admettons que la pression exercée, par ce point contre l'obstacle, est proportionelle à la résultante des forces ou à la vitesse que ce point prendrait dans le premier instant de son mouvement si l'obstacle venait à être anéanti, ou à la droite infiniment petite qu'il décrirait dans la direction de la résultante, pendant l'élément du temps» [69]. Come si nota, questo brano è oltremodo ambiguo, per un'ambiguità non molto dissimile da quella che caratterizzava la prima trattazione di Euler: la proporzionalità tra pressioni $P, P^1, \ldots$, e spostamenti $p, p^1, \ldots$, nel primo istante di un movimento «virtuale», è da intendersi quale definizione generale derivante dal concetto di pressione, o quale legge suggerita dall'esperienza?

66. *Mémoire sur les pressions, par M. Vène,* Bull. ... de Férussac, 1828, p. 10.
67. A. Cournot, *Sur la théorie des pressions,* Bull. ... de Férussac, 1828, pp. 10-22.
68. Ibidem, p. 11.
69. Ibidem, p. 12.

Asteniamoci dalla discussione: si assuma *l'ipotesi* («nous admettons...»). Allora tutto vien chiaro. Se F, F^1,..., designano le forze date operanti sul sistema secondo le direzioni f, f^1,..., il principio della velocità virtuale si esprime nella:

$$F\delta f + F'\delta f' + \text{etc.} - (P\delta p + P'\delta p' + \text{etc.}) = 0 \qquad [9]$$

che dà le relazioni di equilibrio ove si riducano al più piccolo numero possibile le variazioni indipendenti «en tenant compte des liaisons propres du système, mais non pas de celles qui résultent de la présence des obstacles (...). Quand on a égard à la présence de ces obstacles pour le nombre des variations, il vient simplement: $F\delta f + F'\delta f' + \text{etc.} = 0$; donc aussi, dans le même cas: $P\delta p + P'\delta p' + \text{etc.} = 0$».

A questo punto, in virtù della proporzionalità $P :: p$, risulta dimostrata la:

$$p\delta p + p'\delta p' + etc. = 0$$

«*relation en vertu de laquelle la somme des quantités* p^2, p'^2, etc., ou, par l'hypothèse, celle des carrés des pressions P, P^1 etc., est un *minimum*; car il est facile de s'assurer que le cas du *maximum* ne peut avoir lieu ici. Par conséquent, les équations qui complètent, dans tous les cas, le nombre de celles qui sont nécessaires pour l'entière détermination des pressions, résultent de la condition que la somme des carrés de ces pressions soit un *minimum*» [70].

Questa pagina è davvero sconcertante: c'è tutto nella stringatezza del ragionamento e nella verità della conclusione, e non c'è niente come al termine di un subdolo circolo vizioso. Lo ha notato con grande acutezza (e una briciola di malignità) Alberto Castigliano nel paragrafo introduttivo di uno dei suoi lavori: «l'anno 1828 il Cournot pubblicò (...) una Memoria in cui estese il principio di Vène, e cercò di dimostrarlo, benché, per vero dire, la sua dimostrazione non sia altro che un giro vizioso» (cfr. 1ª Memoria del 1875, p. 5).

Il nocciolo della questione sta nella natura da assegnare all'ipotesi $P :: p$; se essa è il fondamento della «dinamica latente» in cui risiede l'essenza della statica, allora Castigliano ha ragione: la dimostrazione di Cournot è un giro vizioso. Se invece quell'ipotesi è essa stessa il principio di esperienza che congiunge le pressioni agli spostamenti in virtù di un'equazione di legame elastico, allora la dimostrazione è corretta e ben poco ad essa è stato aggiunto dagli autori successivi, Menabrea compreso.

