RADICI STORICHE E PRESUPPOSTI CRITICI DELL'OPERA DI ALBERTO CASTIGLIANO

di
Edoardo Benvenuto *

È probabile che i concittadini di Conradin Kreutzer siano rimasti un poco smarriti ascoltando il «discorso di commemorazione» tenuto da Martin Heidegger nel 1955 a Meßkirch in occasione del 175° anniversario della nascita del compositore. «Gli strumentisti e i cantanti che animano la festa odierna — disse quella volta Heidegger — sono per voi la testimonianza che l'opera di Conradin Kreutzer è oggi giunta nuovamente al suono. Ma basta questo perché la festa *(Feier)* possa esser detta una commemorazione *(Gedenk-Feier)*? Una commemorazione è infatti un'occasione per rivolgere il pensiero a colui che commemoriamo, e dunque per pensare *(denken)* ...». Heidegger intese appunto mutar la celebrazione in pensiero, l'*Andenken* in *Durchdenken*: e così, anziché commemorare Kreutzer, non ne parlò affatto e volse il discorso su abissali domande filosofiche quasi del tutto estranee alla leggiadra musica del compositore di Meßkirch.

Ebbene, temo che un analogo smarrimento possa derivare dalla lettura di queste pagine scritte in onore di A. Castigliano. Dei celebri teoremi sull'equilibrio dei sistemi elastici ai quali è ormai saldamente congiunto il nome dell'ingegnere astigiano non darò che un cenno sommario e neppure mi soffermerò sull'importanza e l'originalità dell'intera opera compiuta da Castigliano nella sua breve vita. D'altra parte, la ristampa anastatica di alcuni tra gli scritti suoi più significativi offre tangibile testimonianza della rigorosa e ricca sintesi da lui realizzata tra teoria e pratica, tra scienza e tecnica, confermando vieppiù il bel giudizio di S. Timoshenko sulla *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*: «Looking through all these applications, it is easy to see that little has been added to this branch of the theory of structures since Castigliano wrote his famous

* *Professore Ordinario di Scienza delle Costruzioni nell'Università di Genova.*

book» [1]. Vorrei invece tentar anch'io il difficile cammino di Heidegger — seppur in tutt'altro contesto e con esiti ben più umili — per mutare la commemorazione in riflessione storico-critica e capir meglio il significato dell'intervento di Castigliano al termine di una lunga e combattuta diatriba scientifica che per quasi un secolo fu sorgente di ipotesi persuasive e di ancor più persuasive contestazioni, di intuizioni feconde benché fallaci e di verdetti ineccepibili benché sterili, di itinerari divergenti e di inattesi incontri; sinché d'improvviso venne la stagione propizia in cui la medesima idea, l'idea vittoriosa, apparve in più luoghi nel medesimo tempo, come se vagasse nell'aria in attesa d'essere captata.

Qualcosa d'analogo s'era verificato — come osserva K. Pearson [2] — a proposito di un altro famoso problema di meccanica strutturale, quello dei solidi d'uguale resistenza che affaticò un buon numero di scienziati tra la metà del '600 e la metà del '700. In entrambi i casi l'Italia offerse terreno fertile alle polemiche e al fervore quasi passionale della ricerca, dove si univano sublimi intenzioni metafisiche e umanissime ambizioni personali o di scuola. Ma la disputa post-galileiana sui solidi d'ugual resistenza non nascondeva, in realtà, alcunché di inquietante: si trattava soltanto di chiarire i termini del problema, riconoscendo infine che ognuna delle fazioni in lotta s'era guadagnata una parte di verità rispetto a domande e a obiettivi diversi, inizialmente mischiati.

Invece la seconda disputa sulla quale dobbiamo ora soffermarci è di tutt'altro tenore. Sotto l'apparente banalità di un comune esercizio per la determinazione delle reazioni che sorgono quando un corpo poggia su un piano in più di tre punti non allineati o in più di due punti allineati, erano nascosti problemi così oscuri da coinvolgere i principi più saldi della metafisica classica, costringendo a riflettere sui concetti fondamentali della statica e della meccanica. Seguendo il corso della vicenda, esaminando l'alternarsi delle soluzioni contrassegnate da linguaggi e riferimenti mutevoli, lo storico è indotto a tracciare una linea evolutiva, quasi un racconto di semplice fattura che finalmente narri come dall'errore si sia passati alla verità, dai tentativi fallaci o parziali si sia giunti alle risposte soddisfacenti: in tale schema sarebbe facile assegnare a Castigliano un ruolo preminente, scorgendo nella sua opera la trionfale conclusione del tormentato cammino. C'è però anche un altro modo di veder le cose, secondo l'annotazione suggestiva di W. Benjamin che «nulla va perduto per la storia», tentando cioè di considerare ognuno degli «eventi» intervenuti nella vicenda per la sua parte migliore, quale traccia di una domanda degna d'essere esplorata che

1. S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1953, p. 292.

2. Todhunter, K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, 2, 1,* Cambridge: at the University Press, 1893, p. 410.

spesso rimane ancor viva al cader della soluzione proposta, poiché l'«evento» successivo non la cancella, ma soltanto la rimuove. Sotto questo profilo, l'opera di Castigliano prende un'altra luce: in essa sembra sparire persino il senso delle vecchie questioni affrontate dai predecessori e tutto appare chiarito al punto da non dover procedere ad altro se non alle applicazioni tecniche. Ma forse ciò non è vero: la risposta esauriente offerta dal nostro scienziato piemontese è di quelle che — come dice il Manzoni — non risolvon le questioni, ma le mutano. Il che può voler dire che nella loro originaria formulazione le antiche domande restano ancora aperte, forse suscettibili di sviluppi imprevisti. Come accenneremo più avanti, questo è il caso di almeno uno dei problemi che Castigliano sbriga in quattro parole, ritenendolo giustamente superato dalla sua chiave interpretativa: è il problema della determinazione dello stress nei sistemi rigidi. In tempi recentissimi, questo lontano percorso di ricerca che chiunque avrebbe ritenuto sepolto da più di un secolo, è riemerso vivacemente all'attenzione resuscitando daccapo promettenti speranze.

Ma c'è di più: la storia che ci accingiamo a presentare mostra una strana peculiarità. Le ipotesi corrette, le formule veritiere che avrebbero condotto alla soluzione, seppur in casi particolari, furono scoperte al primo colpo, a partir da Euler nella memoria del 1773 in cui egli pose il problema «de pressione ponderis». Ed anche in seguito, quando nei primi decenni del 1800 la mano invisibile del tempo o del suo Genio sospinse scienziati di formazione e provenienza diverse a scoprire l'esistenza di un *principio di minimo* quale bandolo dell'intricata matassa, il risultato fu subito conquistato con perfetta determinazione. Eppure non fu altrettanto chiaramente *riconosciuto* nel suo genuino significato. Un eccesso di compiacimento per la mèta sperata o raggiunta faceva sì che gli strumenti per conseguirla fossero lasciati in ombra, come passaggi intermedi su cui non valesse soffermarsi. E invece il vero bandolo della matassa stava appunto nella chiarificazione di quegli strumenti, lasciando eventualmente in ombra, al modo di corollario suggestivo ma tutto sommato improduttivo, la definizione del *principio*.

La nostra storia, cioè, non è tanto quella di un progresso nella *scoperta* di nuove leggi o di nuove proposizioni risolutive; è piuttosto quella di un *riconoscimento* vieppiù rigoroso del significato racchiuso in soluzioni già note da tempo. Invano il Menabrea, ad esempio, cercherà di rivendicare l'originalità del suo «principio di elasticità» screditando i contributi dei predecessori al rango di idee embrionali, ristrette a particolari applicazioni; in realtà le proposte di Vène, Cournot, Pagani, Mossotti e Dorna non peccano affatto per mancanza di generalità e sotto l'aspetto del primato nella *scoperta* rendono assai discutibile la pretesa di Menabrea. Nel medesimo tempo, però, sarebbe assurdo disconoscere il grande ruolo del principio di Menabrea nella difficile via del *riconosci-*

mento, come si vedrà in seguito. Talvolta accade — ed è questo il caso — che le verità più sfuggenti sono quelle appunto più ostentatamente esibite, come si narra in una celebre novella di Edgar A. Poe.

Ebbene, Castigliano detiene un indubbio primato tra i numerosi autori che lo hanno preceduto, proprio e soltanto se si bada all'intensità del riconoscimento più che alla novità della scoperta. Sarebbe infatti incerto affermare che egli abbia dato la prima dimostrazione rigorosa del principio di minimo per i sistemi elastici poiché la sua stessa pista era già stata battuta con successo da altri; in particolare J.H. Cotterill aveva già stabilito nel 1865 con ragionamenti del tutto analoghi le formule intermedie dell'itinerario dimostrativo che in Castigliano prenderanno il nome di «Teorema delle derivate del lavoro di deformazione» (2ª Memoria del 1875). Qui invece sta la grandezza del nostro scienziato: nell'aver dato un nome alla formula intermedia, nell'aver riconosciuto che la via è ancor più importante della mèta, e cioè di quel principio di minimo dal sapore metafisico che gli altri avevano collocato a fondamento di tutta la teoria e che egli relega a livello di corollario.

L'aver fissato l'attenzione sul mezzo più che sul fine è un atto ricco di significato. Nella sua *Wissenschaft der Logik*, Hegel scrisse: «Il mezzo è un che di superiore agli scopi finiti della finalità esterna; l'aratro è più nobile che immediatamente non siano i godimenti ch'esso procura e che costituiscon gli scopi ... Coi suoi strumenti l'uomo domina la natura esteriore, anche se per i suoi scopi le resta anzi soggetto» [3]. Senza voler pretendere troppo da questo richiamo a una filosofia così lontana dall'orizzonte culturale in cui si muoveva Castigliano, si può dire però che egli riconobbe assai chiaramente la preminenza dello strumento di calcolo (la formula intermedia sulle «derivate del lavoro») quale ospite della «razionalità», secondo l'espressione hegeliana; e infatti su di esso egli eresse l'intera *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, l'intero edificio della «Scienza delle costruzioni». In tale opera teorica ma ad un tempo progettuale e quasi «costruttiva» dell'intima sintesi tra conoscenza scientifica e sapere tecnico, Castigliano si mostra vero «ingegnere», nel senso alto che questa parola aveva in Italia verso la fine dell' '800, possessore e custode della τέχνη : in realtà, che cos'è la tecnica se non appunto la scienza dei mezzi?

I prodromi della vicenda

Non accade spesso che di una storia si possa assegnare una data precisa, un'occasione singolare da cui essa abbia tratto inizio; ma questo è il nostro ca-

3. G.W.F. Hegel, *Wissenschaft der Logik*, II, 2, cap. III, c.

so. Come già per altri problemi «fondativi» della statica e della scienza strutturale, è lecito forse fissare il luogo e il tempo in cui la questione fu posta per la prima volta con tale consapevolezza e decisione da racchiudere *in nuce* gran parte degli sviluppi successivi. Il luogo fu l'Accademia delle Scienze di S. Pietroburgo, l'anno il 1773, l'autore Leonhard Euler, con la dissertazione *«De pressione ponderis in planum cui incumbit»* [4]. Naturalmente, però, ogni storia ha una sua preistoria, ogni giudizio esplicito affonda le sue radici in un terreno pregiudiziale (Gadamer) che lo determina o quanto meno lo orienta. Nel nostro caso le radici richiamano addirittura ai primordi della meccanica moderna, alla stagione di Galileo e Stevin, tanto per citar due nomi di preminente grandezza, quando cioè fu formulato un *principio di riduzione* idoneo a conferire un'immagine concettuale unitaria e a stabilire un criterio di equivalenza su intuizioni ancor oscure e confuse relative al peso, alla forza, alla *gravitas secundum situm*, alla pressione e alla tensione. Nella trattazione di Stevin sul problema del piano inclinato, la pressione esercitata dal peso è resa equivalente alla tensione agente in una delle funi di una «macchina funicolare» ed è così ricondotta alla componente di una forza secondo un'opportuna direzione. Ciò che si deve imporre affinché valga l'equivalenza è che la «macchina funicolare» consenta al peso di compiere quei soli spostamenti possibili che il piano inclinato non impedisce. Ecco: in questo modo di procedere così persuasivo da entrare nella consuetudine («in elementis doceri solet», dirà Euler) son tuttavia nascosti alcuni passaggi non del tutto chiariti; buona parte del dibattito sul «problema degli appoggi» trarrà origine da essi. Anzitutto, l'identificare la pressione nella forza, riportando il problema alla operazione inversa rispetto al calcolo della risultante di due o più forze, va inteso come *definizione* del concetto di pressione o come *legge fisica* analoga a quella che connette la forza all'elongazione di un provino? E inoltre, il criterio di equivalenza, secondo il quale occorre e basta garantire l'identità degli spostamenti possibili, esprime un *fatto* o una *convenzione*? Le alternative qui formulate non sono affatto oziose: ed è proprio il problema degli appoggi a manifestarne l'incidenza dinanzi al paradosso dei sistemi staticamente indeterminati. I casi son due, infatti: o si ritiene che manchi qualcosa alle leggi generali della statica, ferma restando l'identità di pressione e forza nonché la tautologica validità del criterio di equivalenza; o si afferma che la pressione è bensì misurata da una forza, ma non si identifica con essa, poiché è

4. L. Euler, *De pressione in planum cui incumbit*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae *18* (1773), 1774, p. 289-329; Opera Omnia II, 9 Commentationes mechanicae, pp. 1-34. Sullo stesso tema cfr. anche: *Vom dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf einer Fläche. Aus den Papieren des Sel. Leonhard Euler gezogen, von Jacob Bernoulli.* Archiv der reinen un angewandten Mathematik, *1: 1*, 1794, pp. 74-80; Opera Omnia, ibidem, pp. 407-412. Questo secondo saggio, tuttavia, differisce dal primo solo per la maggior concisione.

governata da leggi fisiche che, aggiungendosi a quelle generali della statica, la connotano e la determinano ulteriormente.

Quale sia la posizione di Euler a questo proposito, non è chiaro. Dopo aver succintamente esposto la soluzione del caso «quo pondus ternis pedibus plano insistit», egli osserva: «Verum si pondus quatuor pedibus plano insistat, determinatio singularum pressionum non solum multo magis ardua deprehenditur, sed etiam incerta et lubrica videtur». Se i piedi d'appoggio son quattro, cioè, la soluzione è non solo assai più ardua ma anche incerta e ingannevole: ad esempio, la presenza di asperità nel piano o qualche imperfezione nei piedi può far sì che il corpo poggi su tre punti e la pressione del quarto sia nulla. Per questo — aggiunge Euler — «ne perfectissima illa pedum aequalitas, qualem vix admittere licet, negotium facessat, concipiamus planum sive solum, cui pondus imcumbit, non adeo esse durum (...) sed quasi panno esse obductum, cui pedes aliquantillum se immergere queant». Con ciò il problema cambia forma: non più si ha l'appoggio su un piano rigido, ma l'appoggio su un suolo — potremmo dir oggi — alla Winkler. Tuttavia, e qui sta il punto, «neminem pannus ille pressioni cedens offendat, etsi enim illi mollitiem quandam tribuimus, eam tamen, quousque libuerit, diminuere licebit; ita ut tandem indolem soli illius, cui pondus revera insistit, adipiscatur».

Con altre parole, per Euler, il supporre cedevole il piano non è che un accorgimento concettuale utile a comprendere quel che avviene nel piano rigido e il passaggio dall'un caso all'altro è governato da un argomento consueto in matematica, come quando per stabilire una relazione tra elementi infinitesimi si tien sott'occhio una figura di dimensione finita. Orbene, per il suolo cedevole «ausiliario» nel quale i quattro piedi A, B, C, D penetrano «per spatiola $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ quae (...) infinite parva spectare licebit», si deve ritenere che le pressioni esercitate dai piedi siano proporzionali a quegli spostamenti. «Hinc igitur vicissim si in punctis A, B, C, D super plano erigantur perpendicula $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, et $D\delta$ quae sint ipsis pressionibus in his punctis proportionalia, necesse est, ut puncta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, reperiantur in eodem plano». Questo è appunto il principio sul quale è fondata l'indagine di Euler, il quale tiene ulteriormente a ribadire che tale proprietà, pur essendo tratta dall'esempio del suolo cedevole, ne è indipendente, poiché gli spostamenti idealmente introdotti «hic tantum in subsidium nostrae imaginationis sunt vocati».

È evidente l'ambiguità del testo euleriano: la stessa proporzionalità tra pressione e spostamenti non viene attribuita alla natura elastica del suolo, ma è affermata come un dato evidente di per sé, quasi derivasse direttamente dalla definizione di pressione. Ciò non deve stupire; già nella sua *Mechanica sive scientia motus analytice exposita* del 1736, Euler aveva inteso la proporzionalità tra forza e accelerazione quale «verità di ragione» deducibile *a priori* dal principio metafisico della «ragione sufficiente». Nel medesimo tempo, tuttavia, neppure vien rinnegata l'immagine del suolo cedevole «come un panno» che suggerisce al contrario una base empirica della proporzionalità tra pressioni e spostamenti. Altrettanto incerta è la natura del *Principium generale* che l'Autore formula a conclusione dei ragionamenti sopra riportati: «sive pondus pluribus pedibus innitatur, sive basi incumbat plana cuiuscumque figurae, sit punctum M (fig. 1) sive extremitas cuiuspiam pedis, sive elementum quodpiam basis, pro quo pressio quaeritur. Concipiatur ibi perpendiculariter erecta linea M ipsi pressioni proportionalis, atque necesse est omnia ista puncta μ in quopiam plano terminari» (Sia che il peso poggi su più piedi, sia che poggi su una qualunque figura piana, si consideri il punto M estremità di un piede o elemento della base. Eretta una linea M perpendicolare al piano d'appoggio e proporzionale alla pressione, è necessario che tutti i punti μ appartengano a uno stesso piano).