Il qual Menabrea tenterà inutilmente di garantirsi l'originalità della propria scoperta affermando che Cournot era giunto a una formulazione imperfetta ($\Sigma P^2 = min$) ma recuperabile come caso particolare del «principio di elastici-

70. Ibidem, p. 13.

L

tà» ($\Sigma\ mP^2 = min$, con $p = mP$). Infatti ciò *non è vero*; basta leggere l'articolo di Cournot a p. 18, dove vien fatto riferimento al legame elastico: «En général, faisant dans notre analyse $p = mP$, $p' = m'P'$, etc., l'équation $\Sigma\ P\delta p = 0$ donnerait $\Sigma \frac{1}{m} pdp = 0$, c'est à dire que la somme $\Sigma \frac{l}{m} p^2$ ou celle $\Sigma\ mP^2$ devrait être un *minimum*». Purtroppo, subito dopo il testo s'offusca tornando al concetto del corpo rigido come limite del côrpo elastico e pretendendo che il principio di minimo valga in ogni caso. Il difetto di Cournot sta nella eccessiva generalità dei suoi intenti. Il contributo dei successori sta semplicemente nel *delimitare* (e non nell'estendere!) il campo di validità dell'argomentazione; sta cioè nel terminarla a tempo, a un passaggio «penultimo», senza pretender troppo da essa. Per questo, sin dall'inizio del presente lavoro, abbiamo detto che la nostra storia non riguarda progressive «scoperte» ma «riconoscimenti» più puntuali: il merito preminente di Castigliano consisterà infine nel terminare ancor prima, ad un passaggio «terz'ultimo», la trattazione, dimostrando che lo stesso principio di minimo può esser ritenuto un ornamento soverchio rispetto all'efficacia dei teoremi strumentali che ad esso conducono.

Da Cournot a Menabrea

È incredibile come esistano stagioni di fioritura delle idee per cui, nello stesso giro di anni, senza probabili collegamenti diretti, la ricerca scientifica sembra tacitamente sospinta a trovar semi e frutti della stessa qualità. Non s'ha da credere che il Rev. H. Moseley avesse letto di soppiatto l'articolo di Cournot, nascondendo ai lettori inglesi del *Philosophical Magazine* la provenienza delle sue intuizioni [71].

Egli presenta il *New Principle in Statics, called the Principle of Least Pressure* come sua scoperta, e tale esso è. Peraltro la formulazione di tale principio è assai imperfetta: «If there be any number of forces in equilibrium among which there enters a system of resistances, then are these resistances such, that their sum is a Minimum; each being considered a function of the coordinates of its point of application, taken with a positive sign, and subjected to the conditions imposed by the equilibrium of the whole» [72]. In formula: $\Sigma P = min$. Parreb-

71. H. Moseley, *On a New Principle in Statics, called the Principle of least pressure*, Phil. Mag., (3), *3*, 16, 1833, pp. 285-288; *On the Theory of Resistances in Statics*, Ibidem, (3), *3*, 18, 1833, pp. 431-436.
72. Ibidem, pp. 285-286.

be di dover prevedere disastri nelle applicazioni tratte da una simile formula; ma ciò non accade, poiché l'intento di Moseley è il ritrovare qualitativamente il vecchio *Principium* euleriano, e questi gli torna fortunosamente [73].

L'anno appresso, analoghi pensieri sostengono un lavoro di G.M. Pagani presentato all'Académie des Sciences di Bruxelles; Pagani tornerà sull'argomento nel 1838 con una nota aggiuntiva inserita tra gli Atti dell'Accademia di Torino [74]. Qui il riferimento all'elasticità è chiaramente denunciato, sia nel caso di cordoni elastici fissi rispettivamente in una delle loro estremità e riuniti nell'altra in un nodo caricato da una forza (memoria del 1834), sia nel caso di una lastra rigida sorretta da colonne elastiche (memoria del 1838). La soluzione è tratta in generale, secondo un procedimento disteso ed accurato anche dal punto di vista tecnico; ad esempio, nel saggio torinese, son tenuti presenti i risultati della teoria sulla pressoflessione assegnando i limiti relativi all'instabilità euleriana e alla rottura. Pagani riconosce così che il *Principium* di Euler è un semplice corollario di tale teoria in un'ipotesi particolare, e cioè «en réduisant chaque colonne à son filet central» [75]; dunque, se (x, y) è il piano d'appoggio, la distribuzione delle pressioni segue la legge

$$P = A + Bx + Cy. \tag{10}$$

A questo punto, la proposizione di Cournot $\Sigma\, P^2 = min$ è dedotta come «propriété remarquable des pressions telles qu'elles risultent de la formule générale». Infatti «nous aurons $\Sigma\, \delta P = 0$, $\Sigma\, x\delta P = 0$, $\Sigma\, y\delta P = 0$. Multiplions la première de ces équations par A, le seconde par B et la troisième par C; la somme des produits donnera $\Sigma\,(A + Bx + Cy)\, \delta P = 0$, ou bien, en égard à l'equation [10], $\Sigma\, P\delta P = 0$. Donc etc.» [76]. La dimostrazione è perfetta, come si vede, ma troppo limitata al caso particolare. Ha ragione Menabrea a ritenerla una semplice anticipazione del suo «principio di elasticità» [77].

Meno ragione ha invece Menabrea a collocare sullo stesso piano di Pagani il Mossotti le cui *Lezioni di Meccanica Razionale* (Pisa 1858) riportano il teorema di minimo «annunciato per la prima volta in un articolo del Bulletin de Férussac, Janvier 1828, e segnato A.C.» subordinandolo con chiarezza all'ipotesi di elasticità. Mossotti parte dal principio dei lavori virtuali [9] e per trarre da es-

73. Ibidem, pp. 431-434.

74. G.M. Pagani, *Note sur l'équilibre d'un système dont une partie est supposée inflexible et dont l'autre partie, est flexible et extensible*, Mém. Acad. de Bruxelles *8*, 1934, pp. 1-14; *Mémoire sur l'équilibre des colonnes*, Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino, (2) *1*, 1939 (1938) pp. 316-371.

75. Ibidem, p. 364.

76. Ibidem, p. 365-366.

77. L.F. Menabrea, *Sul principio di elasticità*, Atti R. Accad. d. Sc. di Torino, 1870, p. 687.

so l'equazione $\Sigma P\delta p = 0$ sviluppa un argomento analogo a quello già usato da Cournot, seppur un poco più disteso e già assai prossimo alla dimostrazione che nel 1869 Bertrand comunicherà a Menabrea con una lettera del 16 gennaio.

Al medesimo esito del Mossotti era giunto nel 1857 anche Alessandro Dorna [78]: il suo lavoro sul problema degli appoggi ha l'aspetto dimesso di un esercizio applicativo utile agli allievi della Regia Accademia Militare di Torino dove Dorna insegnava, per mostrar loro l'efficacia del principio dei lavori virtuali. Secondo l'Autore, tale principio (da lui denominato equazione dei «momenti virtuali») può essere scritto nella seguente forma:

$$\mathrm{S}\,(Q \;\Delta q) + \mathrm{S}\,(L \;\Delta l) + \Sigma\; P\,\Delta p = 0 \qquad [11]$$

dove i primi due termini designano i «momenti virtuali» delle forze esterne e delle forze interne, mentre il terzo termine indica il «momento virtuale» delle pressioni di appoggio. Ora — dice Dorna — «volendo considerare i sostegni come fissi, rispetto agli altri punti del sistema, è necessario supporre che i medesimi si muovano infinitamente meno di questi, e che, per conseguenza, i momenti virtuali delle pressioni P, P' siano infinitamente piccoli rispetto a quelli delle altre forze applicate a punti mobili. Ciò fa sì che l'equazione [11] si scompone nelle seguenti:

$$\mathrm{S}\,(Q \;\Delta q) + \mathrm{S}(L \;\Delta l) = 0$$
$$\Sigma P \;\Delta p = 0$$

la prima delle quali è indipendente dalle pressioni, e la seconda non contiene che queste» [79].