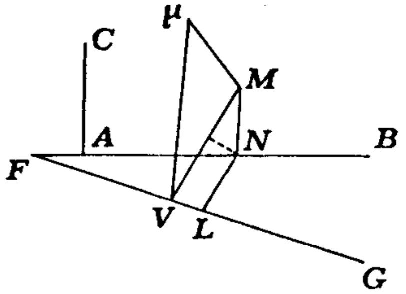

Fig. 1

Su questo *Principio* si infervorirà la discussione per ottant'anni precisi, e cioè sino al 1853, quando Giuseppe Fagnoli, ultimo rappresentante di coloro che volevano riportare alle pure leggi della statica la soluzione dei problemi staticamente indeterminati, tornerà sulla tesi euleriana, offrendone una diversa interpretazione. Comunque, quale che fosse l'opinione di Euler sulla natura del suo Principio, non c'è dubbio che esso consentiva di risolvere agevolmente il problema degli appoggi con piena generalità; numerosi esempi e accurate applicazioni occupano appunto gran parte del saggio, dimostrando una volta di più la maestria dell'Autore. Pur non potendoci soffermare, merita segnalare la singolare eleganza della soluzione offerta per il problema del tripode. Euler osserva che se la risultante del peso P passa per O (fig. 2), le reazioni d'appoggio R_A, R_B, R_C sono date da:

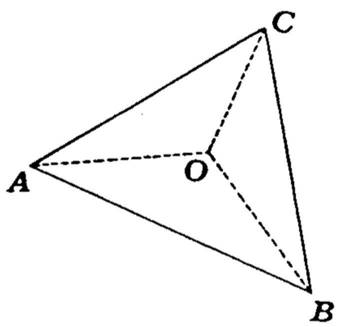

Fig. 2

$$R_A = P\frac{[BOC]}{[ABC]} \qquad R_B = P\frac{[COA]}{[ABC]}$$

$$R_C = P\frac{[AOB]}{[ABC]}$$

dove *[ABC]*, *[BOC]*, ... indicano l'area dei triangoli *ABC*, *BOC*, ... Ricordando che le reazioni in A e B nella trave su due appoggi (fig. 3) soggetta al peso P sono rispettivamente:

$$R_A = P\frac{[OB]}{[AB]} \quad R_B = P\frac{[AO]}{[AB]}$$

Fig. 3

dove $[AB]$, $[OB]$, $[AO]$ indicano la lunghezza dei segmenti AB, OB, AO, appar chiaro che, passando da due a tre appoggi, permane un'analogia strettissima. Non potrebbe essere questo un invitante indizio della presenza di qualche riposta armonia perdurante anche nel passaggio da tre a quattro, ... a n appoggi? Gli immediati successori di Eulero saranno alquanto sedotti da tale suggestiva ipotesi.

Non però Jean Baptiste Lerond D'Alembert, il secondo personaggio che si incontra nella nostra storia, che dedicò al problema degli appoggi parte di una memoria dal titolo *Sur quelques questions de Méchanique* inserita nel Tomo VIII (pp. 36-45) degli *Opuscula* (1780). Il proposito di D'Alembert è soprattutto quello di presentare una questione che appare «digne d'exercer les Géomètres» definendone precisamente i termini nel caso più semplice di tre appoggi allineati. Dopo aver mostrato brevemente che il problema è staticamente indeterminato, D'Alembert fissa con grande chiarezza gli intervalli entro i quali possono variare le tre reazioni d'appoggio nell'ipotesi che siano escluse reazioni negative (ossia, possiamo dire, nell'ipotesi di «vincoli monolaterali»).

Con riferimento alla figura 4a, dove A, B, C designano gli appoggi e O è il punto pel quale passa la risultante del peso, la reazione in A deve essere compresa tra un minimo (per $R_B = 0$) secondo la

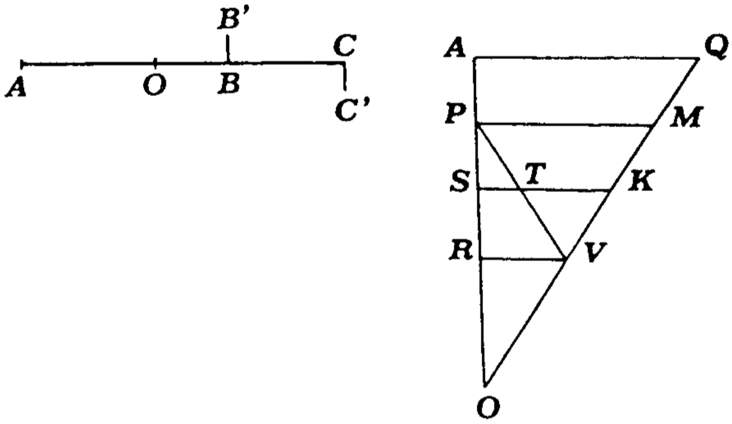

Fig. 4

$$P\frac{b}{a+b} \leqslant R_A \leqslant P\frac{b+c}{a+b+c}$$

Mentre:

$$0 \leqslant R_B \leqslant P\frac{a}{a+b},$$

$$0 \leqslant R_C \leqslant P\frac{a}{a+b+c}$$

Inoltre, se si pone $R_B = P\,(a+\omega)/(a+b)$ (con $0 \leqslant \omega \leqslant a$), deve aversi

$R_C = P\omega/(a+b+c)$. Pertanto, conclude D'Alembert, «quelque petite que soit la quantité c, c'est à dire, quelque proche que soient l'un de l'autre les appuis B, C, on peut supposer, au moins d'après la théorie connue jusqu'à présent, que le poids supporté par un des appuis soit $= 0$; et comme on peut prendre un de ces deux appuis à volonté, pour celui dont la charge est nulle, il est clair que la théorie connue jusqu'ici est insuffisante pour résoudre le problème en question» [5]. Il diagramma della fig. 4b rappresenta efficacemente la situazione nella sua indeterminatezza: in esso il segmento AQ è proporzionale al peso P e i segmenti AP, AR denotano rispettivamente il limite inferiore e superiore di R_A, mentre PM indica la reazione R_B nell'ipotesi $R_C = 0$, e RV la reazione R_C nell'ipotesi $R_B = 0$. Se dunque si assegna a R_A la determinazione compatibile AS, le altre due reazioni R_B, R_C son date dai segmenti TK e TS rispettivamente.

D'Alembert si limita a porre i termini del problema senza farsi propositore di una soluzione; una sola ipotesi egli formula di sfuggita, supponendo che gli appoggi B e C non siano allineati con AO e si pongano in B', C' con $[BB'] = [CC']$ (fig. 4a); in tal caso risulterebbe $R_B = R_C$, qualunque sia il valore di $[BB']$, e quindi anche per $[BB'] \to 0$. È un tentativo analogo a quello di Euler: partire da un sistema «ausiliario» risolubile per giungere al sistema «reale» per via d'un passaggio al limite. Ma il nostro Autore si rende subito conto che «cette supposition précaire laisse encore ici beaucoup d'incertitude», come del resto — egli aggiunge — la soluzione «incertaine et hypothétique» di Euler [6].

Tuttavia, la linea tracciata da D'Alembert con la semplice posizione del del problema per vincoli monolaterali avrà un certo sviluppo; in particolare Fourier, Navier e Cournot la riprenderanno aggiungendo alla condizione $R \geqslant 0$ per ogni reazione d'appoggio, una seconda condizione espressiva dei «limiti di resistenza» $R < R_{lim}$. Ciò consentirà, ovviamente, di scavalcare l'ostacolo dell'indeterminazione statica delle reazioni, per stabilire un limite superiore al peso P in corrispondenza del quale uno degli appoggi cederebbe. Nonostante l'evidente interesse di tali primi esempi di *analisi limite*, essi esulano alquanto dalla via maestra seguita dalla maggior parte dei ricercatori per sciogliere l'enigma degli appoggi staticamente indeterminati. L'intento di Fourier era appunto quello di mostrare che «la détermination individuelle des pressions n'est pas nécessaire, et qu'il est superflu de recourir à d'autres principes que ceux de la statique»; il problema era così rimosso più che risolto. Ma una simile scorciatoia non ebbe successo; i meccanici (Navier e Cournot compresi) preferirono piuttosto vederci chiaro.