La dimostrazione data da Dorna è in certo modo geniale, per l'idea di sostituire all'immagine di un appoggio inamovibile quella di un appoggio che subisca spostamenti infinitesimi d'ordine superiore rispetto alle deformazioni e agli spostamenti del corpo. Resta tuttavia poco convincente e per nulla rigorosa. Lo stesso giudizio vale per la celebre memoria di Luigi Federico Menabrea presentata l'anno successivo, il 1858, presso i Comptes Rendus dell'Accademia di Francia [80]. In realtà Menabrea non aggiunse nulla alla trattazione ancor lacunosa di Dorna, ma ne estese grandemente l'interpretazione, sì da farne un metodo generale per la descrizione completa del comportamento elastico in termini energetici. A tale scopo, l'ufficiale sabaudo mutò il modello di riferimento: non più il corpo poggiante su un piano, ma il «sistema elastico» costituito da punti

78. A. Dorna, *Memoria sulle pressioni sopportate dai punti d'appoggio di un sistema equilibrato ed in istato prossimo al moto*. Mem. R. Accad. della Sc . di Torino, *18*, 1857, pp. 4-40.
79. Ibidem, p. 9.
80. L.F. Ménabréa, *Nouveau Principe sur la Distribution des tensions dans les systèmes élasques*, Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences, *46*, séance du 31 mai 1858.

materiali tra loro connessi da elementi lineari deformabili elasticamente. L'intrico dei punti e delle linee poteva così rappresentare *in astratto* un qualunque solido discretizzato nelle sue molecole, e *in concreto* una complicata struttura reticolare. D'un colpo erano raggiunte l'universalità dell'oggetto studiato dalla teoria dell'elasticità e la immediata aderenza alle applicazioni dell'ingegneria. Anche il principio, ovvero la nuova equazione introdotta da Cournot, da Pagani, Mossotti e Dorna, mutava aspetto: non più un'anonima espressione quadratica delle reazioni vincolari, ma l'energia di deformazione elastica era resa protagonista della condizione di minimo.

Per questa maggiore intensità di riconoscimento il merito di Menabrea è indubitabile; forse è giusto attribuirgli la paternità del «nuovo principio» benché — come abbiamo veduto nelle pagine precedenti — «nuovo» esso non sia affatto. L'aspetto innovativo sta appunto nella più vasta visuale da cui Menabrea si colloca e nella solenne enunciazione che pone il *principe d'élasticité* a fondamento dell'intera teoria dei sistemi elastici: «Lorsqu'un système élastique se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail développé par l'effect des tensions ou des compressions des liens qui unissent les divers points du système est un minimum». Naturalmente, un principio vale in sé, nella misura in cui riesca a coordinare i fenomeni; ma per il principio di elasticità i suoi precedenti storici obbligavano a una dimostrazione. Anziché intendere la condizione di minimo del lavoro interno quale strumento di connotazione e forse di definizione dei sistemi elastici, sembrava doveroso mutare il principio in teorema, riconducendolo alle leggi note della meccanica e alla consueta descrizione fenomenologica dell'elasticità. In questa impresa Menabrea si impegnò con reiterati tentativi infruttuosi, respingendo critiche graffianti di colleghi e subalterni, poggiando su l'enfasi dell'enunciazione là dove il rigore era incerto, ribadendo con esempi, citando a testimonio gli scienziati più illustri che eran scesi in suo aiuto contro le polemiche del coraggioso tenente Emilio Sabbia; fu l'impresa della sua vita. E fu anche l'impresa all'ordine del giorno per l'intera comunità scientifica torinese in cui Alberto Castigliano entrò trionfatore.