5. J.B. D'Alembert, *Sur quelques questions de Méchanique*, Opuscula, *8*, Mém. 56, § II, 1780, Paris, p. 38.
6. Ibidem, p. 40.

La discussione italiana nel 1700

È del genio italiano prediligere quelle questioni che abbiano un aspetto enigmatico da sciogliersi più con l'intuizione geniale che con calcoli sistematici e prender gusto nelle polemiche scientifiche con una perseveranza che apparirebbe irragionevole se non fosse ravvivata da uno spirito quasi giocoso di gara intellettuale, per quanto arido sia l'argomento del dibattere. Se poi l'enigma evoca domande di sentore metafisico, come se il tema disputato fosse una storia di *experimentum crucis* per ipotesi generali sulla natura delle cose e della conoscenza, allora la perseveranza si muta in vera ostinazione, la polemica in guerra. Ebbene, il «problema degli appoggi», a dispetto della sua parvenza innocente di diatriba accademica quasi oziosa, ospitava quel tanto di enigmatico e di metafisico da accendere gli animi. Non si può comprendere a fondo il ruolo storico di Castigliano in Italia — ed anche l'ambigua accoglienza dei risultati da lui conseguiti — se non si tien presente l'incidenza «nazionale» della questione; la quale aveva trovato in Italia efficaci stimoli alla speculazione teorica secondo diversi orientamenti, talvolta ancor impigliati nella tradizione sospettosa delle Scuole, talaltra — e più spesso — all'avanguardia nella ricerca di nuove vie e di ambiziose sintesi, sulla scorta della chiarificazione dei principi della meccanica offerta dal torinese Luigi Lagrange.

È forse lecito affermare che la prima apparizione in Italia del problema degli appoggi s'ebbe con la traduzione del *Traité élémentaire de Méchanique* dell'abate Charles Bossut, stampato a Pavia nel 1788 con notevoli arricchimenti rispetto alla prima edizione francese del 1763. Il Bossut aveva dato forma «elementare» alla dimostrazione del risultato euleriano per il tripode riconducendo il corpo rigido ABC ed un sistema di due leve: la leva AD con fulcro in O che consente di sostituire al peso P in O le forze $-R_A$ e $-R_D$ in A e D rispettivamente; la leva BC poggiante sulla AD in D che consente a sostituire a $-R_D$ le forze $-R_B$ e $-R_C$ in B e in C rispettivamente. Poiché evidentemente dalla legge della leva risulta

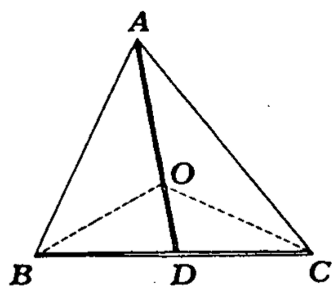

Fig. 5

$$R_A = P\frac{[OD]}{[AD]} \quad R_B = P\frac{[OA]}{[AD]}\frac{[DC]}{[BC]}$$

$$R_C = P\frac{[OA]}{[AD]}\frac{[BD]}{[BC]} \qquad [1]$$

è agevole trarre la serie di proporzioni

$$P : R_A : R_B : R_C :: [BC]\,[AD] : [OD]\,[BC] : [OA]\,[DC] : [OA]\,[BD] ::$$
$$:: [ABC] : [OBC] : [OCA] : [OAB] \qquad [2]$$

Questo è appunto il teorema che Eulero aveva formulato senza dimostrazione. Ciò posto, Bossut concludeva così: «Quando i tre appoggi *ABC* sono in una linea retta, i triangoli *ABC, OBC, OAC, OAB* s'annullano, ed il rapporto delle forze P, R_A, R_B, R_C è indeterminato. Se il corpo s'appoggia con più di tre punti, il problema, considerato sempre secondo le leggi ordinarie della Meccanica, è indeterminato, qualunque sia la disposizione rispettiva degli appoggi» [7].

Questa affermazione e più ancora la precedente interpretazione del sistema in termini di leve opportunamente disposte, alimenteranno la lunga disputa che, a partire dal 1790, trovò la sua palestra nelle *Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana*, pubblicate a Verona. L'autore che dette inizio alla controversia fu il capitano bresciano Paolo Delanges, Professore nella scuola militare di Verona, collega ed amico del Salimbeni, del Lorgna e di altri esponenti dell'illuminismo veneto, valente studioso di numerosi temi attinenti alla meccanica applicata e alla statica delle strutture: dalla spinta delle terre alla resistenza dei muri, all'attrito e ai suoi effetti nelle macchine, alla meccanica dei semifluidi, all'equilibrio dei tetti e delle volte. Nonostante questi suoi meriti, i contributi da lui offerti al problema degli appoggi son tutt'altro che perfetti: anzi sono vistosamente — forse addirittura ingenuamente — erronei. Sull'argomento il Delanges tornò tre volte sull'arco di circa vent'anni testimoniando così quanto gli premesse venir a capo dell'enigma: la prima volta nel 1790, la seconda nel 1798, la terza nel 1811 con la proposta di un'indagine sperimentale [8]. Il nostro autore era convinto che anche nell'ambito delle ordinarie leggi della meccanica fosse possibile escludere l'indeterminazione, «non iscorgendosi ragione alcuna per cui determinato dovesse esser il problema fino a tre punti, e non più». Del resto — aggiunge Delanges — la soluzione di Bossut è solo in apparenza determinata poiché dalle [1], [2] emerge che il valore della «pressione» in uno dei punti d'appoggio (ad es. R_A) resta immutato pur spostando (sotto certe condi-

7. C. Bossut, *Trattato elementare di meccanica, 1*, Pavia, 1788, p. 212 e ss. Va notato che la soluzione al problema del tripode data da Eulero e ripresa da Bossut ha un precedente nella soluzione al problema del peso sostenuto da tre corde non complanari offerta da Philippe De La Hire nel suo *Traité de Méchanique* (Paris, 1696). De la Hire aveva anche osservato che se la verticale del peso e due delle corde sono complanari, la terza corda è scarica (*Prop.* XXIX, pp. 58-60).

8. Delanges, *Memoria sulle pressioni esercitate da un corpo sostenuto da tre o più appoggi collocati nello stesso piano.* Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana *5*, 1790, pp. 107-129; *Nuove considerazioni intorno alla pressione d'un corpo sostenuto da tre o più appoggi in un piano orizzontale. Ibidem, 8, 1*, 1799 (1798), p. 60-76; *Analisi e soluzione sperimentale del problema delle pressioni,* Ibidem, *15, 1*, 1811, p. 329.

zioni) gli altri due appoggi. Di qui l'esigenza di una nuova soluzione al problema, che eviti di «dar mano a ipotesi o sussidj ed immagini [le due leve del Bossut] non convenienti alla naturale sua costruzione» [9]. In realtà, Delanges non fa che sostituire all'immagine delle due leve, una nuova immagine interpretando il tripode ABC come leva angolare a tre braccia AO, BO, CO. L'equilibrio è descritto imponendo l'equazione dei momenti rispetto agli assi IL, DE, HF:

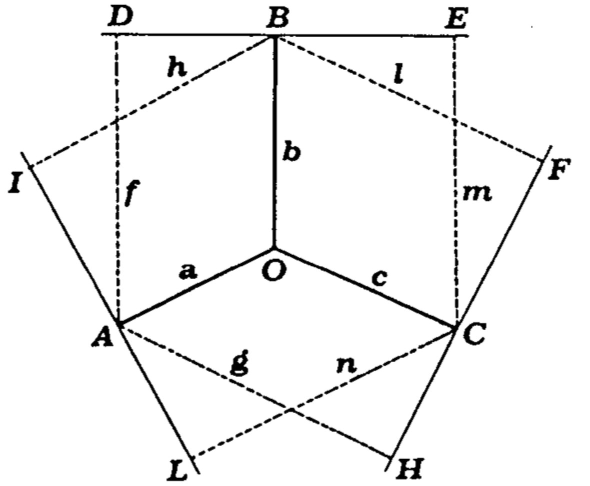

Fig. 6

$$Pa = R_B h + R_C n;$$
$$Pb = R_A f + R_C m;$$
$$Pc = R_A g + R_B l \qquad [3]$$

da cui si traggono le determinazioni :

$$R_A = P\frac{bln + chm - alm}{fln + ghm};$$

$$R_B = P\frac{agm + fcn - bgn}{fln + ghm};$$

$$R_C = P\frac{afl + bgh - cfh}{fln + ghm} \qquad [4]$$

Sin qui, possiamo dire, la variante rispetto alla soluzione di Euler/Bossut è del tutto lecita e tanto elementare da apparire priva di interesse. Ma non è di questo parere Delanges, il quale ritiene straordinario il fatto che R_A, R_B, R_C dedotte dalla sola equazione dei momenti soddisfino la condizione $R_A + R_B + R_C = P$: ciò è reso da lui oggetto di un intricato teorema la cui dimostrazione geometrica occupa numerose pagine del saggio, frutto dell'incredibile fatica intellettuale di due allievi del Collegio militare di Verona, i Sigg. Bernardi e Romanò. Se dunque per il tripode la soluzione è data da una triplice applicazione dell'equazione dei momenti, perché non sperare che per il corpo su quattro appoggi interpretato quale leva angolare a quattro braccia il risultato sia analogamente dedotto da una quadruplice applicazione della medesima equazione?

Ahimé, troppa virtù può esser vizio: così come la sviscerata obbedienza degli alunni Bernardi e Romanò li affogò in una palude di passaggi dimostrativi senza che essi osassero considerar criticamente la mèta dei loro sforzi e riconoscerne così la banalità, allo stesso modo l'indubbia perizia e una certa abnegazione di Delanges ad affrontare laboriosi calcoli lo indussero a dichiarare provata la sua speranza, benché a prima vista essa appaia fallace. Ad esempio, nel

9. Delanges, *Memoria sulle pressioni...* cit., p. 111.

caso in cui gli appoggi del tripode tendano a disporsi su una medesima retta secondo lo schema di fig. 7, l'Autore trova che $f = h$, $g = n$, $l = m$, sicché l'applicazione delle [4] conduce alle:

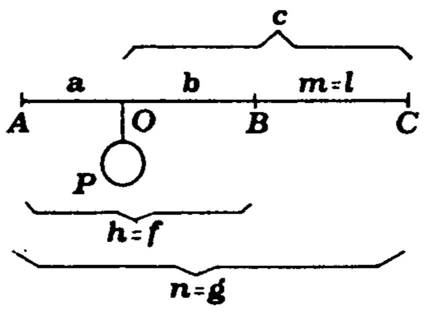

Fig. 7

$$R_A = P\frac{b}{a+b} \quad R_B = P\frac{a}{a+b} \quad R_C = 0$$

dimostrando, dunque, «che il peso P è soltanto portato dai due appoggi tra i quali esercita la sua azione, e rimane superfluo il terzo situato al di là di essi» [10]. In realtà. l'equazione dei momenti direttamente applicata alla trave continua della fig. 7, rivela subito che le sostituzioni operate da Delanges non sono corrette in segno. Le [3] diventano infatti:

$$Pa = R_B h + R_C n; \qquad Pb = R_A h - R_C m; \qquad Pc = R_A n + R_B m$$

e danno luogo a un sistema indeterminato nelle incognite R_A, R_B, R_C. Sarebbe però opera impervia oltreché oziosa seguir passo per passo la trattazione indicando i punti nei quali si insinua l'impercettibile ma nefasto errore; lo ha già fatto per noi Pietro Paoli che vi dedicò tempo e fatica, spinto come era dal pungolo d'averla vinta nella polemica col suo rivale.

Il primo intervento del Paoli s'ebbe nel 1792 con un limpido e rigoroso lavoro volto a segnalare l'efficacia del metodo generale proposto da Luigi Lagrange nella *Méchanique analytique* [11]. «Tutti i problemi, che hanno rapporto all'equilibrio — egli dice — si possono considerare come risoluti nella Meccanica Analitica del Sig. De la *Grange*; almeno in quell'opera eccellente si trovano i principj necessarj per risolverli tutti». Ciò consentirà di chiarire finalmente, anche per il problema degli appoggi, quel che «da' soli principj della meccanica senza alcuna ipotesi possa sperarsi» [12]. La critica è dunque diretta alle soluzioni dei precedenti autori che presumevano di sciogliere la questione con vari accorgimenti arbitrariamente dedotti da tali principi; occorre infatti riconoscere che se il corpo poggia su un piano in più di tre punti il problema è indeterminato, mentre se il corpo fosse appoggiato su vari piani diversamente inclinati l'indeterminazione emergerebbe per più di sei appoggi. L'analisi è svolta utilizzando il principio delle velocità virtuali e imponendo le condizioni affinché resti impedi-

10. Ibidem, p. 120.
11. P. Paoli, *Memoria sopra alcuni problemi meccanici*, Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *6*, 1792, p. 534-559.
12. Ibidem, p. 536.

to sia il «moto progressivo», sia il «moto di rotazione». Ora è evidente che per impedire il moto di rotazione, con riferimento all'appoggio su un piano, occorre e basta considerare due assi distinti; la proposta di Delanges è pertanto inefficace e non può che condurre a soluzioni apparenti; «cioè nella forma 0/0, com'è noto dalla teoria della eliminazione» [13]. Va notato che la dimostrazione del Paoli non è originale; essa corrisponde quasi puntualmente a quella data da Vincenzo Riccati nella quinta delle lettere al P. Virgiglio Cavina (in data 23 Novembre 1770) che compongono il trattato *De' principj della Meccanica* [14].

Comunque, il contributo di Paoli rivendica giustamente i diritti dell' «ortodossia»; se prima era possibile sospettare che l'indeterminazione statica delle reazioni nella trave continua su tre appoggi derivasse dalla forma particolare della soluzione di Euler e Bossut per il tripode e che esistesse invece un'altra forma risolutiva, ormai tale sospetto è fugato. L'indeterminazione permane, pur risolvendo il problema «nella massima generalità» [15]. L'unica via che si presenta ai ricercatori successivi per superare l'enigma degli appoggi sovrabbondanti può esser soltanto quella di individuare un nuovo principio statico o una nuova «sintesi» empiricamente fondata. Questa via continuerà ad essere praticata sino al tempo di Castigliano, quando la meta sembrava conseguita col sovrano «Principio di Elasticità» di Menabrea; sarà proprio Castigliano ad abbandonarla con la sua deliberata *riduzione* del medesimo «Principio di Elasticità» a particolare corollario di precedenti teoremi.

L'autore che per primo tentò di formulare un postulato ragionevole, o una legge plausibile, chiaramente indeducibile dai principi della meccanica, fu Anton Maria Lorgna, il celebre illuminista. In un saggio pubblicato nel 1794 col titolo *«Dell'Azione di un corpo retto da un piano immobile esercitata ne' punti di appoggio che lo sostentano. Tentativo del Sig. Cavaliere Lorgna»* [16], lo stato della questione era da lui avvertito nei termini posti da D'Alembert: essendo infatti indubitabili i risultati di Paoli, era necessario riconoscere con D'Alembert «qu'il manque encore quelque chose aux principes de Méchanique, et qu'il y à des cas où les loix connues jusqu'ici paroissent insuffisantes».

Il «nuovo tentativo» di Lorgna consiste nell'interpretare il corpo che poggia in n punti su un piano come un insieme di tripodi ottenuti dalle combinazioni possibili di quei punti, a tre a tre. Per aiutare l'immaginazione si potrebbe pensare ad un plico di triangoli, in contatto l'uno sull'altro per i vertici, che nel complesso configurano il poligono di appoggio. I diversi tripodi, il cui numero è $n\,(n - 1)\,(n - 2)/3!$, sono da Lorgna considerati «attivi» se il centro di gra-

13. Ibidem, p. 540.
14. V. Riccati, *De' principj della Meccanica,* Venezia, 1772, pp. 24-26.
15. P. Paoli, loc. cit., p. 543 e ss.
16. In Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, 7, 1704, pp. 178-192.

vità del corpo cade nel triangolo degli appoggi, e «inoperanti» nel caso opposto. Ciò deriva dall'intenzione di tener conto del vincolo monolaterale. Ad esempio, per il quadrangolo *ABCD* (fig. 8) — dice l'Autore — «i due sistemi *ACD, ADB* non hanno per sé alcuna attitudine a sostenere il peso *P*, poiché il centro cade totalmente fuori dei perimetri di entrambi. Ma è certissimo, che ciascuno degli altri due *BCD, ACB* è atto per sé (...) a sostenere l'intero peso *P*; e però questi due sono i sistemi ch'io chiamo attivi, e inoperanti gli altri due in qualità di sistemi» [17].