Finalmente in porto

Sarebbe bello poter dire a questo punto che la vera soluzione apparve per la prima volta ad opera di Castigliano con la sua tesi di laurea del 1873; sarebbe degna conclusione della storia qui narrata in onore dello scienziato astigiano nel centenario della sua morte. L'aderenza ai fatti ci costringe invece a riconoscere che la soluzione definitiva ebbe luogo qualche anno prima, tra il 1864 e il 1865, ad opera di A. Dorma e di James H. Cotterill; a questi due autori può esser anche associato James Clerk Maxwell che nel 1864, appunto, inaugurò il «metodo delle forze» per l'analisi dei sistemi elastici come applicazione del teorema di Clapeyron [81]; tuttavia, lo splendido lavoro di Maxwell segue un suo percorso differente dalla linea sin qui tracciata per la definizione di un principio o di un teorema di minimo e quindi possiamo tralasciarlo. I contributi di Dorna e di Cotteril sono al contrario ben centrati e conducono a una perfetta chiarificazione.

Nei suoi «*Elementi di Meccanica Razionale*», la cui prima edizione è del 1865 a Torino, il Dorna affronta il problema di determinare «le pressioni dei punti di appoggio di un sistema e le compressioni e le dilatazioni dei suoi lati», secondo un metodo del tutto generale, nello spirito di Lagrange. Ottenute così le formule risolutive, egli dimostra che ad esse si perviene necessariamente partendo dal principio di minimo. In verità il testo di Dorna è un po' sbrigativo, ma in ultima analisi anticipa il metodo che Castigliano adotterà nella sua tesi di laurea.

I saggi di Cotterill sono poi di qualità straordinaria: v'è detto tutto e nel modo più esplicito, più consapevole [82]. Quel che stupisce è l'estrema umiltà, persin quasi ostentata, dell'autore. Egli consegue i risultati più ambiti in pochi passaggi irreprensibili, ma ha sempre l'aria di scusarsene, come se egli ardisse troppo e per propria dimenticanza o ignoranza non sapesse che altri li avevano già conseguiti.

Nella prima memoria (presentata il 3 Marzo 1865), Cotterill attribuisce il merito della scoperta a Moseley e la correzione da lui introdotta è dissimulata come miglioramento e generalizzazione. Partendo dal teorema di Clapeyron

$$2U = \Sigma\ (Xu + Yv + Zw)$$

dove U è il lavoro X, Y, Z le componenti di una delle forze «acting on a free perfectly elastic body» e u, v, w le componenti dello spostamento relativo, Cotterill osserva: «U may be expressed as a homogeneous quadratic function of the forces; therefore

$$2U = \Sigma\ \left(X\frac{\partial U}{\partial X} + Y\frac{\partial U}{\partial Y} + Z\frac{\partial U}{\partial Z}\right) \qquad [12]$$

81. J.C. Maxwell, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, Phil. Mag. *27*, 1864, pp. 294-299.

82. J.H. Cotterill, *On an Extension of the Dynamical Principle of Least Action*, Phil. Mag. (4), *29*, 1865 pp. 299-305; *On the Equilibrium of Arched Ribs of Uniform Section*, Ibidem pp. 380-389; *Further Applications of Least Action*, Ibidem, pp. 430-436.

comparing which expressions for U, we see that

$$\frac{\partial U}{\partial X} = u \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = v \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = w \qquad [13]$$

Non conceive the body, instead of being free, to be immoveably attached at certain points to some fixed object, then we shall have for these points:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

that is, the variation in U, due to a change in the resisting force at the fixed boundaries of the system, is zero» [83]. La conclusione vien da sé, dimostrando il teorema di minimo. La seconda memoria presentata sempre nel marzo 1865 ha un'apparenza tecnica, come se all'Autore interessasse soltanto dedicarsi allo studio degli Arched Ribs; ma alla fine, in poche righe, si dà un forte balzo innanzi: Cotterill avverte che l'aver espresso l'energia in funzione delle forze è pretender troppo dal teorema di Clapeyron; forse avverte anche che l'uso della rappresentazione [12] con la deduzione [13] non è conclusiva poiché i coefficienti della forma [12] dipendono da X, Y, Z; e allora dà la dimostrazione «perfetta», la stessa che si può riscontrare nelle memorie di Castigliano del 1875. La terza memoria dell'aprile 1865 *(Further Applications...)* è davvero stupenda: qui il principio di minimo è applicato, appendendovi lagrangianamente le equazioni indefinite di equilibrio e ottenendo alla fine le equazioni di Lamé. Eppure la modestia non abbandona l'autore il quale anzi avverte che «nothing has been strictly proved» e teme d'aver detto cose già note, essendo «unacquainted with much that has been done on this subject».

Che resta dunque a Castigliano? Certo è che se il valore di uno scienziato dovesse esser misurato col cronometro, per decidere chi sia giunto prima alla mèta in una scoperta o in una dimostrazione, si dovrebbe concludere con un giudizio riduttivo, poiché gran parte delle proposizioni formulate da Castigliano non detengono un assoluto primato temporale; gli stessi teoremi «sulle derivate del lavoro di deformazione» sono letteralmente anticipati nei lavori di Cotterill. Ma la storia richiede un giudizio ben più articolato.

Castigliano è ammirabile non tanto come «profeta» di una via ancora inesplorata, quanto piuttosto come ultimo «eroe» della lunga e gloriosa battaglia scientifica che dall'iniziale ricerca di Euler, giusto un secolo addietro, attraversò paradossi, animò speranze, suscitò domande insondabili, offerse piste divergenti, incontrò promettenti sintesi, affrontò seri problemi tecnici, per concludersi infine e quasi cessare con la tesi di laurea del giovane ingegnere d'Asti. In

83. J.H. Cotterill, *On an Extension* ..., cit., p. 304.

Castigliano, infatti, raggiunge pienezza un duplice *riconoscimento*. Da un lato egli *riconosce* i limiti di validità del principio di minimo al quale dev'esser tolto quell'eccesso di intenzioni che i predecessori gli assegnavano: esso non è affatto un nuovo principio di statica, né vale per ogni sistema ed ogni materiale, ché anzi anche nell'ambito della teoria dei sistemi elastici può venir meno. A questo proposito, è significativo notare che l'animo col quale Castigliano s'accinse alle sue prime ricerche è metodologicamente simile a quello con cui il Padre Saccheri aveva affrontato la *vextata quaestio* sul 5° Postulato di Euclide: e cioè tentar di risolvere i sistemi elastici facendo a meno del principio di minimo per verificare se emergessero risultati con esso incompatibili [84].

Dall'altro lato Castigliano riconosce e sommamente valorizza l'aspetto tecnico e applicativo della soluzione da lui dimostrata; egli avverte che lo strumento di calcolo, nella sua efficacia, è ben più amabile del principio altisonante nelle sue suggestioni speculative. In ciò Castigliano è autentico e moderno ingegnere: lo testimonia la cura e la ricchezza degli esempi nei quali egli si diffonde con perseverante attenzione, non trascurando nessuno dei problemi che la teoria dell'elasticità consente di inquadrare rigorosamente a favore dell'arte e della scienza costruttiva. Osiamo dire che la vera originalità dell'opera di Castigliano, quel che la distingue fortemente dai contributi di tutti gli autori sin qui citati, sta proprio nell'aver egli saputo erigere l'intera scienza delle strutture a partire dai suoi teoremi, secondo un disegno organico, armonico, completo, nel quale lo splendore della sintesi teorica e applicativa di gran lunga sopravanza la somma di tutti gli addendi.

84. A. Castigliano, *Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici,* Atti R. Accad. delle Sc. di Torino, 10, 1875, cfr. l'*Introduzione*.