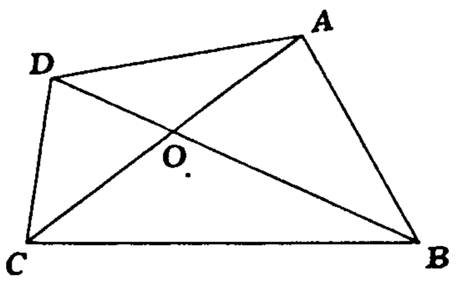

Fig. 8

A questo punto, l'indeterminazione statica del problema consiste nell'impossibilità di sapere quale porzione del peso *P* debba essere attribuita ad ognuno dei tripodi «attivi». Ecco dunque il postulato proposto del Lorgna: «Ch'essendo retto un corpo da un piano immobile in più di tre punti non posti per diritto, possa considerarsi, che l'azione della gravità si eserciti distribuita ugualmente sopra tutti i sistemi di tre appoggi, tra i quali cade il centro di gravità del corpo ...» [18].

È superfluo sottolineare l'arbitrarietà di un tal postulato che nella mente del suo autore dovrebbe forse trarre giustificazione dal principio di ragione sufficiente, non essendovi alcun motivo per privilegiare nel corpo rigido l'uno o l'altro dei tripodi «attivi». D'altra parte è anche giusto osservare che il tentativo di «decomporre» un sistema complesso, staticamente indeterminato, in un insieme di sistemi semplici, ha dalla sua una lunga tradizione nella scienza e nella tecnica delle costruzioni; basti pensare ai modelli statici elementari che furono di consueto utilizzati per rappresentare il problema del muro di sostegno o dell'arco, o ancora della trave reticolare e dell'incavallatura iperstatica, sinché non vennero in luce i metodi generali dell'analisi elastica di cui Castigliano fu il vero pioniere [19].

Due anni prima del tentativo di Lorgna, un altro scienziato aveva rivolto i suoi sforzi alla ricerca di un nuovo principio e di una «nuova sintesi., come egli amava chiamarla. Si tratta di Mariano Fontana, professore di Matematica Applicata all'Università di Pavia e autore di un cospicuo trattato di Dinamica. Nel

17. Ibidem, p. 180.
18. Ibidem, p. 182.
19. A titolo di esempio, ricordiamo che, quasi contemporaneo al maggior testo di Castigliano, uscì a Parigi un grosso volume di Planat dove la soluzione dei sistemi iperstatici era proposta con argomenti approssimativi del tutto analoghi a quelli del nostro Lorgna.

secondo volume di tale trattato, il problema degli appoggi torna con insistenza come un cruccio pressante da cui l'autore non riesce a liberarsi, nonostante le soluzioni via via proposte o promesse [20].

Ma alla «nuova sintesi» il Fontana non giunge; le sue ipotesi si susseguono al modo di una meditazione contrastata dove ogni passaggio è messo per iscritto nello stile risoluto e incerto insieme di un provvisorio appunto. Per la trave su tre appoggi (monolaterali) *ABC* di fig. 4 l'opinione del nostro autore è la stessa di Delanges: se la risultante di carichi passa tra *A* e *B*, il terzo appoggio *C* «andrà affatto esente da ogni carico» poiché «tenderà l'estremo *C* della trave di sua natura a salire» [21]. Tuttavia la dimostrazione addotta è quanto mai intricata e vaga. Per il corpo sostenuto da quattro appoggi su un piano orizzontale l'analisi si fa ancor più confusa: supponendo dapprima che il corpo «dispensi la propria pressione col mezzo di certi strumenti inflessibili», Fontana avverte correttamente che il problema è indeterminato; subito dopo però soggiunge: «che se un grave posa sopra un piano retto da quattro piedi, il problema di natura sua è determinato poiché il piano stesso fa le veci di quattro verghe». La soluzione è ottenuta nel caso particolare della fig. 9, immaginando che il peso *P*assante per *O* sia trasmesso ai lati del parallelogramma *ABCD* dalle verghe *QS* e *RT*. Se P_Q, P_S, P_R, P_T sono le «pressioni» esercitate da *P* in *Q*, *S*, *R*, *T*, risulta evidentemente:

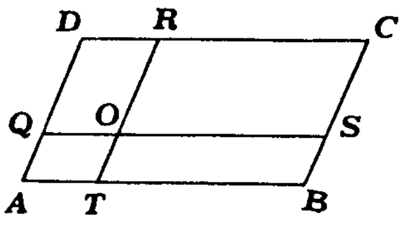

Fig. 9

$$P_Q = (P - P_R - P_T)\frac{[OS]}{[QS]}$$

$$P_S = (P - P_R - P_T)\frac{[QO]}{[QS]}$$

$$P_R = (P - P_Q - P_S)\frac{[OT]}{[RT]}$$

$$P_T = (P - P_Q - P_S\frac{[RO]}{[RT]}$$

D'altra parte, deve aversi, ad es. per il punto *D*:

$$R_D = P_R\frac{[OS]}{[QS]} + P_Q\frac{[OT]}{[RT]}$$

20. M. Fontana, *Della Dinamica libri tre, 2,* Pavia 1792, cfr. in particolare: pp. 34-45; 95-98.
21. Ibidem, p. 39.

donde viene:

$$R_D = P\frac{[OS]}{[QS]}\frac{[OT]}{[RT]} \quad R_C = P\frac{[QO]}{[QS]}\frac{[OT]}{[RT]}$$

$$R_A = P\frac{[OS]}{[QS]}\frac{[RO]}{[RT]} \quad R_B = P\frac{[QO]}{[QS]}\frac{[RO]}{[RT]}$$

«Di passaggio si osservi — conclude Fontana — che qualunque delle quattro pressioni come *D* è proporzionale al parallelogrammo *OB*, che è intorno all'angolo opposto *B*» [22]. Il risultato è senza dubbio brillante poiché estende a questo caso di appoggio su quattro punti il bel teorema di Euler relativo al tripode. Ma a quale prezzo? e con quali margini di incertezza, permanendo l'indeterminazione statica precedentemente riconosciuta?

E infatti, nell'Appendice II del medesimo capitolo in cui appare la soluzione sopra richiamata, Fontana torna sui suoi passi: «Dopo le brevi considerazioni che esposti in quel luogo — egli dice — mi posi a meditare più attentamente questa materia, e sono persuaso, che volendo analiticamente procedere, il detto problema non si determina co' soliti principi della meccanica, quando i punti d'appoggio sono più di tre» [23]. La sola speranza di giungere a una soluzione resta dunque affidata alla scoperta di un'«opportuna sintesi».

La battaglia per vincere l'enigma si trascina nel corso degli anni, aprendosi ancor su nuovi fronti. Il tomo VIII delle «Memorie della Società Italiana» raccoglie un numero impressionante di pagine sull'argomento. S'era al tempo di Napoleone; l'Italia era sconvolta dal crollo del vecchio mondo: Venezia annessa all'Austria, inedite repubbliche, governi provvisori. La stessa «Società Italiana» dovette trasferire l'edizione delle Memorie da Verona a Modena. Ma i nostri scienziati non s'erano lasciati distrarre dagli avvenimenti; imperterriti continuavano a seguire il filo della loro ricerca. Ecco infatti a p. 60 di quel tomo le *«Nuove considerazioni intorno alla pressione d'un corpo sostenuto da tre e più appoggi in un piano orizzontale»* di Paolo Delanges tese a difendere i metodi e i risultati che Pietro Paoli aveva contestato. *Nihil novi*, si sarebbe tentati di dire dopo una sommaria lettura del saggio; ma non è così. Anzitutto l'Autore rivendica un'essenziale differenza tra il problema della decomposizione di una in più forze parallele e il problema degli appoggi: il primo è chiaramente indeterminato se il numero delle forze cui s'impone di far equilibrio alla forza data è maggiore di tre; il secondo no: «chiunque, a cagion d'esempio, converrà, che poggiato un corpo su quattro sostegni de' quali i vertici sieno in un piano orizzontale e disposti agli angoli d'un quadrato, nel di cui centro cada la verticale che

22. Ibidem, p. 44.
23. Ibidem, pp. 95-96.

passa pel centro di gravità del corpo, ogni sostegno soffra la pressione equivalente alla quarta parte del peso intiero del corpo: mentre se volesse sospendersi in equilibrio il corpo medesimo, mediante quattro forze verticali nelle stesse circostanze, bensì le opposte per diagonale saranno eguali tra sé, ma possono diversificarsi all'infinito» [24]. L'osservazione è senz'altro azzeccata; come vedremo avrà un seguito presso successivi ricercatori. In secondo luogo il Delanges propone un nuovo metodo per ottenere daccapo i risultati della sua iniziale Memoria sfuggendo però questa volta all'esiziale critica di Paoli. Detto in breve, il metodo è quello delle velocità virtuali, corretto però da una restrizione che configura in realtà un principio aggiuntivo rispetto alle leggi della statica; nel computo del lavoro virtuale delle forze reattive, infatti, Delanges propone di cancellare il contributo di quelle reazioni il cui lavoro virtuale sia positivo, esprimendo così la monolateralità del vincolo. Il nuovo principio sarebbe dunque del tipo

$$P\delta\eta + \Sigma' \, R_i \, \delta\eta_i = 0 \qquad [5]$$

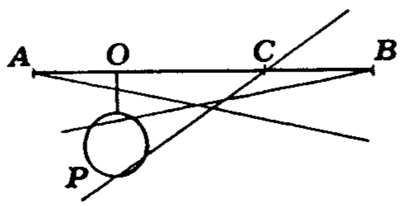

Fig. 10

dove $R_i \, \delta\eta_i$ indica il lavoro compiuto dalla reazione R_i per lo spostamento virtuale η_i; e la somma Σ' è estesa a quelle sole reazioni il cui verso (prevedibile a priori) sia discorde con lo spostamento relativo. Ad esempio, per la trave continua di fig. 10, l'autore impone dapprima una rotazione rigida intorno ad A e un'altra rotazione intorno a B ottenendo così:

$$R_C\,(a+c) + R_B\,(a+b) = aP$$
$$R_A\,(a+b) + R_C\,(b\text{-}c) = bP$$

Successivamente, prendendo C «per centro del moto e immaginando la piccola rotazione di discesa intorno ad esso» formula il seguente ragionamento: «Si rileva che non è astretto ceder che l'appoggio A, e che l'altro B rimane nella sua posizione, e sollevato per fino d'essere in contatto col corpo nel punto B: sicché essendo in tale supposizione attivo per l'equilibrio del corpo l'appoggio A, e indifferente l'esistenza dell'altro B, avremo l'equazione:

$$R_A\,(a + c) = cP \text{ »} \, [25]$$

24. P. Paoli, *Nuove considerazioni...* cit., p. 64.
25. Ibidem, p. 69.

Ragionamento oscuro, senza dubbio, e tale da rasentare una «petizione di principio», come osserverà Pietro Paoli. Tuttavia la [5] inaugura — per dir così — una lunga serie di equazioni proposte dai diversi ricercatori per colmare la «lacuna» delle leggi generali della statica.

Nello stesso tomo VIII delle citate «Memorie della Società Italiana» entra in scena un problema concettualmente analogo a quello degli appoggi, anch'esso destinato ad animare una *querelle* che si protrarrà per più di cinquant'anni: è il problema dei *cardini di una porta* proposto da Gregorio Fontana [26]. Si tratta nuovamente di un caso staticamente indeterminato già per due cardini, se l'asse di rotazione della porta è verticale. Gregorio Fontana perviene appunto all'indeterminazione delle componenti verticali delle reazioni; tuttavia egli accoglie nel proprio saggio anche una soluzione a lui comunicata da Lorenzo Mascheroni dove tali componenti sono ingannevolmente determinate per via statica. La questione sarà ripresa da Giuseppe Venturoli nei suoi *Elementi di Meccanica* e da Gabrio Piola nella memoria *Sull'applicazione dei principii della Meccanica Analitica di Lagrange* (...) premiata dall'Istituto Milanese nel 1824, entrambi a sostegno dell'indeterminazione; al contrario, G.B. Masetti, nelle sue *Note ed Aggiunte agli Elementi di Meccanica del Sig. Venturoli* (1827) riproporrà la tesi del Mascheroni. Infine interverranno con decisivi chiarimenti in proposito G. Barsotti [27] e soprattutto O. F. Mossotti [28], il quale mostrerà come tale problema sia riconducibile a quello degli appoggi, prestandosi alla medesima tecnica risolutiva.

Infine, per la terza volta, le «Memorie della Società Italiana» ospitano nel Tomo VIII un tentativo — l'ultimo del secolo XVIII — per la soluzione del discusso enigma. Ne è l'autore Gian Francesco Malfatti, un matematico di notevole levatura, nato ad Ala di Rovereto e vissuto tra il 1731 e il 1807 [29]. Al nostro tema Malfatti dedicò tre memorie pubblicate rispettivamente nel 1799 nel 1803 e nel 1805 [30]; della prima soltanto però merita parlare, cercando di estrarre gli elementi essenziali dalle novantasei pagine che compongono il lavoro così intricato e digressivo da scoraggiare il più volenteroso dei lettori. Dopo aver accerta-

26. G. Fontana, *Sopra la pressione delle porte contro i loro arpioni,* Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *8, 1,* 1798 (1798), pp. 135-139.

27. G. Barsotti, *Degli sforzi che fanno i punti di sostegno d'una porta per reggerla in equilibrio, qualunque ne sia il numero e la posizione.* Annali di Fis. Chim. e Matem., *8,* 1842, pp. 146-154.

28. F. Mossotti, *Lezioni di Meccanica Razionale,* Pisa, 1858, p. 99.

29. Cfr. gli Atti del Convegno: *«Gianfrancesco Malfatti nella cultura del suo tempo»*, Ferrara 1981; in tali Atti, di particolare interesse per noi è la comunicazione di S. Di Pasquale: *Gianfranco Malfatti e il problema degli appoggi*, pp. 253-264.

30. G.F. Malfatti, *Tentativo sul problema delle pressioni che soffrono gli appoggi collocati agli angoli di una figura, derivate da un peso posto dentro la sua aja.* Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *8, 2,* 1799, pp. 319-415; *Brevi riflessioni alla critica del tentativo pel problema delle pressioni, fatta dal sig. Paoli nel t. IX di questa Società*, Ibidem, *10, 1,* 1803, p. 245; *Appendice al problema delle pressioni*, Ibidem, *12, 1,* 1805, p. 100.

ta l'indeterminazione statica del problema in generale, l'autore avanza la sua ipotesi di fondo: «Per rimuovere quest'inciampo, perché non richiamerem noi in soccorso l'assioma fisico, che le operazioni della Natura, posta in circostanze per ogni verso eguali, sono eguali?» [31]. Ecco il nocciolo dell'argomento: vero è che in base alle leggi della statica, le reazioni di appoggio sovrabbondanti sono indeterminate; tuttavia non per questo possono essere assegnate ad arbitrio. Quale che sia la legge che le governa, essa dev'essere tale da produrre «pressioni» uguali quando i punti d'appoggio siano disposti secondo un poligono regolare e il carico sia centrato. In questo caso infatti il «principio di ragion sufficiente» riesce a rimuovere l'indeterminazione lasciata dalle leggi della statica: se però si pretende che *la sola applicazione delle leggi della statica* basti a produrre il risultato indubitabile dell'uguaglianza delle «pressioni», allora *è necessario supporre* che nel caso di un poligono d'appoggio regolare con carico centrato il corpo sia assimilabile ad un opportuno sistema di leve il cui equilibrio richieda necessariamente forze uguali nelle estremità corrispondenti agli appoggi.

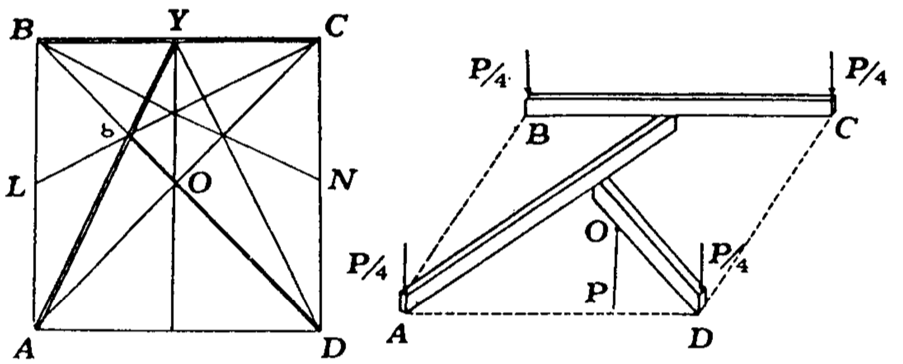

Fig. 11

Ad esempio, per un corpo quadrato soggetto al carico P nel centro O e poggiante su un piano orizzontale nei vertici A B C D, il sistema di leve che esige forze uguali in A B C D affinché sussista equilibrio è costituita dalla «leva primaria» $D\delta$ e dalle «leve comunicanti» AY, BC rappresentate in fig. 11. Passando ora dal poligono regolare a quello generico e dal carico centrato a un carico comunque disposto, Malfatti ritiene plausibile l'ipotesi che un «analogo» sistema di leve possa assolvere al medesimo ufficio, rimuovendo l'indeterminazione statica. Il problema sta nel ravvisare i termini dell' «analogia»: e qui l' «intralciato labirinto» seguito dall'Autore diventa vieppiù insidioso. Si consideri ad es. il quadrangolo A B C D caricato in O da $P = 1$ della fig. 12.

31. Ibidem, p. 324.

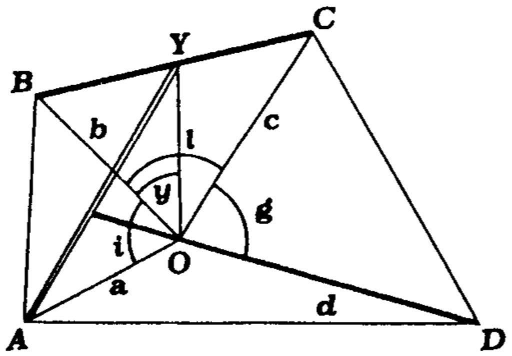

Fig. 12

Immaginando un sistema di leve «primarie» e «comunicanti» analogo a quello del quadrato resta comunque incognita la posizione di Y ovvero il valore da assegnare all'angolo y. Il valore delle reazioni dipende da y secondo la:

$$R_A = \frac{1}{D}(bcd\, sen l\, sen(g+l+y)) \qquad e\ analoghe, \qquad [6]$$

dove $D = R_A + R_B + R_C + R_D$. D'altra parte, per il triangolo ABC l'espressione di R_A (per $P = 1$) è

$$R_A = \frac{bc\, sen l}{ab\, sen i - ac\, sen(i+l) + bc\, sen l}$$

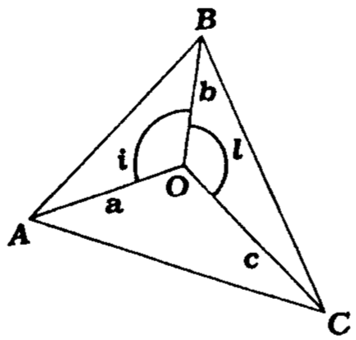

Fig. 13)

ossia, il binomio bc al numeratore è moltiplicato per l'angolo l compreso tra i lati di lunghezza b e c. Ebbene, l'«analogia» suggerisce a Malfatti di affermare che nel quadrangolo il trinomio bcd al numeratore della [6] debba essere dunque moltiplicato per la somma $sen\,l + sen\,g + sen(l+g)$ essendo l, g, $l+g$ gli angoli compresi tra i lati di lunghezza b, c e d. Le reazioni prendono allora la forma «congetturale» (come dice l'autore):

$$R_A = \frac{1}{S}(bcd\, [sen l + sen g + sen(l+g)]) \qquad e\ analoghe \qquad [7]$$

dove $S = R_A + R_B + R_C + R_D$. Il confronto tra [6] e [7] dà ovviamente notizie sull'angolo incognito y. Il risultato così ottenuto trae poi «conferma» dalla verifica che esso comprende come casi particolari i risultati noti per la figura regolare.

Per quanto inaccettabile o comunque arbitraria sia la trattazione, non si può disconoscerne la genialità. Malfatti ha saputo percorrere con ammirevole perizia l'antico sentiero tracciato da Archimede per la dimostrazione della legge della leva: partir cioè da un esempio «metafisicamente» risolto dal principio di ragion sufficiente per emarginare tale principio, affidando alle leggi fisiche il compito di rappresentarlo adeguatamente. Che poi quell'antico sentiero sia periglioso e deludente è altra questione. C'è di più: il criterio dell'«analogia» usato da Malfatti — certo in misura eccessiva — non può esser respinto a cuor leggero. Buona parte delle maggiori scoperte scientifiche è scaturita dall'inconfessabile convinzione che la Natura persegua un suo disegno di semplicità; non soltanto col risparmio dei suoi sforzi o con la scelta delle vie più corte secondo le intuizioni di Fermat e di Maupertuis, ma anche col variare «il meno possibile» la struttura formale delle sue leggi. È assai probabile che Malfatti proprio a questo pensasse nel corso del suo lavoro; ne è testimonianza un'enigmatica frase da lui posta nel paragrafo introduttivo, che forse è la chiave segreta dei suoi intenti: «Se io non vado errato ne' miei raziocinj, i quali sottopongo all'esame e alla decisione degl'Intendenti, mi compiacerò della mia fortuna nell'aver incontrato quel metodo che possa esser considerato come equivalente all'economia e al magistero della Natura nella distribuzione delle sue forze» [32].

Possiamo idealmente concludere la storia del dibattito settecentesco sul problema degli appoggi menzionando un lavoro che già appartiene al nuovo secolo; è il saggio polemico e sbrigativo di P. Paoli, pubblicato nel Tomo IX delle «Memorie della Società Italiana» [33]. Basta con i ragionamenti contorti e capziosi tendenti a distinguere tra «pressioni» d'appoggio e forze! sembra esclamare l'Autore. «Il sommo Geometra Lagrange con la più evidente e rigorosa metafisica ha generalmente dimostrato nella sua Meccanica Analitica, che si potevano in ogni caso sostituire alle pressioni eguali forze attive in senso contrario» [34]. Ciò costringe ad ammettere finalmente che il problema degli appoggi sovrabbondanti è indeterminato; ogni tentativo sinora compiuto per dimostrare il contrario, o è errato, o si fonda su ipotesi arbitrarie. Graffianti critiche sono rivolte a Delanges; la soluzione di Lorgna è appena citata con disprezzo; il lavoro di Malfatti è preso in maggior considerazione, ma non è difficile a Paoli denunciarne i gravi limiti. A proposito del sistema di leve ipotizzato da Malfatti l'obiezione è che la loro esistenza, seppur virtuale, non è affatto dimostrata; e a proposito del criterio di analogia l'obiezione è ancor più dura, quasi beffarda: infatti Paoli mostra come sia possibile seguire lo stesso criterio per giungere a una soluzione diversa. Ecco infine la conclusione: «Dopo i varj tentativi che sono stati fatti (...) mi confermo sempre più nella mia opinione; che, finché non sarà scoperto qualche nuovo principio di Statica, quelli, che finora si conosco-

32. Ibidem, p. 320.
33. P. Paoli, *Sul problema degli appoggi*, Mem. di Mat. e Fis. della Società Italiana, *9*, 1802 (1801), pp. 92-98.
34. Ibidem, p. 93.

no, saranno insufficienti a determinare le pressioni sofferte da più di tre appoggi, a meno che non si unisca ad essi qualche particolare supposizione» [35].

Sopravvivenza del vecchio dibattito nel secolo XIX

Se sbrigativo è il giudizio di Paoli che conclude il dibattito settecentesco, altrettanto deciso è il modo col quale l'enigma è rimosso nei grandi *trattati di Statica* che inaugurano il nuovo secolo. Così ad esempio L. Poinsot, nei suoi *Éléments de Statique* del 1803, interpreta l'indeterminazione statica insorgente nel problema degli appoggi sovrabbondanti per il corpo rigido come necessaria conseguenza dello stesso concetto di corpo rigido. «Gardons nous d'abord d'en conclure que la théorie connue jusqu'ici est insuffisante pour résoudre le problème en question; car nous allons voir que ce problème est indéterminé par l'hypothèse même que l'on a faite, et que la théorie donne tout ce qu'on peut demander sans se contredire» [36].

In altri termini, secondo Poinsot, l'enigma è sciolto se cessa d'essere inteso quale aporia della statica e diventa al contrario elemento connotativo di una certa classe di corpi descritti da due condizioni solidamente congiunte: l'indeformabilità geometrica e l'indeterminazione statica. Così anche Poisson, nel suo *Traité de Mécanique* del 1811 dichiara impossibile il determinare le reazioni nel corpo rigido iperstatico e rimuove il paradosso negando l'esistenza in natura di sistemi rigorosamente rigidi [37]. Così infine J. B. Labey, della scuola di Laplace, ritiene che l'indeterminazione non debba stupire, appartenendo alla natura matematica del problema statico [38].

Il vecchio dibattito sembra dunque destinato a spegnersi, anche perché — come vedremo — la ricerca sta prendendo altri orientamenti. In realtà si tratta soltanto in una sosta. Infatti, nel 1819 la questione rimbalza fuori d'Italia con una memoria di Bonnycastle presentata alla Royal Society dove di nuovo vien denunciata l'eventuale indeterminazione «analitica» e vien fatto appello a una sintesi «non matematica» che metta in conto le circostanze che accompagnano l'appoggio del corpo rigido su un piano. Nel 1821 la «Società Italiana» indice un concorso sul problema. Risorgono i due partiti, l'uno ostinato a dare una qualche soluzione, l'altro parimenti ostinato a smontarla. C'è poi il gruppo di chi s'accontenta ad attizzare il fuoco, stupendosi del paradosso. A questo grup-

35. Ibidem, p. 98.
36. L. Poinsot, *Elements de Statique*, Paris 1803, p. 151.
37. S. D. Poisson, *Traité de Mécanique*, Paris 1811 (1833), Livres III, 2 Partie, Ch. I pp. 523-525.
38. J.B. Labey, *Traité de Statique*, Paris 1812, p. 94-98.